Olimpiadi di Fisica

Secondo Turno

Lugano, 16 gennaio 2019

Prima parte (60')	**:**	**Multiple Choice – 22 domande**
Seconda parte (120')	**:**	**Problemi – 3 domande**
Materiale autorizzato	:	Calcolatrice non programmabile Materiale per scrivere e disegnare

Buon lavoro !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung und Forschung und Innovation
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
SISF (BASF, Novartis, Roche, Syngenta (Basel))
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Costanti fondamentali

Velocità della luce nel vuoto	c	$=$	$299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg\,m\,A^{-2}\,s^{-2}}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2\,s^4\,kg^{-1}\,m^{-3}}$
Costante di Planck	h	$=$	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$
Carica elementare	e	$=$	$1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A\,s}$
Costante gravitazionale	G	$=$	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Accelerazione terrestre	g	$=$	$9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Numero di Avogadro	N_A	$=$	$6.022\,141\,29(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Costante dei gas	R	$=$	$8.314\,459\,8(48)\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k_B	$=$	$1.380\,648\,8(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$=$	$5.670\,373(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Massa dell'elettrone	m_e	$=$	$9.109\,382\,6(16) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massa del protone	m_p	$=$	$1.672\,621\,71(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Massa del neutrone	m_n	$=$	$1.674\,927\,28(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Domande a risposta multipla: foglio risposte

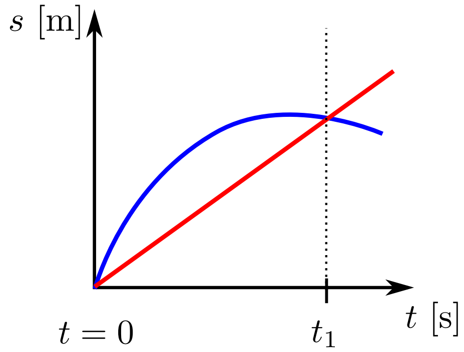
Durata: 60 minuti
Punteggio: 22 punti (1 punto per ogni risposta corretta)
Riportate le vostre risposte nelle caselle previste su questa pagina.
Ciascuna domanda ammette una sola risposta corretta

Cognome	:
Nome	:
Totale	:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Domanda 1	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 2	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 3	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 4	☐	☐	☐	☐		
Domanda 5	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 6	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 7	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 8	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 9	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 10	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 11	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 12	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 13	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 14	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 15	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 16	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 17	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 18	☐	☐	☐	☐	☐	
Domanda 19	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 20	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 21	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 22	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Domanda 1

Il seguente grafico mostra l'evoluzione della posizione di due oggetti. Quale affermazione è corretta?



a) All'istante t_1 entrambi gli oggetti hanno la stessa velocità.

b) C'è almeno un instante $t < t_1$ in cui entrambi gli oggetti hanno la stessa velocità.

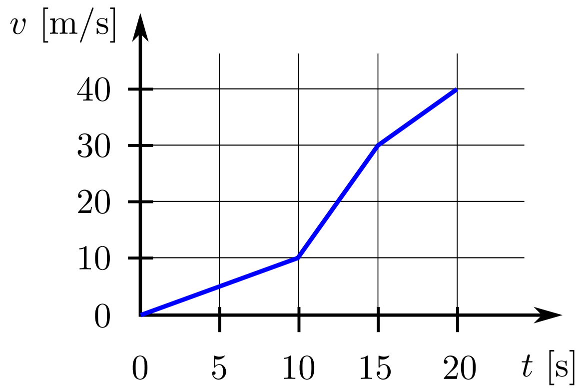
c) Entrambi gli oggetti accelerano tutto il tempo.

d) C'è un istante in cui entrambi gli oggetti hanno la stessa accelerazione.

e) Nessuna della risposte precedenti è corretta.

Domanda 2

Il grafico seguente mostra l'evoluzione della velocità di un auto in funzione del tempo.



Che distanza ha percorso l'auto tra $t = 10\,\mathrm{s}$ e $t = 20\,\mathrm{s}$?

a) 210 m

b) 250 m

c) 275 m

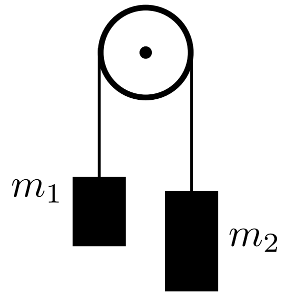
d) 300 m

e) 325 m

f) Nessuna delle risposte precedenti.

Domanda 3

Due masse $m_1 = 3\,\text{kg}$ e $m_2 = 7\,\text{kg}$ sono collegate tra loro tramite una corda che passa su una puleggia (vedi figura). Quando lasciamo libero il sistema, una massa accelera verso l'alto, e l'altra verso il basso. Chiamiamo F_1, resp. F_2, la forza che agisce sulla massa m_1, resp. m_2. Quando è il valore del rapporto F_1/F_2?



a) 3/10

b) 2/5

c) 4/3

d) 3/4

e) 3/7

f) 1

Domanda 4

Due masse m_1 e m_2, con $m_1 > m_2$, sono in caduta libera da un'altezza h. Quale massa ha più energia cinetica, quando raggiungono il pavimento? Si trascuri l'attrito dell'aria.

a) $E_1 > E_2$

b) $E_1 < E_2$

c) $E_1 = E_2$

d) Abbiamo bisogno più informazioni.

Domanda 5

Due biglie con massa M e m ($M \gg m$) sono soggette a una collisione elastica tra di loro. Prima della collisione la biglia M si muove con velocità v, invece la biglia m ha velocità $-v$. Dopo la collisione cos è approssimativamente la velocità della biglia m?

a) $v_m = -3v$

b) $v_m = -v$

c) $v_m = 0$

d) $v_m = v$

e) $v_m = 2v$

f) $v_m = 3v$

Domanda 6

La distanza tra la Terra e il Sole è solitamente espressa come 1 UA per 1 unità astronomica (ca 150 milioni di km). Sapendo che il pianeta Marte si trova ad una distanza 1.524 UA dal Sole, approssimativamente quanto ci mette Marte per effettuare una rotazione completa attorno al Sole?

a) 157 giorni

b) 483 giorni

c) 556 giorni

d) 686 giorni

e) 772 giorni

f) 1025 giorni

Domanda 7

Quanti capelli ha Donald Trump sulla sua testa? (se non conosci la persona, considera un normale essere umano)

a) 42
b) 10^3
c) 10^5
d) 10^7
e) 10^8

Domanda 8

Consideriamo una distanza d, un tempo t e una forza F. In che caso possiamo esprimere la quantità $d^\alpha \cdot t^\beta \cdot F^\gamma$ in Watt?

a) $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$
b) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$
c) $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 0$
d) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$
e) $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 1$
f) $\alpha = -1, \beta = -1, \gamma = 1$

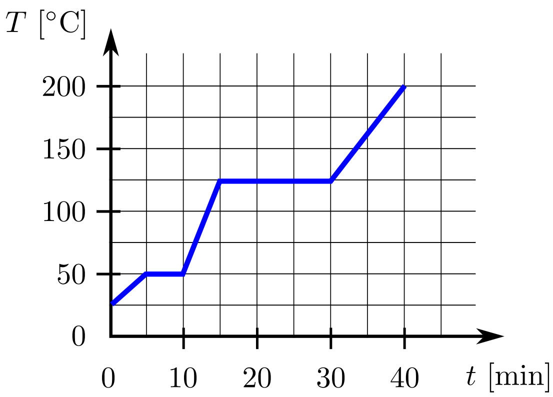
Domanda 9

Una scatola è chiusa e isolata. Al suo interno ci sono due compartimento, inizialmente separati da un piatto. Il primo compartimento contiene un gas ideale a temperatura T_1 e pressione p_1, mentre il secondo compartimento è vuoto. Si rimuove il piatto separatori tra i due compartimenti e si lascia evolvere il sistema. Cosa si può affermare a proposito della temperatura T_2 e la pressione p_2 finali del gas?

a) $T_2 < T_1$, $p_2 < p_1$
b) $T_2 < T_1$, $p_2 = p_1$
c) $T_2 > T_1$, $p_2 < p_1$
d) $T_2 > T_1$, $p_2 = p_1$
e) $T_2 = T_1$, $p_2 < p_1$
f) $T_2 = T_1$, $p_2 = p_1$

Domanda 10

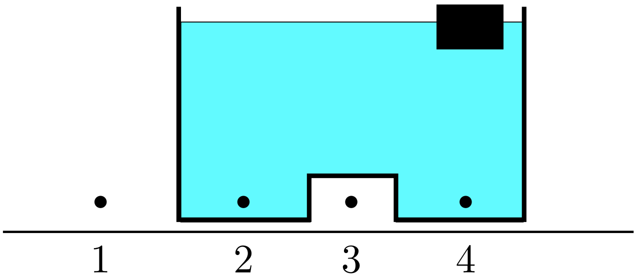
Un campione di massa 5 kg di una data sostanza è riscaldato con una sorgente che genera un calore costante di 41.9 kJ per minuto. Il grafico seguente rappresenta la temperatura in funzione del tempo. Quanto vale il calore latente di vaporizzazione della sostanza?



a) $12.6\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
b) $62.9\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
c) $126\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
d) $210\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
e) $629\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

Domanda 11

Si consideri un recipiente riempito di acqua e 4 diversi punti tutti alla stessa altezza:



Facciamo le seguenti affermazioni a proposito della pressione:

1. $p_1 = p_2$
2. $p_1 = p_3$
3. $p_2 = p_4$

Cosa si può dire a proposito di queste affermazioni?

a) Solo 1 è corrette

b) Solo 2 è corrette

c) Solo 3 è corrette

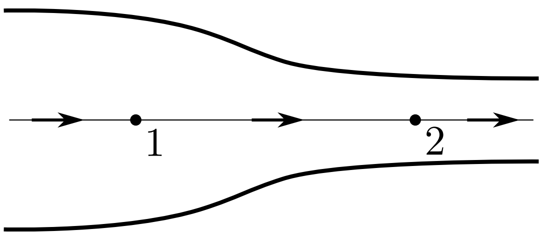
d) 1 e 2 sono corrette

e) 1 e 3 sono corrette

f) 2 e 3 sono corrette

Domanda 12

Un fluido omogeneo e incompressibile defluisce in modo stazionario dentro un tubo posizionato orizzontalmente, come mostrato nella figura seguente. Consideriamo due punti, 1 e 2, del fluido.



Quale della risposte descrive in modo corretto la relazione tra le velocità e le pressioni nei punti 1 e 2?

a) $v_1 > v_2$, $p_1 = p_2$

b) $v_1 > v_2$, $p_1 > p_2$

c) $v_1 < v_2$, $p_1 = p_2$

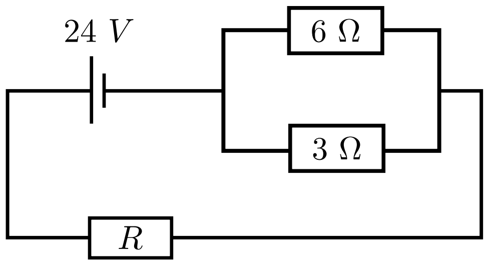
d) $v_1 < v_2$, $p_1 > p_2$

e) $v_1 = v_2$, $p_1 < p_2$

f) Nessuna delle risposte precedenti.

Domanda 13

Si consideri il circuito seguente:



La corrente totale nel circuito è 2 A. La resistenza interna della sorgente di tensione è trascurabile. La resistenza R quindi è:

a) $\frac{2}{3}\,\Omega$

b) $3\,\Omega$

c) $9\,\Omega$

d) $10\,\Omega$

e) $14\,\Omega$

Domanda 14

Un condensatore con capacità $4.0\,\mu$F è collegato in parallel con un secondo condensatore di capacità $2.0\,\mu$F. Applichiamo una tensione di 260 V nel circuito composta dai due condensatori. Quanto è l'energia totale immagazzinata nel sistema?

a) 0.1 J

b) 0.2 J

c) 0.04 J

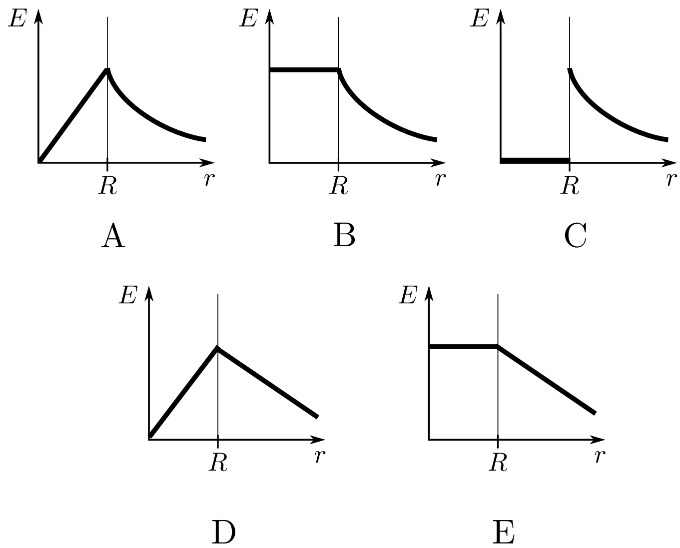
d) 0.05 J

e) 0.1 J

f) 0.9 J

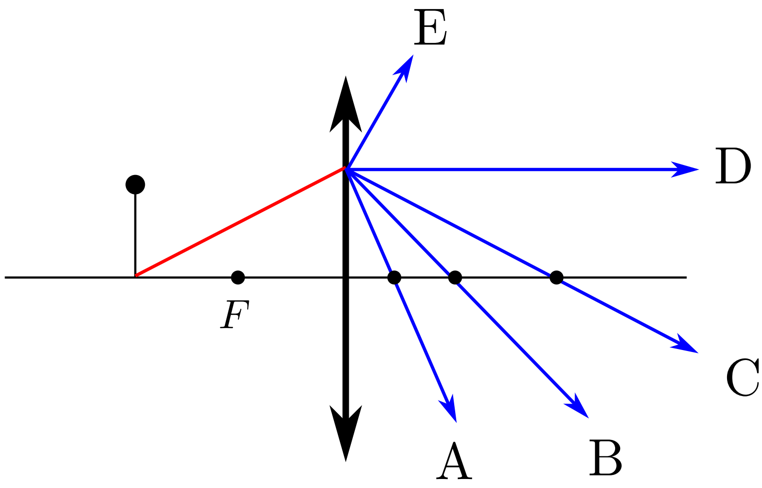
Domanda 15

Consideriamo una sfera vuota (ovvero una superficie sferica) di raggio R su cui è uniformemente distribuita una carica Q. Quale dei seguenti grafici rappresenta l'intensità del campo elettrico in funzione della distanza dal centro della sfera?



Domanda 16

Nell'immagine sequente consideriamo un oggetto e una lente convergente con un punto focale F. Un fascio di luce proveniente dall'oggetto è tracciato (in rosso). Quale dei cinque raggi rappresenta il percorso del fascio di luce dopo esser passato nella lente?



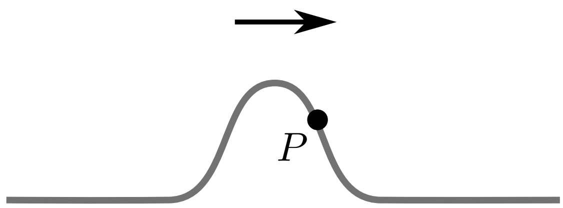
Domanda 17

In che fattore è aumentato l'angolo critico per la riflessione totale tra un prisma fatto di vetro Flint, se il prisma è contatto con l'acqua invece dell'aria? Gli indici di rifrazione sono $n_F = 1.6$ nel vetro Flint, $n_w = 1.3$ nell'acqua e $n_a = 1.0$ nell'aria.

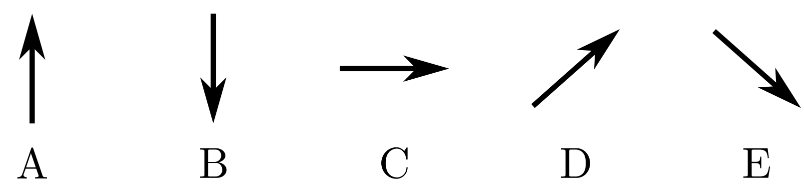
a) 0.7
b) 1.0
c) 1.2
d) 1.4
e) 1.6
f) 1.9

Domanda 18

Nella figura seguente si può vedere un impulso che di propaga verso destra in una fune. P è un punto sulla fune.



Quale tra i seguenti vettori indica la direzione e il senso in cui il punto P si sta attualmente muovendo?



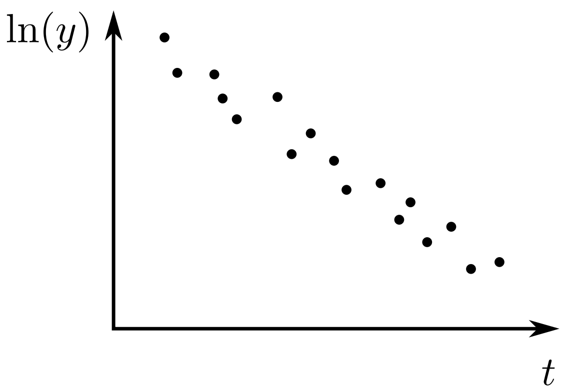
Domanda 19
Consideriamo due masse m collegate tra di loro da una molla con costante k. Il sistema ha un periodo di oscillazione di 50 fs. Quanto vale adesso il periodi di oscillazione se colleghiamo tra di loro due masse $2m$?

a) 100 fs
b) 71 fs
c) 50 fs
d) 35 fs
e) 25 fs
f) Nessuna delle risposte precedenti.

Domanda 20
Un elemento radioattivo ha un'attività iniziale A_0. Dopo 200 s la sua attività si è ridotta a $A_0/5$. Qual è il tempo di dimezzamento di questo elemento?

a) 6 s
b) 13 s
c) 28 s
d) 41 s
e) 86 s
f) 120 s

Domanda 21
Facciamo un esperimento per determinare l'evoluzione della quantità y con il tempo. I dati raccolti sono illustrati nel grafico seguente:



Quale funzione $y(t)$ si adatta meglio ai dati? (y_0 e α sono costanti reali)

a) $y = y_0 \cdot e^{-\alpha^2 t}$
b) $y = y_0 \cdot e^{\alpha^2 t}$
c) $y = y_0 - \alpha^2 t$
d) $y = y_0 + \alpha^2 t$
e) $y = \frac{y_0}{t}$
f) $y = -\frac{y_0}{t}$

Domanda 22
Dopo il 19 maggio 2019, secondo il Sistema Internazionale (SI), il chilogrammo sarà definito da:

a) una massa modella situata vicino a Parigi
b) la costante di Plank h
c) la costante di Boltzmann k_B
d) il numero di Avogadro N_A
e) la costante gravitazionale G
f) la massa dell'elettrone m_e

Problemi teorici

Durata : 120 minuti
Valutazione : 48 punti

Cominciate ogni problema su un nuovo foglio, al fine di facilitarne la correzione.

Esercizio 1 : Attrito *(16 punti)*

Consideriamo un piano inclinato con un asse delle coordinate xy come mostrato della Fig. 1. All'origine del sistema di coordinate, fissiamo una molla ideale di costante elastica $k = 30\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 30\,\mathrm{cm}$. Il piano è inclinato di $\alpha = 30\,°$ rispetto all'orizzontale. Un blocco di massa $m = 200\,\mathrm{g}$ viene lasciato libero da fermo sul piano inclinato e la sua posizione sarà data dalla coordinata x_A che inizialmente dista $70\,\mathrm{cm}$ dall'origine del piano inclinato.

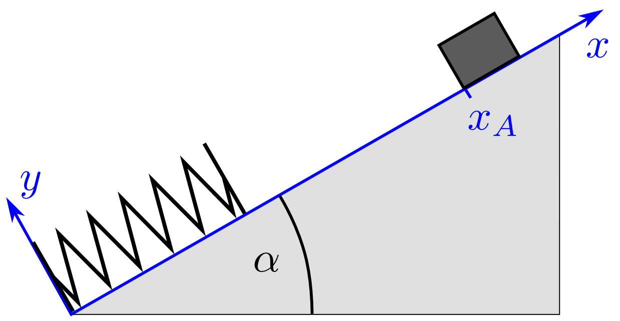


Fig. 1: Piano inclinato.

Parte A. Senza attrito (8 punti)

In questa prima fase trascuriamo l'attrito e lasciamo muovere liberamente il blocco.

i. (2.5 pt) Si esprima - scalarmente attraverso un'espressione - la forza risultante agente sul blocco, F_r, in funzione di x, sia quando il blocco è staccato dalla molla sia quando è a contatto con essa. Si determini in quale posizione x_0 la forza risultante è nulla. Si tracci un grafico di $F_r(x)$.

ii. (1 pt) Determina la posizione x_1 del blocco in cui esso raggiunge la sua massima velocità. Trova l'espressione per x_1 e calcolane il valore.

iii. (2 pt) Si determini l'energia potenziale e l'energia cinetica del blocco in funzione della posizione x.

iv. (2.5 pt) Determina la posizione x_2 in cui il blocco inverte il suo moto.

Parte B. Con attrito (8 punti)

D'ora in poi consideriamo anche l'attrito. Il coefficiente statico è $\mu_s = 0.56$ e quello dinamico è $\mu_d = 0.52$. Il blocco è piazzato nuovamente alla posizione originaria x_A e rilasciato da li.

i. (1 pt) Esprimi la condizione per cui il blocco rimane fermo e mostra che in questo problema il blocco si muoverà.

ii. (2.5 pt) Determina e calcola la posizione x_3 in cui il blocco inverte il suo moto.

iii. (1.5 pt) Trova l'espressione per l'energia meccanica $E(x)$ in funzione della posizione x nel moto del blocco da x_A a x_3.

iv. (1.5 pt) Determina e calcola la posizione x_4 in cui il blocco raggiunge la sua velocità massima.

v. (1.5 pt) Determina e calcola la posizione x_5 in cui il blocco smette di muoversi.

Riadattato dalle Olimpiadi Italiane della Fisica 2015.

Esercizio 2 : Motore elettrostatico *(16 punti)*

La maggior parte dei motori elettrici funziona con campi magnetici. Il motore elettrostatico (da ora in poi motore) è un'eccezione. Il motore consiste in due piatti quadrati e paralleli tra loro, posizionati ad una distanza d e di lunghezza s. Questi piatti vengono alimentati da un generatore di tensione di tensione elettrica U (Fig. 2). Al centro dei due piatti viene installato un asse girevole alla quale sono poste delle sbarre isolanti con delle piccole piastre quadrate alle estremità (assumiamo esse siano quattro). Queste piastre sono conduttori elettrici con un lato di dimensione $b \ll s$. A ogni piastra è collegato un filo conduttore di lunghezza a, con $a \ll d$ e $a \ll b$. La piastre e i fili sono costruiti in modo che possono toccare i piatti del motore nella parte superiore e inferiore, e possono quindi scambiare le cariche (le piastre non toccano mai i piatti, il contatto è fatto solo con tramite i fili). Per tutta la durata di questo esercizio assumiamo che le piastre siano già cariche.

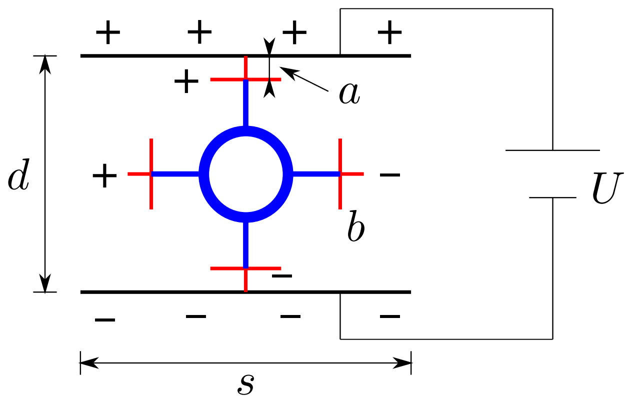


Fig. 2: Motore elettrostatico. L'asse girevole e le sbarre isolanti sono disegnate in blu. Le piastre e i fili conduttori sono in rosso.

Parte A. Calcoli riguardanti i piatti (2 punti)

Nella prima parte consideriamo i due piatti ed il generatore di tensione. L'asse e le piastre sono trascurabili.

i. (0.5 pt) Qual è il campo elettrico E esistente tra i piatti? ($d \ll s$)

ii. (1 pt) Quale carica Q si trova su di un piatto?

iii. (0.5 pt) Qual è la densità di carica σ sul piatto?

Parte B. Calcoli riguardanti le piccole piastre (7 punti)

Ora consideriamo la struttura completa. Si assuma che la carica sulle piccole piastre è così piccola che non ha nessuna influenza sulla distribuzione di carica sui piatti e sul campo elettrico tra di loro. Si assuma inoltre che l'asse rotante e le sbarre isolanti abbiamo una permettività elettrica $\epsilon = 1$ (ovvero non influenzano il campo elettrico).

i. (2.5 pt) Qual è la carica q di una piastra?

Nelle domande seguenti si supponga che la carica si distribuisca in modo omogeneo e identico sulle piccole piastre.

ii. (1.5 pt) Per ogni piastra indica la forza (il valore e la direzione) che agisce su di essa.

iii. (2.5 pt) Sia α l'angolo per cui l'asse è ruotato. Qual è il momento M in funzione di α?

iv. (0.5 pt) Il motore descritto in questa situazione inizia (Fig. 2) a muoversi? Se sì, in quale direzione? Se no, perché? Parole chiave come risposta bastano.

Parte C. Durante il movimento (7 punti)

Il motore si muove con un numero di giri costante f al minuto.

i. (1.5 pt) Qual è la corrente media I che scorre dal generatore di carica ai piatti?

ii. (1 pt) Qual è la potenza elettrica media P_{el}?

iii. (2 pt) Qual è la potenza meccanica media P_{me}?

iv. (2.5 pt) Determina la differenza di potenza $P_{el} - P_{me}$. Perché è diversa da 0?

Esercizio 3 : Motore a quattro tempi *(16 punti)*

Un motore a quattro tempi (o quattro cicli) è un tipo di motore sviluppato nella seconda metà del 19esimo secolo. È caratterizzato da 4 corse o passaggi: inizialmente, una valvola di entrata si apre e una miscela di aria e combustibile viene aspirata nel cilindro, spingendo un pistone verso il basso. Il pistone poi si alza nuovamente comprimendo il gas. In seguito, il gas viene acceso, brucia e si espande: il pistole viene spinto verso il basso e produce del lavoro meccanico che può venire usato, ad esempio, per muovere una macchina! Infine una valvola di uscita si apre e il pistone espelle il gas prodotto dalla combustione ritornando alla sua posizione iniziale. Durante l'intero processo, il pistone ha completato 4 movimenti (su-giù o giù-su), e questo da il nome a questo tipo di motore.

Ci sono diversi modi di avviare la combustione del gas nel terzo passaggio. In questo problema investigheremo due diversi processi termodinamici: il ciclo Otto (1876) e il ciclo Diesel (1893). Trascureremo però le fasi di entrata e di uscita del gas e inizieremo sempre il ciclo con un determinato volume di gas già presente nel cilindro.

Parte A. Un ciclo Otto ideale (7 punti)

Il ciclo Otto - il cui nome deriva dal nome dell'ingegnere tedesco Nikolaus Otto - è un ciclo termodinamico in cui il gas viene infiammato da una candela d'accensione. In questo problema è caratterizzato dalle seguenti quattro fasi:

1. Una compressione adiabatica di un volume iniziale di gas.
2. Un riscaldamento isocoro del gas, con l'aiuto di una candela d'accensione.
3. Un'espansione adiabatica del gas caldo.
4. Una fase isocora in cui il gas viene raffreddato. Questo conclude il ciclo.

i. (1.5 pt) Disegna uno schizzo qualitativo completo di un ciclo Otto tramite un grafico $p - V$.

Assumiamo ora che un sensore all'interno del cilindro permetta la misurazione della temperatura ad ogni passaggio.
ii. (3 pt) Determina il rendimento η_O del ciclo Otto in funzione delle temperature.

Definiamo ora il rapporto di compressione $r := \frac{V_1}{V_2}$, in cui V_1 e V_2 sono rispettivamente il volume iniziale e finale della compressione adiabatica. Definiamo inoltre $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.
iii. (2.5 pt) Esprimi η_O in funzione di r e γ.

Parte B. Un ciclo Diesel ideale (7 punti)

Il ciclo Diesel, nome derivato da un altro ingegnere tedesco, Rudolf Diesel, è a sua volta composto da quattro fasi, ma in questo caso la compressione adibatica del gas è sufficiente a causare una combustione spontanea, e non è quindi necessaria alcuna candela d'accensione. Le quattro fasi sono le seguenti:

1. Una compressione adiabatica del volume iniziale di gas.
2. Un riscaldamento isobaro del gas (grazie all' accensione spontanea).
3. Una espansione adiabatica del gas riscaldato.
4. Una fase isocora in cui il gas è raffreddato. Questo conclude il ciclo.

i. (1.5 pt) Disegna uno schizzo qualitativo completo di un ciclo Diesel tramite un grafico $p - V$.

Supponiamo nuovamente che la temperatura venga misurata ad ogni passaggio, e γ sia dato e definito come in precedenza.
ii. (3 pt) Determina il rendimento η_D del ciclo Diesel in funzione delle quantità conosciute.
Consiglio: $R = C_p - C_V$

In un ciclo Diesel, possiamo nuovamente definire il rapporto di compressione r come in precedenza, ma anche un cosiddetto rapporto di combustione $\alpha := \frac{V_3}{V_2}$, dove V_2 e V_3 sono il volume all'inizio/ alla fine del processo di riscaldamento (seconda fase).
iii. (2.5 pt) Esprimi l'efficienza η_D in funzione di r, α e γ.

Parte C. Alcuni paragoni (2 punti)

i. (0.75 pt) Supponiamo che il rapporto di compressione r sia fisso. Tra il ciclo Otto e il ciclo Diesel, quale ciclo è più efficiente? Considera i seguenti valori tipici: $r = 10$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1.4$. Se non sei riuscito a risolvere l'ultima domanda della parte **B.**, usa l'espressione (sbagliata)

$$\eta_D^* = 1 - \frac{\alpha^{\gamma-1}}{r^{\gamma-1}\gamma}.$$

(Nella realtà, r è diverso in entrambi i cicli, e vengono usati diversi tipi di carburante)

Consideriamo un motore Otto con un tipico rapporto di compressione $r = 10$; il gas è inizialmente a una temperatura di 30 °C e raggiunge una temperatura massima di 1700 °C. Inoltre usiamo $\gamma = 1.4$.

ii. (0.5 pt) Calcola l'efficienza di questo tipico motore Otto.

iii. (0.75 pt) Quale sarebbe il valore del rendimento del corrispondente ciclo Carnot? Cosa puoi dire quando compari questo valore con quello della precedente domanda? Il risultato ti sorprende?

Costanti fondamentali

Velocità della luce nel vuoto	c	=	$299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2\cdot s^4\cdot kg^{-1}\cdot m^{-3}}$
Costante di Planck	h	=	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$
Carica elementare	e	=	$1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A\cdot s}$
Costante gravitazionale	G	=	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
Accelerazione terrestre	g	=	$9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
Numero di Avogadro	N_A	=	$6.022\,141\,29(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Costante dei gas	R	=	$8.314\,459\,8(48)\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k_B	=	$1.380\,648\,8(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	=	$5.670\,373(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$
Massa dell'elettrone	m_e	=	$9.109\,382\,6(16) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massa del protone	m_p	=	$1.672\,621\,71(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Massa del neutrone	m_n	=	$1.674\,927\,28(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Multiple-choice : solution

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Question 1	□	■	□	□	□	
Question 2	□	□	■	□	□	□
Question 3	□	□	□	□	■	□
Question 4	■	□	□	□		
Question 5	□	□	□	□	□	■
Question 6	□	□	□	■	□	□
Question 7	□	□	■	□	□	
Question 8	■	□	□	□	□	□
Question 9	□	□	□	□	■	□
Question 10	□	□	■	□	□	
Question 11	□	□	□	□	□	■
Question 12	□	□	□	■	□	□
Question 13	□	□	□	■	□	
Question 14	□	■	□	□	□	□
Question 15	□	□	■	□	□	
Question 16	□	□	■	□	□	
Question 17	□	□	□	■	□	□
Question 18	■	□	□	□	□	
Question 19	□	■	□	□	□	□
Question 20	□	□	□	□	■	□
Question 21	■	□	□	□	□	□
Question 22	□	■	□	□	□	□

Theoretical Problems: solutions

Problem 1 : Friction: Solution *(16 points)*

Part A. Without friction (8 points)

i. (2.5 P) Find an expression for the resulting force F_r on the block as a function of x, its distance from the origin, both when it is in contact/not in contact with the spring. At which position x_0 is the force zero? Draw a graph of the force $F_r(x)$.

At any time, the weight $\vec{P}$ and the normal force $\vec{N}$ acts on the mass. On the x-axis, we only have the component of the weight $-mg\sin(\alpha)$ (on the y-axis, the vertical component of $\vec{P}$ exactly compensate $\vec{N}$). When the mass is in contact with the spring, we also have an elastic force $\vec{F_e}$ to consider: $-k(x-l_0)$. We thus have (on the x-axis):

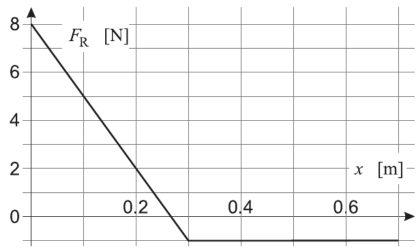
$$F_r(x) = \begin{cases} -mg\sin(\alpha) & \text{when } x \geq l_0 \\ -mg\sin(\alpha) - k(x-l_0) & \text{when } x < l_0 \end{cases}$$

The force is zero at the position $x = x_0$, where the weight is compensating the elastic force:

$$F_r(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -mg\sin(\alpha) = k(x_0 - l_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = l_0 - \frac{mg}{k}\sin(\alpha)$$

Numerically, one finds $x_0 = 26.73\,\text{cm}$.

The graph of $F_r(x)$ looks like the following:



If the labels are missing from the axes: **-0.1**.

ii. (1 pt) At which position x_1 does the block reach its maximal velocity? Find an expression for x_1 and calculate its value.

P_x and F_e have opposite directions. As long as P_x is greater than F_e, the velocity of the block increases. As soon as F_e takes over, the block slows down. The maximal velocity is thus reached for $P_x = F_e$, i.e. at $x_1 = x_0$.
0.5 for an explanation, 0.5 for the final answer.

iii. (2 P) Determine the potential energy as well as the kinetic energy of the block as a function of the position x.

Potential energy: weight at all time + elastic potential energy when the mass is in contact with the spring:

$$E_p(x) = \begin{cases} mgx\sin(\alpha) & \text{when } x \geq l_0 \\ mgx\sin(\alpha) + \frac{1}{2}k(l_0 - x)^2 & \text{when } x < l_0 \end{cases}$$

Since no dissipative force acts on the block (no friction here), the mechanical energy is conserved. We can for instance takes its value at the starting position of the block: $E_m = mgx_A \sin(\alpha)$. The kinetic energy is then found by substraction:

$$E_k(x) = E_m - E_p(x) = \begin{cases} mg(x_A - x)\sin(\alpha) & \text{when } x \geq l_0 \\ mg(x_A - x)\sin(\alpha) - \frac{1}{2}k(l_0 - x)^2 & \text{when } x < l_0 \end{cases}$$

iv. (2.5 P) Determine and calculate the position x_2 where the direction of motion of the block is inverted.

The point of inversion is given where the velocity is zero, which means where the kinetic energy vanishes.
In the case $x \geq l_0$, one has $x = x_A$, this is obviously the starting point. We thus look at the domain $x < l_0$:

$$\begin{aligned} mg(x_A - x)\sin(\alpha) &= \frac{1}{2}k(l_0 - x)^2 \\ x^2 + 2\left(\frac{mg}{k}\sin(\alpha) - l_0\right)x + \left(l_0^2 - \frac{2mg}{k}\sin(\alpha)\right) &= 0 \end{aligned}$$

and we thus find

$$x_1 = \left(\frac{mg}{k}\sin(\alpha) - l_0\right) \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\sin(\alpha) - l_0\right)^2 - \left(l_0^2 - \frac{2mg}{k}\sin(\alpha)\right)}$$

or any equivalent formulation. There are two solutions: $x_2 = 10.2\,\text{cm}$ and $x_2' = 43.2\,\text{cm}$, but only the first one is valid, since the second one is outside of the domain ($x_2' > l_0$).
They don't need to calculate the second solution if they can show that it is outside of the domain.

Part B. With friction (8 points)

i. (1 pt) Express a condition for the block to stay still and show that in this problem, the block will move.

The block stays still if

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_s} = \vec{0}$$

with $\vec{F}$ the static friction force. If we decompose this equation on the x and y axes:

$$\begin{cases} P_x + F_s &= 0 \\ P_y + N &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} F_s &= mg\sin(\alpha) \\ N &= mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

Upon dividing both equations and considering the extreme case $F_{s,\text{max}} = \mu_s N$, one finds the condition for not moving:

$$\tan(\alpha) = \frac{F_s}{N} \leq \frac{F_{s,\text{max}}}{N} = \mu_s \Rightarrow \tan(\alpha) \leq \mu_s$$

We have $\tan(30°) = 0.58$ and $\mu_s = 0.56$, which means that the block will move.

ii. (2.5 P) Determine and calculate the position x_3 where the direction of motion of the block is inverted.

Since we have friction, the variation of the mechanical energy is no more zero, but equals the work of the non-conservative forces:

$$\Delta E_m = W(F_{\text{nc}})$$

Left-hand side: let's consider the variation between the starting point and the point of inversion x. At both position, the velocity - and thus the kinetic energy - is zero. We thus have

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k = \Delta E_p = mg\sin(\alpha)(x - x_A) + \frac{1}{2}k(l_0 - x)^2.$$

Right-hand side: the friction force is constant and parallel to the x-axis, we can thus easily write down its work (there is an angle π between the force and the direction vector, hence the minus sign in the scalar product):

$$W(F_d) = \vec{F}_d \bullet \vec{d} = -F_d\,|x - x_A| = \mu_d N(x - x_A) = \mu_d mg\cos(\alpha)(x - x_A)$$

Equating both sides of the energy equation and solving for x gives:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}kx^2 + (-kl_0 + mg\sin(\alpha) - \mu_d mg\cos(\alpha))\,x + \left(\frac{1}{2}kl_0^2 - mg\sin(\alpha)x_A + \mu_d mg\cos(\alpha)x_A\right) &= 0 \\
x^2 + \left(-2l_0 + 2\,\underbrace{\frac{mg}{k}(\sin(\alpha) - \mu_d\cos(\alpha)}_{:=B}\right)x + \left(l_0^2 - 2\frac{mg}{k}x_A(\sin(\alpha) - \mu_d\cos(\alpha))\right) &= 0 \\
x^2 + 2(B - l_0)x + (l_0^2 - 2Bx_A) &= 0
\end{aligned}$$

The solution is given by:

$$x_3 = (l_0 - B) \pm \sqrt{(B - l_0)^2 - (l_0^2 - 2Bx_A)}$$

Or any equivalent form. There are two solutions: $x_3 = 24.6\,\text{cm}$ and $x_3' = 34.8\,\text{cm}$, but only the first one is valid, since the second one is larger than l_0.

They don't need to calculate the second solution if they can show that it is outside of the domain. They could also notice that the expression is the same as in the previous part, but we replace the weight P_x by $P_x + F_d$.

iii. (1.5 P) Find an expression for the mechanical energy $E(x)$ as a function of the position x between x_A and x_3.

From the previous part, we have

$$\Delta E(x) = W(F_d)(x) \quad \Leftrightarrow \quad E(x) - E(x_A) = \mu_d mg\cos(\alpha)(x - x_A)$$

and thus

$$E(x) = E(x_A) + \mu_d mg\cos(\alpha)(x - x_A) = mg(\sin(\alpha)x_A + \mu_d\cos(\alpha)(x - x_A))$$

or any equivalent form. The mechanical energy is thus linear in x.

iv. (1.5 P) Determine and calculate the position x_4 where the block reaches its maximal velocity.

When the mass is falling and in contact with the spring, P_x has the opposite direction of F_e and F_d (both directed upwards). As previously, the maximal velocity is reached when the P_x is compensated by the two other forces:

$$\begin{aligned} mg\sin(\alpha) &= k(l_0 - x) + \mu_d mg\cos(\alpha) \\ x_4 &= l_0 + \frac{mg}{k}(\mu_d\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

Numerically: $x_4 = 29.7\,\text{cm}$.

v. (1.5 P) Determine and calculate the position x_5 where the block will stop moving.

We have seen that in x_3, the velocity of the block is zero. We thus want to see if, at the position, the block is going to move again or not. The condition for the equilibrium is given by:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e + \vec{F}_s = \vec{0}$$

or on the axes:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P_x + F_e + F_s &=& 0 \\ P_y + N &=& 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} mg\sin(\alpha) = F_s + k(l_0 - x_3) \\ mg\cos(\alpha) = N \end{array} \right.$$

The first equation gives us a condition of the friction force: $F_s = mg\sin(\alpha) - k(l_0 - x_3) = -0.65\,\text{N}$. The sign indicates that the static friction is oriented downwards. This is logical since the block is at the position $x_3 < x_0$, where the weight is smaller than the elastic force, the friction must therefore compensate in order for the block to be at rest.

We however need to compare this value to the maximal friction force:

$$F_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos(\alpha) = 0.951\,\text{N}$$

Since $|F_s| < F_{s,\max}$, the force maintains the equilibrium and the block does not move again once in x_3, we thus have

$$x_5 = x_3$$

Problem 2 : Elektrostatischer Motor *(16 points)*

Part A. Berechnungen zu den Platten (2 points)

i. (0.5 P) Wie gross ist das elektrische Feld E zwischen den Platten? ($d \ll s$) ?
The electric field is $E = \frac{U}{d}$. The assumption $d \ll s$ allows us to assume a homogeneous field between the plates.

ii. (1 pt) Welche Ladung Q befindet sich auf einer Platte?
The capacity of a plate capacitor is given by $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ with $A = s^2$.
The charge is therefore $Q = UC$.
or in terms of the known variables $Q = U\frac{\epsilon_0 s^2}{d}$

iii. (0.5 P) Wie gross ist die Flächenladungsdichte σ auf den Platten?
The charge density is $\sigma = \frac{Q}{s^2} = \frac{U\epsilon_0}{d}$.
If not simplified, and only $\sigma = \frac{Q}{s^2}$, less points.

Part B. Berechnungen zu den Plättchen (7 points)

i. (2.5 P) Wie gross ist die Ladung q auf einem Plättchen?
We look at the case where a small plate is connected (by the small wire) with a big plate (like the situation drawn). Using the same assumptions as for the plate capacitor ($a \ll b$) and that the small and big plate are connected, we can assume that there is no electric field between the small plate and the connected big plate.
Since $a \ll d$ and $b \ll s$ we can assume that the electric field is still homogeneous and has nowhere a horizontal component. We therefore have the same charge density on the small plate as on the big plate. (Maybe the students don't write this explicitly, then simply give these points for the correct answer)
The charge is therefore $q = \sigma b^2 = \frac{\epsilon_0 U}{d} b^2$.

ii. (1.5 P) Gib für jedes Plättchen die elektrische Kraft (Betrag, Richtung) an.
Since the electric field is homogeneous and the absolute value of the charge of each small plate is the same, the absolute value of the force on each small plate is also the same and given by $F = Eq = \frac{\epsilon_0 U^2 b^2}{d^2}$.
Note: the force of the positive charged small plate is pointing downwards, the one of the negative charged is pointing upwards.

iii. (2.5 P) Sei α der Winkel, um den sich die Achse gedreht hat. Wie gross ist das Drehmoment M in Abhängigkeit des Winkels α?
The torque is $M = Fr_\perp$ where $r_\perp$ is the mean distance perpendicular to the force of the small plate to the axis.
For the mean distance we can simply take the distance of the centre of the small plate to the axis which is $r_\perp = (\frac{d}{2} - a)\sin(\phi)$ where ϕ is the angle between the rod holding the small plates and the vertical field lines.
If the motor is turned by an angle α, two small plates have $\sin(\phi) = |\sin(\alpha)|$ where we used the absolute value because the torque of all four small plates points in the same direction.
For the other two small plates we have $\sin(\phi) = |\sin(\alpha + 90°)| = |\cos(\alpha)|$.
We then get a total torque of $M = 2F(\frac{d}{2} - a)(|\sin(\alpha)| + |\cos(\alpha)|)$.

iv. (0.5 P) Läuft der Motor in der skizzierten Situation an? Wenn ja - in welche Richtung? Wenn nein - warum nicht? Stichworte als Antwort genügen.
It rotates in anticlockwise direction.

Part C. In Bewegung (7 points)

i. (1.5 P) Wie gross ist der mittlere Strom I , der von der Spannungsquelle auf die Platten fliesst?

Each time the motor fulfils an entire rotation (360°), a charge of $8q$ is transported from the upper to the lower plate and from the lower to the upper plate (note: each small plate transports the charge q from the upper to the lower plate and $-q$ from the lower to the upper, therefore $2q$ in total).

To get SI units (Ampère) one has to divide f be 60 s/min. As long as the students use the correct units this is not necessary (without factor 60 s/min the current is charge per minute and the Power will be Joule per minute). Punishment of $-0.5Pt$ if they write down wrong units. In the following we will use SI units and associate $f/60$ by the unit per second.

Therefore each second a charge of $8q\frac{f}{60}$ flows. This is then the current $I = 8q\frac{f}{60} = 8\epsilon_0\frac{Ub^2f}{60d} = 2\epsilon_0\frac{Ub^2f}{15d}$.

ii. (1 pt) Wie gross ist die mittlere elektrische Leistung P_{el}?

$P_{el} = UI$

Simplified this is $P = 2\epsilon_0\frac{U^2b^2f}{15d}$ (They will need to insert the given variables sooner or later to compare it to the mechanical power, if they simplify it there this point can be given here too).

iii. (2 P) Wie gross ist die mittlere mechanische Leistung P_{me}?

The mechanical power is $P_{me} = Fv = M\omega$

where v is the velocity of the small plates and $\omega = \frac{2\pi f}{60}$ is the angular frequency.

To get the mean torque we have to take the mean value of $|\sin(\alpha)| + |\cos(\alpha)|$ over a $\frac{\pi}{2}$ rotation (here calculation in radian), which is

$$\overline{|\sin(\alpha)| + |\cos(\alpha)|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha) + \cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}2 = \frac{4}{\pi}$$

We then get $P_{me} = \epsilon_0\frac{U^2b^2}{d^2}\cdot\frac{4}{\pi}2(\frac{d}{2}-a)\cdot\frac{2\pi f}{60} = 4\epsilon_0\frac{U^2b^2f}{15d^2}(\frac{d}{2}-a) = P_{el} - 4\epsilon_0\frac{U^2b^2af}{15d^2}$ (Here again if they insert the variables in the next task give the point also here. They need $4\epsilon_0\frac{U^2b^2af}{15d^2}$ for the next task).

iv. (2.5 P) Bestimme die Leistungsdifferenz $P_{el} - P_{me}$. Warum weicht diese von 0 ab?

This is obviously related to the non zero length of the wire a.

When charging, the charge passes this difference a as a current (on conducting material) without doing any work. This happens twice, on the upper and on the lower plate.

When the small plates get charged, a current flows and therefore there is a magnetic field. This magnetic field allows to consider two different cases for the power loss (how these two cases contribute to the total missing power depends on different parameters and on the considered model.):

1. When the current charging the small plates gets smaller the magnetic field gets smaller too. Due to induction and Lorentz law, this causes a force on the charge which opposes the change of the magnetic field and causes an additional current. We then have an oscillator, consisting of the small an big plate as capacitor and the wire as inductor. (A part of) The missing energy is stored in the magnetic field and given away somewhere else (for example electromagnetic wave, resistivity (here a very small resistivity might already have a big impact because the current flows for a longer time due to oscillation) or when the charge is flowing on the other plate).

2. We have a time dependent magnetic field which causes an electromagnetic wave. The missing energy is then dissipated by the wave.

Additionally the following answers are generally not wrong but not part of the model we used here (so less points):

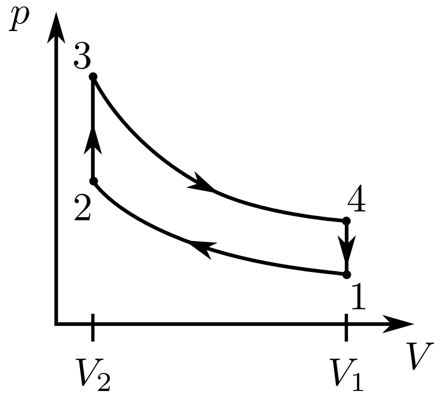
- The plates (small and big) have a resistivity.
- When the small plates moves around the axis, it gets accelerated and therefore emits electromagnetic waves.
- There is friction between the big and small plates.

In total maximal 2.5P possible (so if one gives the correct answer but also some of the three last ones, on only gets 2.5P instead of 3.25P)

Problem 3 : Four-stroke engine: Solution *(16 points)*

Part A. An ideal Otto cycle (7 points)

i. (1.5 P) Make a complete qualitative sketch of an Otto cycle in a $p-V$ diagramme.



Required:

- 4 correct branches (2 adiabatic and 2 isochor)
- axes labels
- direction of the cycle
- states indicated, or at least where the cycle starts (numbers, labels, ...)

ii. (3 P) Determine the efficiency η_O of the Otto cycle as a function of the temperatures.

The efficiency is defined as the ratio between the total work done by the system and the total heat given to the system:

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}^{\nearrow}}{Q_{\text{tot}}^{\swarrow}}$$

There are no heat exchange during the adiabatic processes, and no work done during the isochoric phases, hence:

$$\eta = \frac{W_{12}^{\nearrow} + W_{23}^{\nearrow} + W_{34}^{\nearrow} + W_{41}^{\nearrow}}{Q_{23}^{\swarrow}} = \frac{W_{12}^{\nearrow} + W_{34}^{\nearrow}}{Q_{23}^{\swarrow}} = \frac{-W_{12}^{\swarrow} + W_{34}^{\nearrow}}{Q_{23}^{\swarrow}}$$

This greatly simplifies the calculation since we only need to compare the heat or work with the internal energy:
Heat:

$$Q_{23}^{\swarrow} = U_{23} = \int_{T_2}^{T_3} nC_V \, dT = nC_V(T_3 - T_2)$$

Work:

$$\begin{aligned} W_{12}^{\swarrow} &= U_{12} = nC_V \Delta T = nC_V(T_2 - T_1) \\ W_{34}^{\nearrow} &= -W_{34}^{\swarrow} = -nC_V(T_4 - T_3) \end{aligned}$$

We thus have:

$$\begin{aligned}\eta_O &= \frac{-nC_V(T_2-T_1)+(-nC_V(T_4-T_3))}{nC_V(T_3-T_2)} \\ &= \frac{T_3-T_2+T_1-T_4}{T_3-T_2} \\ &= 1-\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}\end{aligned}$$

iii. (2.5 P) Express η_O as a function of r and γ.

We know that $r=\frac{V_1}{V_2}$ and $\gamma=\frac{C_p}{C_V}$. For the two adiabatic processes, we can write:

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma \quad \text{and} \quad p_3V_3^\gamma = p_4V_4^\gamma \sim p_3V_2^\gamma = p_4V_1^\gamma$$

since $V_2 = V_3$ and $V_4 = V_1$. Using the ideal gas law, one can replace the pressure by the temperature to get:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \quad \text{and} \quad T_3V_2^{\gamma-1} = T_4V_1^{\gamma-1}$$

Substracting both equations reads

$$\begin{aligned}(T_4-T_1)V_1^{\gamma-1} &= (T_3-T_2)V_2^{\gamma-1} \\ T_4-T_1 &= (T_3-T_2)\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \\ &= (T_3-T_2)\frac{1}{r^{\gamma-1}}\end{aligned}$$

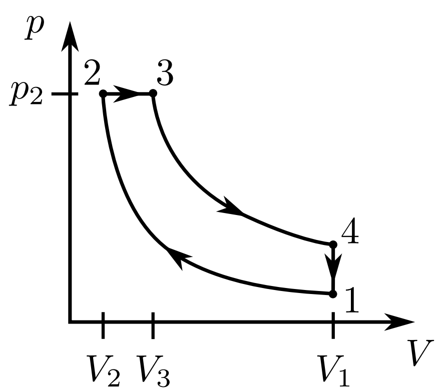
which allows to rewrite the efficiency:

$$\eta_O = 1-\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2} = 1-\frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

There are several variants, one can e.g. simply substitute T_2 and T_3 in the efficency using the two adiabatic equations, the final result is identical.

Part B. An ideal Diesel cycle (7 points)

i. (1.5 P) Make a complete qualitative sketch of a Diesel cycle in a $p-V$ diagramme.



Required:

- 4 correct branches (2 adiabatic, 1 isobar, 1 isochor)

- axes labels
- direction of the cycle
- states indicated, or at least where the cycle starts (numbers, labels, ...)

ii. (3 P) Determine the efficiency η_D of the Diesel cycle as a function of known quantities.
Hint: $R = C_p - C_V$

The efficiency, with the same definition as before, can be written as:

$$\eta = \frac{W_{12}^{\nearrow} + W_{23}^{\nearrow} + W_{34}^{\nearrow} + W_{41}^{\nearrow}}{Q_{23}^{\swarrow}} = \frac{-W_{12}^{\swarrow} + W_{23}^{\nearrow} + W_{34}^{\nearrow}}{Q_{23}^{\swarrow}}$$

This time, the second phase is an isobaric process, there is therefore some work involved. As previously, we will write the work and heat as a function of the temperatures (parameters we can measure).

Heat: we can rederivate the heat for an isobaric process, since work is also involved this time

$$\begin{aligned}
Q_{23}^{\swarrow} &= \Delta U_{23} - W_{23}^{\swarrow} \\
&= nC_V \Delta T - (-\int_{V_2}^{V_3} p dV) \\
&= nC_V \Delta T + p\Delta V \\
&= nC_V \Delta T + nR\Delta T \\
&= n(R + C_V)\Delta T \\
&= nC_p(T_3 - T_2)
\end{aligned}$$

where we used the ideal gas law in the 3rd step and the hint $R = C_p - C_V$ in the last step.

Work:

$$\begin{aligned}
W_{12}^{\swarrow} &= U_{12} = nC_V \Delta T = nC_V(T_2 - T_1) \\
W_{23}^{\nearrow} &= -W_{23}^{\swarrow} = +\int_{V_2}^{V_3} p_2 \, dV = +p_2(V_3 - V_2) = +nR(T_3 - T_2) \\
W_{34}^{\nearrow} &= -W_{34}^{\swarrow} = -nC_V(T_4 - T_3)
\end{aligned}$$

Inserting all the expressions into the efficency, one gets:

$$\begin{aligned}
\eta_D &= \frac{-nC_V(T_2 - T_1) + nR(T_3 - T_2) + (-nC_V(T_4 - T_3))}{nC_p(T_3 - T_2)} \\
&= \frac{-C_V(T_2 - T_1) + (C_p - C_V)(T_3 - T_2) - C_V(T_4 - T_3)}{C_p(T_3 - T_2)} \\
&= \frac{C_p(T_3 - T_2) - C_V(T_2 - T_1 + T_3 - T_2 + T_4 - T_3)}{C_p(T_3 - T_2)} \\
&= 1 - \frac{C_V(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)} \\
&= 1 - \frac{T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T_2)}
\end{aligned}$$

In the first step, we applied again the hint. η_D now only depends on known parameters.

iii. (2.5 P) Express the efficiency η_D as a function of r, α and γ.

We know that $r = \frac{V_1}{V_2}$ and $\alpha = \frac{V_3}{V_2}$. First, we notice that α can also be written as a function of the temperatures. Since 23 is an isobaric process, $\frac{V}{T}$ is constant, and thus

$$\alpha = \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

For the isobaric process, since $p_2 = p_3$ =constant, we can write

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = \alpha T_2$$

For the two adiabatic processes, we have ($V_4 = V_1$, but this time $V_2 \neq V_3$):

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{and} \quad T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$$

The first equation leads to

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 r^{\gamma-1}$$

This also allows us to rewrite the previous T_3 as a function of T_1:

$$T_3 = \alpha T_2 = T_1 \alpha r^{\gamma-1}$$

When dividing both adiabatic equations, one gets:

$$\begin{aligned}
\frac{T_4 V_1^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} &= \frac{T_3 V_3^{\gamma-1}}{T_2 V_2^{\gamma-1}} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} \\
T_4 &= T_1 \cdot \alpha \cdot \alpha^{\gamma-1} = \alpha^\gamma T_1
\end{aligned}$$

Plugging everything into the efficiency:

$$\begin{aligned}
\eta_D &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T_2)} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha^\gamma T_1 - T_1}{T_1 \alpha r^{\gamma-1} - T_1 r^{\gamma-1}} \\
&= 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\alpha^\gamma - 1}{\gamma(\alpha - 1)}\right)
\end{aligned}$$

This form is quite similar to the Otto efficiency, up to a new factor involving the cut-off ratio α and the adiabatic coefficient γ.

Part C. Some comparisons (2 points)

i. (0.75 P) Suppose that the compression ratio r is fixed. Between Otto and Diesel, which cycle would be more efficient? You can consider the typical values: $r = 10$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1.4$. If you were not able to solve the last question of the Diesel part, use the (wrong) expression

$$\eta_D^* = 1 - \frac{\alpha^{\gamma-1}}{r^{\gamma-1}\gamma}.$$

(In reality, r is different for both cycles, and they don't use the same type of fuel.)

$$\begin{aligned}
\eta_O &= 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \\
\eta_D &= 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\alpha^\gamma - 1}{\gamma(\alpha - 1)} \right) \\
\eta_D^* &= 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\alpha^{\gamma-1}}{\gamma} \right) \qquad \text{(wrong)}
\end{aligned}$$

With $r = 10$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1.4$, we find:

$$\begin{aligned}
\eta_O &= 60\% \\
\eta_D &= 53\% \\
\eta_D^* &= 62\% \text{ (wrong)}
\end{aligned}$$

With the correct formula: Otto more efficient.
With the wrong formula: Diesel more efficient.

In reality, Diesel is more efficient because a higher compression ratio is achievable (if r is to large in an Otto engine, it will lead to an auto-ignition, which is not wished).

ii. (0.5 P) Calculate the efficiency for this typical Otto engine.

Already calculated in the previous question: $\eta_O = 60\%$

iii. (0.75 P) What would be the value of the corresponding Carnot efficiency? What can you say when you compare this value to the one from the previous question? Are you suprised by the result?

The Carnot efficiency is given by

$$\begin{aligned}
\eta_C &= 1 - \frac{T_{\text{low}}}{T_{\text{high}}} \\
&= 1 - \frac{303\,\text{K}}{1973\,\text{K}} \approx 85\%
\end{aligned}$$

The Carnot is of course higher, since it corresponds to the most efficient thermodynamical process.