



**PHYSICS.
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Tour final

9 - 10 mars 2024

Partie 1 : 3 problèmes longs

Durée : 150 minutes

Total : 48 points (3×16)

Moyens autorisés : Calculatrice simple

Matériel pour écrire et dessiner

Bonne chance !

Supported by :



Constantes fondamentales

Fréquence hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse d'un rayonnement	K_{cd}	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Constante magnétique	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Constante des gaz	R	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Problèmes longs

Durée : 150 minutes

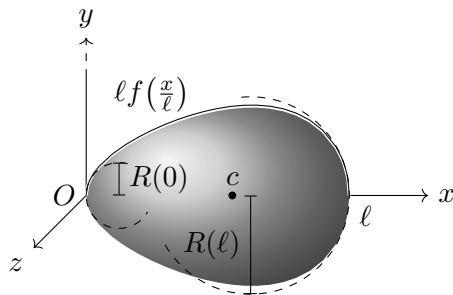
Cotation : 48 points (3×16)

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.

Problème long 1.1 : Stabilité d'un œuf en rotation (16 points)

On considère un œuf représenté par un solide de révolution homogène de profil $f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t} - t^4$ sur le domaine $t \in [a = 0, b = 1]$. Pour transformer ce profil en unités physiques, on applique un facteur de longueur ℓ . L'œuf a une masse volumique ρ . Le centre de masse de l'œuf se trouve en $x = c = \frac{5}{9}\ell$.



Partie A. Mise en bouche (0.5 point)

i. (0.5 pt) Calculez le volume V de l'œuf.

Partie B. Moment d'inertie (8.5 points)

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe A est donné par

$$I_A = \iiint_V \rho D_A^2(x, y, z) dV,$$

où $D_A(x, y, z)$ est la distance (perpendiculaire) du point (x, y, z) à l'axe A .

i. (1.75 pt) Pour une boule homogène de mêmes masse volumique ρ et volume V que l'œuf, déterminez le moment d'inertie selon un axe passant par son centre. Pour ce faire, vous pouvez décomposer la boule en un ensemble d'anneaux de rayons $0 \leq s \leq r$, d'épaisseur ds et de largeur dx , où r est le rayon de la boule. L'intégrale devient alors

$$I_B = 2\pi\rho \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} s^3 ds dx.$$

Calculer une telle intégrale multiple revient à évaluer d'abord l'intégrale intérieure (sur ds) en gardant x constant, puis l'intégrale extérieure sur dx . Le résultat doit être de la forme

$$I_B = k\pi\rho\ell^5,$$

où k est un facteur sans dimension.

ii. (2.5 pt) Déterminez le moment d'inertie I_{cx} de l'œuf selon l'axe x passant par le centre de masse c en vous inspirant du calcul pour la boule ci-dessus.

iii. (2 pt) Déterminez le moment d'inertie I_{Oz} de l'œuf selon l'axe z passant par l'origine O . Cette fois-ci il n'y a pas de symétrie de révolution autour de l'axe et nous ne pouvons pas considérer le rayon s . À la place, l'intégrale peut être résolue en coordonnées cartésiennes, sous la forme

$$I_{Oz} = \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \rho (x^2 + y^2) dz dy dx.$$

Vous pouvez utiliser sans preuve que

$$\int_{-|w|}^{|w|} (v^2 + x^2) \sqrt{w^2 - x^2} dx = \frac{1}{8}\pi w^2 (4v^2 + w^2).$$

iv. (1 pt) Déduisez le moment d'inertie I_{cz} de l'œuf selon l'axe z passant par le centre de masse c .

v. (0.5 pt) Quelle est la valeur de I_{cy} ? Justifiez.

vi. (0.75 pt) Vérifiez que

$$I_{cx} < I_B < I_{cz} < I_{Oz}$$

et justifiez pourquoi.

I_{cx} , I_{cy} et I_{cz} sont des éléments de ce qui est appelé le *tenseur d'inertie* du solide, qui généralise le

moment d'inertie aux cas où le solide ne possède pas de symétrie de révolution autour de son axe de rotation.

En particulier, si un solide de révolution tourne autour d'un axe passant par son centre de masse et incliné d'un angle θ par rapport à son axe de symétrie, alors son moment d'inertie selon l'axe de rotation sera

$$I = I_{\parallel} \cos^2(\theta) + I_{\perp} \sin^2(\theta),$$

où I_{\parallel} est le moment d'inertie selon l'axe de symétrie et I_{\perp} le moment d'inertie selon un axe qui lui est perpendiculaire et passe par le centre de masse.

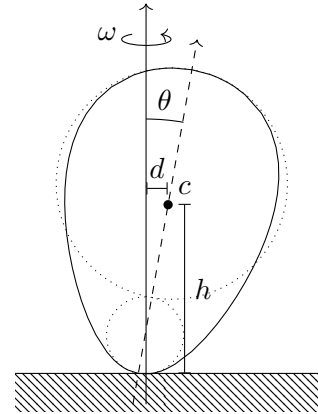
Partie C. Stabilité de l'œuf en rotation (7 points)

En tout point d'une courbe $g(x)$ suffisamment régulière, on peut définir un *cercle osculateur*, qui est le cercle qui approxime le mieux la courbe en ce point. Son rayon est appelé *rayon de courbure* de la courbe au point donné, et vaut

$$R(x) = \frac{\left(1 + \left(\frac{dg}{dx}(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2g}{dx^2}(x)\right|}.$$

Pour le profil $\ell f\left(\frac{x}{\ell}\right)$ de l'œuf, on obtient $R(0) = \frac{1}{8}\ell$ et $R(\ell) = \frac{3}{8}\ell$.

On fait tourner l'œuf sur sa pointe et on souhaite déterminer la vitesse angulaire ω minimale requise pour qu'il ne se couche pas. Pour ce faire, on considère l'œuf penché selon un angle $\theta \ll 1$ par rapport à la verticale, en rotation autour de l'axe vertical passant par son point de contact avec le sol.



i. (1.5 pt) Déterminez la hauteur $h(\theta)$ du centre de masse et sa distance $d(\theta)$ à l'axe de rotation. L'angle θ est petit et vous pouvez donc approximer la courbure de la pointe de l'œuf par celle de son cercle osculateur.

ii. (2.5 pt) Déterminez l'énergie mécanique totale de l'œuf $E(\theta)$, toujours en supposant que l'angle est petit.

iii. (2.5 pt) Déduisez la condition sur ω pour que l'œuf soit stable en rotation sur sa pointe. Que remarquez-vous ?

iv. (0.5 pt) Calculez la valeur numérique correspondante pour ω en prenant $\ell = 6$ cm et la masse de l'œuf $m = 60$ g. Calculez également la valeur numérique de la fréquence de rotation ν .

Problème long 1.2: Bateau à vapeur (16 points)

Il y a quelques années, dans le cadre d'une sortie, un groupe d'étudiant·e·s et de bénévoles a fait un voyage en bateau sur le lac des Quatre-Cantons. Par chance, le groupe a pu faire le voyage sur un bateau à vapeur où, à côté de la grosse machine à vapeur, se trouvait une fiche technique. Inspiré·e·s par cette expérience, nous allons étudier la machine à vapeur et réfléchir à sa conception. Un tel moteur est esquissé dans la figure 1.

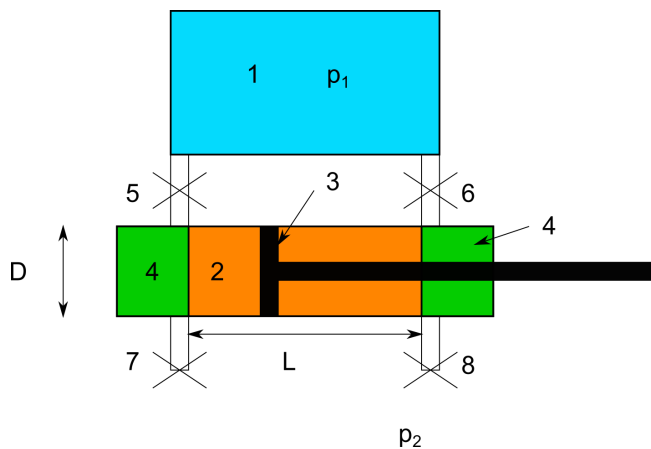


Figure 1 : Schéma d'une machine à vapeur. 1 : Réservoir de vapeur (bleu) à pression constante p_1 . 2 : Cylindre (diamètre D , régions vertes et orange) où le piston (3) se déplace dans la région orange sur la distance L . 4 : Volume minimal V_0 (chaque région verte) qui reste lorsque le piston se trouve à l'extrémité correspondante du cylindre. 5 et 6 : Vannes permettant de contrôler le flux de vapeur du réservoir (1) dans le cylindre. 7 et 8 : Vannes permettant de contrôler le flux de vapeur du cylindre vers l'extérieur, où règne la pression p_2 .

Partie A. Puissance (16 points)

Quelques informations supplémentaires sur la machine à vapeur : elle se compose d'un cylindre de diamètre $D = 800$ mm où une pression de vapeur $p_1 = 13$ bar (pression absolue) est utilisée. Le piston glisse dans le cylindre sur une distance

$L = 1300$ mm. Le moteur effectue 48 cycles complets par minute.

i. (6 pt) Supposons que lorsque le piston se déplace de gauche à droite, les vannes 5 et 8 sont ouvertes en permanence (6 et 7 fermées). Les vannes changent immédiatement d'état lorsque le piston atteint l'extrémité droite et commence à se déplacer vers la gauche (les vannes changent à nouveau immédiatement d'état lorsque le piston change une nouvelle fois de direction à l'extrémité gauche). Estimez la puissance de la machine à vapeur en fonction des variables données et calculez la valeur numérique correspondante. Si nécessaire, faites des hypothèses, justifiez-les et documentez-les.

ii. (7 pt) Le contrôle des vannes décrit dans la question précédente est plutôt inefficace. En effet, lorsque les vannes commutent, elles libèrent l'énergie stockée dans la vapeur sous haute pression p_1 dans l'environnement (à pression p_2). Pour optimiser l'efficacité, nous changeons maintenant le contrôle des vannes : lorsque le piston est au point le plus à gauche, la vanne 5 s'ouvre rapidement, remplissant le volume gauche 4 de vapeur à pression p_1 . La vanne 5 se referme ensuite et reste fermée pendant le reste du cycle. Pendant le déplacement du piston vers la droite, la vanne 8 est ouverte en permanence, tandis que les autres vannes sont fermées. Supposons que le temps Δt pendant lequel la vanne 5 est ouverte est court, c'est-à-dire $\Delta t \ll T$ avec T la période du cycle du piston. Lorsque le piston se déplace en sens inverse, les vannes s'ouvrent et se ferment en conséquence. Estimez la puissance dans cette situation formellement et numériquement. Si nécessaire, faites des hypothèses sur les variables et les quantités inconnues, justifiez-les et documentez-les.

iii. (3 pt) La puissance indiquée sur la fiche technique est égale¹ à 331 kW. Comparez cette valeur avec vos calculs des questions i. et ii. et discutez (qualitativement) votre comparaison (c'est-à-dire pourquoi les deux valeurs concordent assez bien ou pourquoi elles ne concordent pas).

¹En réalité, le moteur à vapeur du bateau contient 3 cylindres, la valeur a ici déjà été divisée par 3.

Problème long 1.3 : (16 points)**Partie A. Faisceau de pions (3 points)**

Pour une expérience de physique des particules, on a besoin de pions (positifs) (π^+), qui sont transportés dans un faisceau avec la quantité de mouvement $p = 65 \text{ MeV}/c$. La production de pions génère également des anti-muons (μ^+) et des positrons (e^+), qui ont tous la même charge et la même quantité de mouvement. Ils se distinguent toutefois par leur masse ($m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$, $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$) et durée de vie ($\tau_\pi = 26 \text{ ns}$, $\tau_\mu = 2197 \text{ ns}$). Le positron est stable dans le vide.

i. (1.5 pt) À quelle vitesse les différentes particules dans le faisceau se déplacent-elles ?

ii. (1.5 pt) La source du faisceau produit les trois types de particules à un intervalle de $T = 20 \text{ ns}$. Cela signifie que toutes les 20 ns, des pions, des anti-muons et des positrons sont tirés dans la ligne de faisceau. À quel intervalle temporel par rapport aux pions peut-on voir des anti-muons dans l'expérience lorsque la ligne de faisceau est de 16 m ?

Partie B. Modes de désintégration (4.5 points)

Dans ce qui suit, nous considérons deux façons selon lesquelles les pions peuvent se désintégrer. Les anti-muons se désintègrent toujours en positrons.

$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$	0.01 %
$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$	99.99 %
$\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$	100 %

Les (anti)neutrinos ν_e , ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$ sont des particules (presque) sans masse qui ne sont pas détectables.

Un pion peut donc soit se désintégrer directement en un positron (« $\pi \rightarrow e$ »), soit se désintégrer d'abord en un muon, qui se désintégrera ensuite en un positron (« $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ »). Dans l'expérience, tous les pions sont stoppés. Si le pion se désintègre en un muon, celui-ci est également stoppé en quelques picosecondes. Toutes les particules de cette partie de problème se désintègrent au repos.

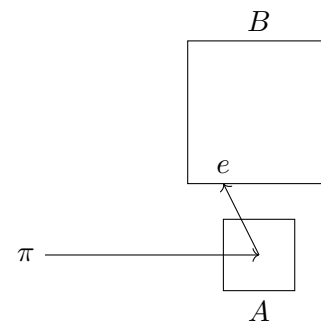
i. (1 pt) Quelle est l'énergie $E_e^{\pi \rightarrow e}$ d'un positron qui provient directement d'une désintégration de pions ($\pi \rightarrow e \nu_e$) ? Nous négligeons la masse du positron par rapport à la masse des pions et à l'énergie du positron ($m_e c^2 \ll E_e^{\pi \rightarrow e}, m_\pi c^2$).

ii. (1.5 pt) Quelle est l'énergie maximale $E_{e,\text{max}}^{\mu \rightarrow e}$ d'un positron si le pion se désintègre d'abord en un anti-muon et que l'anti-muon se désintègre ensuite en un positron ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$) ? Justifiez pourquoi. Nous négligeons la masse du positron par rapport à la masse de l'anti-muon et à l'énergie du positron ($m_e c^2 \ll E_e^{\mu \rightarrow e}, m_\mu c^2$).

iii. (2 pt) Les deux types de désintégration du pion ont un positron mesurable à la fin. Esquissez la distribution temporelle des positrons issus des désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » et « $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ » ($N_e^{\pi \rightarrow e}(t)$ et $N_e^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e}(t)$). L'instant de l'arrêt du pion est alors pris comme référence $t = 0$.

Partie C. Système de détection (5 points)

L'expérience se compose de deux détecteurs. Le faisceau frappe le détecteur A , qui stoppe les pions, mais est traversé par les anti-muons et les positrons. Il mesure l'instant d'arrivée des pions. Le détecteur B se trouve sur le côté du détecteur A . Lorsqu'un positron frappe le détecteur B , l'énergie du positron est répartie dans un volume cylindrique de quelques cm de diamètre. Le détecteur B mesure à la fois l'énergie délivrée par le positron (dépôt d'énergie, E_{dep}) ainsi que l'instant t_e du positron.



i. (2 pt) On constate que le dépôt d'énergie E_{dep} mesuré par le détecteur B est souvent plus petit que l'énergie du positron. Pour quelles raisons cela peut-il se produire ? Citez-en deux.

ii. (2 pt) Lorsqu'un pion se désintègre en un muon, celui-ci est stoppé en l'espace de 13 ps. Quelle partie des anti-muons se désintègre en vol, donc plus rapidement que 13 ps ?

iii. (1 pt) Dans $c_T \approx 1\%$ des désintégrations « $\pi \rightarrow e$ », l'énergie mesurée du positron (dépôt d'énergie) est si faible qu'il ne peut pas être distingué d'un positron d'une désintégration « $\pi \rightarrow$

$\mu \rightarrow e$ ». Pour les désintégrations d'anti-muon en vol (« Decay in Flight », DIF), on ne constate aucune différence dans la distribution temporelle. Les désintégrations anti-muon en vol et les désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » avec une grande perte d'énergie ne peuvent donc guère être distinguées. Qu'en est-il du rapport $p_{\text{low}}^{\pi \rightarrow e} / p_{\text{DIF}}^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e}$ des deux désintégrations ?

Partie D. $R_{e/\mu}$ (3.5 points)

Le rapport $R_{e/\mu}$ est calculé à partir des probabilités de désintégration du pion en un anti-muon ou en un positron

$$R_{e/\mu} = \frac{p(\pi \rightarrow e)}{p(\pi \rightarrow \mu)}.$$

L'objectif de l'expérience est de mesurer ce rapport avec une précision de 0.01 %. Sous une forme très simplifiée, l'analyse peut être décrite comme suit :

$$R_{e/\mu} = \frac{N_H}{N_L} \cdot (1 + c_T),$$

où N_H est le nombre de désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » (de haute énergie), N_L est le nombre de positrons (de basse énergie) provenant de désintégrations « $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ » et $c_T \approx 1\%$ est un facteur de correction pour les désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » avec une grande perte d'énergie.

i. (1.5 pt) Laquelle des trois grandeurs contribuera le moins à l'incertitude relative du rapport si un grand nombre de positrons est mesuré ? Pour quelle raison ?

Indice : l'incertitude (absolue) concernant le nombre d'événements N de telles expériences de comptage est $\sigma = \sqrt{N}$.

ii. (2 pt) À quelle précision c_T doit-il être connu si l'on mesure un total de 2×10^{12} désintégrations de pions ? Nous négligeons la source d'incertitude la moins importante identifiée dans la question précédente.

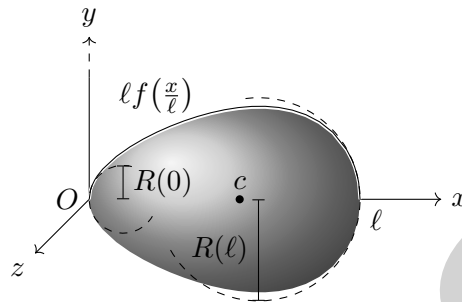
Problèmes longs : solutions

Problème long 1.1 : Stabilité d'un œuf en rotation

16

On considère un œuf représenté par un solide de révolution homogène de profil $f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t - t^4}$ sur le domaine $t \in [a = 0, b = 1]$. Pour transformer ce profil en unités physiques, on applique un facteur de longueur ℓ . L'œuf a une masse volumique ρ .

Le centre de masse de l'œuf se trouve en $x = c = \frac{5}{9}\ell$.



Partie A. Mise en bouche

0.5

i. Calculez le volume V de l'œuf.

0.5

Note: here and in what follows, the participants are allowed to write the prefactors in decimal notation.

$$V = \ell^3 \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

0.25

Thus,

$$V = \ell^3 \int_0^1 \frac{1}{4} \pi (x - x^4) dx = \ell^3 \frac{1}{4} \pi \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{3\pi}{40} \ell^3.$$

0.25

Partie B. Moment d'inertie

8.5

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe A est donné par

$$I_A = \iiint_V \rho D_A^2(x, y, z) dV,$$

où $D_A(x, y, z)$ est la distance (perpendiculaire) du point (x, y, z) à l'axe A .

i. Pour une boule homogène de mêmes masse volumique ρ et volume V que l'œuf, déterminez le moment d'inertie selon un axe passant par son centre. Pour ce faire, vous pouvez décomposer la boule en un ensemble d'anneaux de rayons $0 \leq s \leq r$, d'épaisseur ds et de largeur dx , où r est le rayon de la boule. L'intégrale devient alors

$$I_B = 2\pi\rho \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} s^3 ds dx.$$

Calculer une telle intégrale multiple revient à évaluer d'abord l'intégrale intérieure (sur ds) en gardant x constant, puis l'intégrale extérieure sur dx .

Le résultat doit être de la forme

$$I_B = k\pi\rho\ell^5,$$

où k est un facteur sans dimension.

1.75

$$\begin{aligned} I_B &= 2\pi\rho \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} s^3 ds dx \\ &= 2\pi\rho \int_{-r}^r \left[\frac{1}{4}s^4 \right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-r}^r (r^2-x^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-r}^r (r^4 - 2r^2x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho \left[r^4x - \frac{2}{3}r^2x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-r}^r \\ &= \pi\rho \left[r^4x - \frac{2}{3}r^2x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^r \\ &= \pi\rho \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) r^5 \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho r^5 \end{aligned}$$

1.25

A ball's volume is $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, thus using the egg's volume,

$$r = \sqrt[3]{\frac{9}{160}}\ell.$$

0.25

Therefore

$$I_B = \frac{1}{60} \left(\frac{9}{20} \right)^{\frac{5}{3}} \pi\rho\ell^5.$$

0.25

ii. Déterminez le moment d'inertie I_{cx} de l'œuf selon l'axe x passant par le centre de masse c en vous inspirant du calcul pour la boule ci-dessus.

2.5

We can use the same formula as for the ball, changing the bounds for x to $[a, b]$ and those for s to $[0, f(x)]$.

0.5

We also need to accommodate for the length factor, either by using the converted profile function, or more simply by adding a global ℓ^5 factor.

0.5

$$\begin{aligned}
I_{cx} &= 2\pi\rho\ell^5 \int_a^b \int_0^{f(x)} s^3 ds dx \\
&= 2\pi\rho\ell^5 \int_a^b \left[\frac{1}{4}s^4 \right]_0^{f(x)} dx \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho\ell^5 \int_a^b (f(x))^4 dx \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \int_a^b (x - x^4)^2 dx \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \int_a^b (x^2 - 2x^5 + x^8) dx \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{9}x^9 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) \\
&= \frac{1}{288}\pi\rho\ell^5
\end{aligned}$$

1.5

iii. Déterminez le moment d'inertie I_{Oz} de l'œuf selon l'axe z passant par l'origine O . Cette fois-ci il n'y a pas de symétrie de révolution autour de l'axe et nous ne pouvons pas considérer le rayon s . À la place, l'intégrale peut être résolue en coordonnées cartésiennes, sous la forme

$$I_{Oz} = \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \rho (x^2 + y^2) dz dy dx.$$

Vous pouvez utiliser sans preuve que

$$\int_{-|w|}^{|w|} (v^2 + x^2) \sqrt{w^2 - x^2} dx = \frac{1}{8}\pi w^2 (4v^2 + w^2).$$

2

$$\begin{aligned}
I_{Oz} &= \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \rho (x^2 + y^2) dz dy dx \\
&= \rho \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} (x^2 + y^2) \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} dz dy dx \\
&= \rho \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} (x^2 + y^2) [z]_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} dy dx \\
&= 2\rho \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} (x^2 + y^2) \sqrt{f^2(x) - y^2} dy dx \\
&= 2\rho \ell^5 \int_a^b \frac{1}{8} \pi f^2(x) (4x^2 + f^2(x)) dx \\
&= \frac{1}{16} \pi \rho \ell^5 \int_a^b (x - x^4) \left(4x^2 + \frac{1}{4} (x - x^4) \right) dx \\
&= \frac{1}{16} \pi \rho \ell^5 \int_a^b \left(\frac{1}{4} x^2 + 4x^3 - \frac{1}{2} x^5 - 4x^6 + \frac{1}{4} x^8 \right) dx \\
&= \frac{1}{16} \pi \rho \ell^5 \left[\frac{1}{12} x^3 + x^4 - \frac{1}{12} x^6 - \frac{4}{7} x^7 + \frac{1}{36} x^9 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{16} \pi \rho \ell^5 \left(\frac{1}{12} + 1 - \frac{1}{12} - \frac{4}{7} + \frac{1}{36} \right) \\
&= \frac{115}{4032} \pi \rho \ell^5
\end{aligned}$$

2

iv. Déduisez le moment d'inertie I_{cz} de l'œuf selon l'axe z passant par le centre de masse c .

1

We can apply Steiner's theorem:

0.5

$$\begin{aligned}
I_{cz} &= I_{Oz} - mc^2 \\
&= I_{Oz} - \rho V \left(\frac{5}{9} \right)^2 \ell^2 \\
&= I_{Oz} - \rho \frac{3}{40} \pi \ell^3 \frac{25}{81} \ell^2 \\
&= I_{Oz} - \frac{5}{216} \pi \rho \ell^5 \\
&= \left(\frac{115}{4032} - \frac{5}{216} \right) \pi \rho \ell^5 \\
&= \frac{65}{12096} \pi \rho \ell^5
\end{aligned}$$

0.5

v. Quelle est la valeur de I_{cy} ? Justifiez.

0.5

$$I_{cy} = I_{cz}$$

0.25

The y - and z -axes are equivalent due to the egg's symmetry of revolution and alignment with the x -axis. 0.25

vi. Vérifiez que

$$I_{cx} < I_B < I_{cz} < I_{Oz}$$

et justifiez pourquoi. 0.75

Computing the numerical values of the k factors:

$$0.0035 < 0.0044 < 0.0054 < 0.0285$$

For an equal mass (equal density and equal volume), the closer the mass distribution to the axis of rotation, the smaller the moment of inertia. Therefore the egg along its axis has a smaller moment of inertia than the ball, which has a smaller one than the egg taken perpendicular to its axis. From Steiner's theorem, a moment of inertia for a given axis direction will always be minimal when the axis crosses the center of mass. 0.25

I_{cx} , I_{cy} et I_{cz} sont des éléments de ce qui est appelé le *tenseur d'inertie* du solide, qui généralise le moment d'inertie aux cas où le solide ne possède pas de symétrie de révolution autour de son axe de rotation. 0.5

En particulier, si un solide de révolution tourne autour d'un axe passant par son centre de masse et incliné d'un angle θ par rapport à son axe de symétrie, alors son moment d'inertie selon l'axe de rotation sera

$$I = I_{\parallel} \cos^2(\theta) + I_{\perp} \sin^2(\theta),$$

où I_{\parallel} est le moment d'inertie selon l'axe de symétrie et I_{\perp} le moment d'inertie selon un axe qui lui est perpendiculaire et passe par le centre de masse.

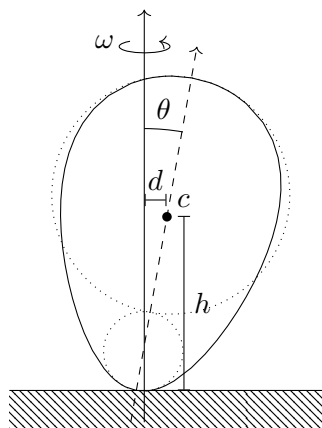
Partie C. Stabilité de l'œuf en rotation 7

En tout point d'une courbe $g(x)$ suffisamment régulière, on peut définir un *cercle osculateur*, qui est le cercle qui approxime le mieux la courbe en ce point. Son rayon est appelé *rayon de courbure* de la courbe au point donné, et vaut

$$R(x) = \frac{\left(1 + \left(\frac{dg}{dx}(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2g}{dx^2}(x)\right|}.$$

Pour le profil $\ell f\left(\frac{x}{\ell}\right)$ de l'œuf, on obtient $R(0) = \frac{1}{8}\ell$ et $R(\ell) = \frac{3}{8}\ell$.

On fait tourner l'œuf sur sa pointe et on souhaite déterminer la vitesse angulaire ω minimale requise pour qu'il ne se couche pas. Pour ce faire, on considère l'œuf penché selon un angle $\theta \ll 1$ par rapport à la verticale, en rotation autour de l'axe vertical passant par son point de contact avec le sol.



i. Déterminez la hauteur $h(\theta)$ du centre de masse et sa distance $d(\theta)$ à l'axe de rotation. L'angle θ est petit et vous pouvez donc approximer la courbure de la pointe de l'œuf par celle de son cercle osculateur.

1.5

By using the osculating circle's approximation, the crossing between the axis of revolution and the axis of rotation will be at the circle's center, that is at a distance $R(0)$ from the bottom.

0.5

Therefore

$$h(\theta) = R(0) + (c - R(0)) \cos(\theta) = \left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72} \cos(\theta) \right) \ell$$

0.5

and

$$d(\theta) = (c - R(0)) \sin(\theta) = \frac{31}{72} \sin(\theta) \ell.$$

0.5

Solution alternative :

(1.5)

Alternatively, it is reasonable to Taylor-expand in θ to the second order. Note that the exact distribution of points for this question and the next ones depends on where the Taylor-expansion, the substitution of m and the simplifications are made. Use your best judgement when marking.

$$h(\theta) = R(0) + (c - R(0)) \cos(\theta) = \left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72} \cos(\theta) \right) \ell \approx \left(\frac{1}{8} - \frac{31}{144} \theta^2 \right) \ell$$

and

$$d(\theta) = (c - R(0)) \sin(\theta) = \frac{31}{72} \sin(\theta) \ell \approx \frac{31}{72} \theta \ell.$$

(1.5)

ii. Déterminez l'énergie mécanique totale de l'œuf $E(\theta)$, toujours en supposant que l'angle est petit.

2.5

The total mechanical energy consists of the gravitational potential energy plus the kinetic energy of rotation plus the kinetic energy of translation of the center of mass. The two latter can be put together by adapting the moment of inertia via Steiner's theorem.

0.5

$$\begin{aligned} E(\theta) &= mgh(\theta) + \frac{1}{2} (I_{cx} \cos^2(\theta) + I_{cz} \sin^2(\theta) + md^2(\theta)) \omega^2 \\ &= \rho \frac{3}{40} \pi \ell^3 g \left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72} \cos(\theta) \right) \ell + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{288} \pi \rho \ell^5 \cos^2(\theta) + \frac{65}{12096} \pi \rho \ell^5 \sin^2(\theta) + \rho \frac{3}{40} \pi \ell^3 \frac{961}{5184} \sin^2(\theta) \ell^2 \right) \omega^2 \\ &= \left(\frac{3}{40} \left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72} \cos(\theta) \right) g + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{288} \cos^2(\theta) + \frac{65}{12096} \sin^2(\theta) + \frac{3}{40} \frac{961}{5184} \sin^2(\theta) \right) \ell \omega^2 \right) \rho \pi \ell^4 \\ &= \left(\frac{1}{960} (9 + 31 \cos(\theta)) g + \frac{1}{322560} (560 \cos^2(\theta) + 3109 \sin^2(\theta)) \ell \omega^2 \right) \rho \pi \ell^4 \\ &= \left(\frac{1}{960} (9 + 31 \cos(\theta)) g + \frac{1}{322560} (560 + 2549 \sin^2(\theta)) \ell \omega^2 \right) \rho \pi \ell^4 \end{aligned}$$

2

Solution alternative :**(2.5)**

$$\cos^2(\theta) \approx \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)^2 = 1 - \theta^2 + \theta^4 \approx 1 - \theta^2$$

(This is a particular case of Bernoulli's inequality, resp. approximation.)

(0.5)

$$\begin{aligned} E(\theta) &= mgh(\theta) + \frac{1}{2} (I_{cx} \cos^2(\theta) + I_{cz} \sin^2(\theta) + md^2(\theta)) \omega^2 \\ &\approx mg \left(\frac{1}{8} - \frac{31}{144} \theta^2 \right) \ell + \frac{1}{2} \left(I_{cx} (1 - \theta^2) + I_{cz} \theta^2 + m \left(\frac{31}{144} \right)^2 \theta^2 \ell^2 \right) \omega^2 \end{aligned}$$

(2)

iii. Déduisez la condition sur ω pour que l'œuf soit stable en rotation sur sa pointe. Que remarquez-vous ?**2.5**

The condition is that the second derivative of the energy around $\theta = 0$ is positive (because the tip of the egg is an equilibrium position, albeit an unstable one, we already know that the first derivative will be zero, and this is also visible from the expression).

0.75

$$\frac{dE}{d\theta}(\theta) = \left(-\frac{31}{960} \sin(\theta) g + \frac{2549}{161280} \cos(\theta) \sin(\theta) \ell \omega^2 \right) \rho \pi \ell^4$$

0.25

$$\frac{d^2E}{d\theta^2}(\theta) = \left(-\frac{31}{960} \cos(\theta) g + \frac{2549}{161280} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \ell \omega^2 \right) \rho \pi \ell^4$$

0.25

$$\frac{d^2E}{d\theta^2}(0) = \left(-\frac{31}{960} g + \frac{2549}{161280} \ell \omega^2 \right) \rho \pi \ell^4$$

0.25

$$\omega > \sqrt{\frac{161280}{2549} \frac{31}{960} \frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{5208}{2549} \frac{g}{\ell}}$$

0.5

We notice that the mass or the density of the egg don't matter, only its shape and size.

0.5

Solution alternative :**(2.5)**

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{d\theta}(\theta) &= -mg\frac{31}{72}\ell\theta + \left(-I_{cx}\theta + I_{cz}\theta + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\theta\ell^2\right)\omega^2 \\
\frac{d^2E}{d\theta^2}(\theta) &= -mg\frac{31}{72}\ell + \left(-I_{cx} + I_{cz} + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\ell^2\right)\omega^2 \\
\frac{d^2E}{d\theta^2}(0) &= -mg\frac{31}{72}\ell + \left(-I_{cx} + I_{cz} + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\ell^2\right)\omega^2 \\
\omega &> \sqrt{\frac{mg\ell\frac{31}{72}}{-I_{cx} + I_{cz} + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\ell^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{31}{72}}{-\frac{I_{cx}}{m\ell^2} + \frac{I_{cz}}{m\ell^2} + \left(\frac{31}{72}\right)^2\ell} \frac{g}{\ell}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{31}{72}}{-\frac{1}{288}\frac{40}{3} + \frac{65}{12096}\frac{40}{3} + \left(\frac{31}{72}\right)^2\ell} \frac{g}{\ell}} \\
&= \sqrt{\frac{5208}{2549} \frac{g}{\ell}}
\end{aligned}$$

(2.5)

iv. Calculez la valeur numérique correspondante pour ω en prenant $\ell = 6$ cm et la masse de l'œuf $m = 60$ g. Calculez également la valeur numérique de la fréquence de rotation ν .

0.5

$$\omega > \omega_{\min} = \sqrt{\frac{5208}{2549} \frac{9.806\,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{6 \text{ cm}}} \approx 18 \text{ s}^{-1}$$

0.25

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} > \frac{\omega_{\min}}{2\pi} \approx 3 \text{ Hz}$$

0.25

Problème long 1.2 : Bateau à vapeur

16

Il y a quelques années, dans le cadre d'une sortie, un groupe d'étudiant-e-s et de bénévoles a fait un voyage en bateau sur le lac des Quatre-Cantons. Par chance, le groupe a pu faire le voyage sur un bateau à vapeur où, à côté de la grosse machine à vapeur, se trouvait une fiche technique. Inspiré-e-s par cette expérience, nous allons étudier la machine à vapeur et réfléchir à sa conception. Un tel moteur est esquissé dans la figure 1.

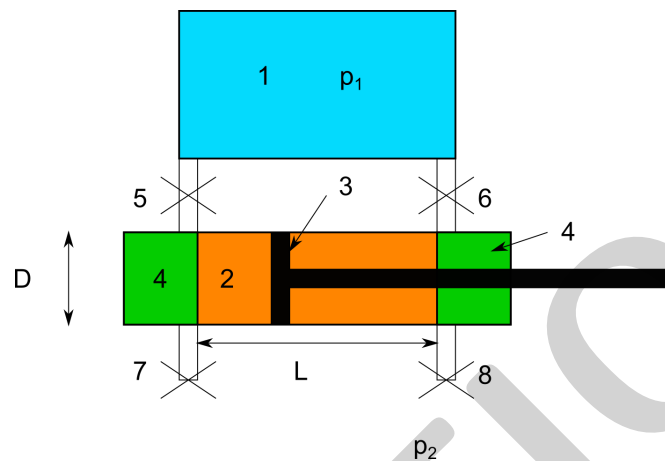


Figure 1 : Schéma d'une machine à vapeur. 1 : Réservoir de vapeur (bleu) à pression constante p_1 . 2 : Cylindre (diamètre D , régions vertes et orange) où le piston (3) se déplace dans la région orange sur la distance L . 4 : Volume minimal V_0 (chaque région verte) qui reste lorsque le piston se trouve à l'extrémité correspondante du cylindre. 5 et 6 : Vannes permettant de contrôler le flux de vapeur du réservoir (1) dans le cylindre. 7 et 8 : Vannes permettant de contrôler le flux de vapeur du cylindre vers l'extérieur, où règne la pression p_2 .

Partie A. Puissance

16

Quelques informations supplémentaires sur la machine à vapeur : elle se compose d'un cylindre de diamètre $D = 800$ mm où une pression de vapeur $p_1 = 13$ bar (pression absolue) est utilisée. Le piston glisse dans le cylindre sur une distance $L = 1300$ mm. Le moteur effectue 48 cycles complets par minute.

i. Supposons que lorsque le piston se déplace de gauche à droite, les vannes 5 et 8 sont ouvertes en permanence (6 et 7 fermées). Les vannes changent immédiatement d'état lorsque le piston atteint l'extrémité droite et commence à se déplacer vers la gauche (les vannes changent à nouveau immédiatement d'état lorsque le piston change une nouvelle fois de direction à l'extrémité gauche). Estimez la puissance de la machine à vapeur en fonction des variables données et calculez la valeur numérique correspondante. Si nécessaire, faites des hypothèses, justifiez-les et documentez-les.

6

General note on the marking: this is an "open" style problem. Student solutions can be expected to be very different from one another. The marking schemes presented here are only indicative examples. Use your best judgement. Solutions that display a deeper insight into the physics underlying the problem can be rewarded accordingly.

Since the valves are permanently open, there is a constant pressure p_1 on the side connected with the reservoir and p_2 at the side connected to the outlet. We therefore are looking at an isobaric process (also give the points if not explicitly stated). V_0 can be assumed to be very small and the valves sufficiently large that the pressure drop they cause is negligible.

The power P is related to the total work of one cycle W_{tot} as $P = fW_{\text{tot}}$ with f the frequency. 0.5

The total work is $W_{\text{tot}} = 2W$ with W the work done moving the piston in one direction. The factor 2 comes from the fact that work is done in both directions. We assume that the area taken by the connection rod is negligible, otherwise the factor would be slightly smaller than 2 (fine is students assume a smaller factor) 0.5

The frequency (in SI units) is given by (only analytic formula, also ok if implicitly correct, no points for numerical value here) $f = \frac{48 \text{rot/min}}{60 \text{s} \cdot \text{min}^{-1}} = 0.8 \text{s}^{-1}$ 0.5

The work W of one cylinder moving once along L is computed as $W = \int F dL$ with F the total force acting on the cylinder. 0.5

The force is given by $F = pA$ with p the total pressure. 0.5

The total pressure is given by $p = p_1 - p_2$. 0.5

It is an isobaric process (it can also be considered as two simultaneous isobaric processes, one on each side of the piston). 0.5

The integral leads to $W = L(p_1 - p_2)A$. 0.5

The area is given by $A = \frac{D^2\pi}{4}$ (only analytic formula, also ok if implicitly correct, no points for numerical value here). 0.5

Therefore the power is $P = 2fL(p_1 - p_2)A$. 0.5

We assume $p_2 = 1 \text{ bar}$ (environment pressure). This value can vary, however has to be clearly stated. 0.5

The numerical value is $P = 1250 \text{ kW}$. 0.5

ii. Le contrôle des vannes décrit dans la question précédente est plutôt inefficace. En effet, lorsque les vannes commutent, elles libèrent l'énergie stockée dans la vapeur sous haute pression p_1 dans l'environnement (à pression p_2). Pour optimiser l'efficacité, nous changeons maintenant le contrôle des vannes : lorsque le piston est au point le plus à gauche, la vanne 5 s'ouvre rapidement, remplissant le volume gauche de vapeur à pression p_1 . La vanne 5 se referme ensuite et reste fermée pendant le reste du cycle. Pendant le déplacement du piston vers la droite, la vanne 8 est ouverte en permanence, tandis que les autres vannes sont fermées. Supposons que le temps Δt pendant lequel la vanne 5 est ouverte est court, c'est-à-dire $\Delta t \ll T$ avec T la période du cycle du piston. Lorsque le piston se déplace en sens inverse, les vannes s'ouvrent et se ferment en conséquence. Estimez la puissance dans cette situation formellement et numériquement. Si nécessaire, faites des hypothèses sur les variables et les quantités inconnues, justifiez-les et documentez-les. 7

While the piston is moving, there is no new steam entering the cylinder and as such the pressure is not constant anymore. We can model this either as a isothermal or adiabatic process (or a process in between). For the marking, both solutions should be considered equally valid as long as a justification is provided. 0.5 points can be deduced if the choice of an isothermal process is not given a justification. Again we can assume that the valves are sufficiently large and that their impact on the pressure is negligible. The

isobaric process happening on the “outgoing” side of the piston can either be treated separately or, as done here, implicitly with the $-p_2 dV$ part of the integrals.

Justification isothermal process: big heat capacity of cylinder and piston that transfer thermal energy to the steam during the whole movement, thereby keeping it a constant temperature.

To calculate the work, we need the relation $p(V)$ which for the isothermal process is $pV = \text{const}$, hence $p(V) = p_1 \frac{V_0}{V}$.

We have to make an assumption on V_0 . If well explained and reasonable, any assumption is ok. Here we assume that V_0 is such that the isothermal expansion drops the pressure from p_1 to p_2 . This point is given for explicitly mentioning the assumption, not its actual formal consequence (see next point). Note on p_2 : They are supposed to take the one from the first subtask, however if they change their choice, no penalty and no benefit. Furthermore if they didn't state anything about p_2 in the first subtask but explain it here, give the points from the previous task aswell.

Our assumption formally leads to: $p_1 V_0 = p_2 (V_0 + AL)$ hence $V_0 = \frac{p_2 AL}{p_1 - p_2}$.

Work is then (points given for the formula): $W = \int_{V_0}^{V_0+AL} (p(V) - p_2) dV = \int_{V_0}^{V_0+AL} (p_1 \frac{V_0}{V} - p_2) dV$.

Solving the integral gives $W = p_1 V_0 \ln\left(\frac{V_0+AL}{V_0}\right) - p_2 AL$.

Analytic solution for the power: $P = 2f \left[p_1 \frac{p_2 AL}{p_1 - p_2} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_2 AL \right] = 2fp_2 AL \left(\frac{p_1}{p_1 - p_2} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - 1 \right)$.

Numerical solution: $P = 186 \text{ kW}$.

Solution alternative :

Alternatively for adiabatic or process in between (can be treated same but different κ):

Justification adiabatic process: Not a lot of heat exchange during expansion.

To calculate the work, we need the relation $p(V)$, which for the adiabatic process is $pV^\kappa = \text{const}$, hence $p(V) = p_1 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa$.

We have to make an assumption on V_0 . If well explained and reasonable, any assumption is ok. Here we assume that V_0 is such that the expansion drops the pressure from p_1 to p_2 . This point is given for explicitly mentioning the assumption, not its actual formal consequence (see next point). Note on p_2 : They are supposed to take the one from the first subtask, however if they change their choice, no penalty and no benefit. Furthermore if they didn't state anything about p_2 in the first subtask but explain it here, give the points from the previous task aswell.

Our assumption formally leads to: $p_1^{1/\kappa} V_0 = p_2^{1/\kappa} (V_0 + AL)$ hence $V_0 = \frac{p_2^{1/\kappa} AL}{p_1^{1/\kappa} - p_2^{1/\kappa}}$.

Work is then (points given for the formula): $W = \int_{V_0}^{V_0+AL} (p(V) - p_2) dV = \int_{V_0}^{V_0+AL} \left(p_1 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa - p_2 \right) dV$.

Solving the integral gives $W = p_1 V_0^\kappa \frac{1}{-\kappa+1} \left((V_0 + LA)^{-\kappa+1} - V_0^{-\kappa+1} \right) - p_2 AL$. Note that to keep the same amount of points with the isothermal process and since inserting variables here is quite tedious, there is no need for further simplification (the points for the simplification in the isothermal process are awarded for the choice of κ , see next point).

Choice of κ : for adiabatic process $\kappa = \frac{f+2}{f}$ with $f = 6$ for an (idealized) molecule with 3 translational and 3 rotational degrees of freedom (i.e. H_2O). A process in between adiabatic and isothermal would have $\langle \kappa \rangle = \frac{f+2}{f} = \frac{8}{6}$. (0.5)

Numerical solution: $P = 226 \text{ kW}$. (1)

iii. La puissance indiquée sur la fiche technique est égale² à 331 kW. Comparez cette valeur avec vos calculs des questions i. et ii. et discutez (qualitativement) votre comparaison (c'est-à-dire pourquoi les deux valeurs concordent assez bien ou pourquoi elles ne concordent pas). 3

The answer might differ depending on the assumptions taken. Different options are presented, if other good points are explained, give the points correspondingly.

A general aspect that has to be mentioned for this point (no matter about the other conclusions): our calculations neglect friction and other dissipative and imperfect effects (0.5 points). Hence with respect to the corresponding process, the calculated power is an overestimate (0.5 points). 1

The power calculated in i. is higher than the actual value not only because of dissipation (point above) but also because it is a highly inefficient process that is not implemented. 0.5

Concerning the calculated power in ii.: For the remaining 1.5 points, there are different items that can be mentioned, depending on the outcome of the calculations:

Similar assumptions as in the sample solution leading to a lower calculated value in ii.: One can increase the power output by not relaxing to $p_2 = 1 \text{ bar}$ but to higher values, which is related to having a bigger value of V_0 than calculated.

The assumptions in part ii. are chosen such that it matches the real value: If it is explicitly stated here that the assumption of ii. were made such that the values agree, give this 1.5 points for the additional effort made to match the values.

If the calculated value in ii. is bigger than the real value because other assumptions were made: A different choice of the assumptions would lead to a better agreement.

If there is a calculation error in ii. leading to a unreasonably different value: 1.5 points if stated that the calculated value is unreasonable. 1.5

²En réalité, le moteur à vapeur du bateau contient 3 cylindres, la valeur a ici déjà été divisée par 3.

Problème long 1.3 :**16****Partie A. Faisceau de pions****3**

Pour une expérience de physique des particules, on a besoin de pions (positifs) (π^+), qui sont transportés dans un faisceau avec la quantité de mouvement $p = 65 \text{ MeV}/c$. La production de pions génère également des anti-muons (μ^+) et des positrons (e^+), qui ont tous la même charge et la même quantité de mouvement. Ils se distinguent toutefois par leur masse ($m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$, $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$) et durée de vie ($\tau_\pi = 26 \text{ ns}$, $\tau_\mu = 2197 \text{ ns}$). Le positron est stable dans le vide.

i. À quelle vitesse les différentes particules dans le faisceau se déplacent-elles ?**1.5**

In relativistic kinematics, the velocity can be written as

$$v = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}}. \quad (\text{A.1})$$

Using the given numerical values for the momentum and the masses, one obtains the velocities for pions, anti-muons and positrons.

0.75

$$v_\pi = 0.42 \cdot c = 1.26 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

0.25

$$v_\mu = 0.52 \cdot c = 1.56 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

0.25

$$v_e \approx c = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

0.25

Remark:

$$v_e = 0.999969c$$

Results may be given in terms of c or $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. If no points are awarded for eq. (A.1), $v_e \approx c$ can be determined by highly relativistic approximation. This awards 0.5 points.

ii. La source du faisceau produit les trois types de particules à un intervalle de $T = 20 \text{ ns}$. Cela signifie que toutes les 20 ns , des pions, des anti-muons et des positrons sont tirés dans la ligne de faisceau. À quel intervalle temporel par rapport aux pions peut-on voir des anti-muons dans l'expérience lorsque la ligne de faisceau est de 16 m ?

1.5

The time of flight difference for pions and muons can be written as

$$\Delta t = \frac{l}{v_\pi} - \frac{l}{v_\mu}.$$

0.5

Inserting the velocities obtained in the previous question, one obtains

$$\Delta t = 24.6 \text{ ns}.$$

0.25

Pions arrive 24.6 ns after muons of the same production. One needs to consider that all particles are produced every 20 ns.

0.5

Muons thus arrive either 4.6 ns prior to the pions or 15.4 ns after. Full points for any of the two values.

0.25

Partie B. Modes de désintégration

4.5

Dans ce qui suit, nous considérons deux façons selon lesquelles les pions peuvent se désintégrer. Les anti-muons se désintègrent toujours en positrons.

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e \quad 0.01 \%$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \quad 99.99 \%$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e \quad 100 \%$$

Les (anti)neutrinos ν_e , ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$ sont des particules (presque) sans masse qui ne sont pas détectables.

Un pion peut donc soit se désintégrer directement en un positron (« $\pi \rightarrow e$ »), soit se désintégrer d'abord en un muon, qui se désintégrera ensuite en un positron (« $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ »). Dans l'expérience, tous les pions sont stoppés. Si le pion se désintègre en un muon, celui-ci est également stoppé en quelques picosecondes. Toutes les particules de cette partie de problème se désintègrent au repos.

i. Quelle est l'énergie $E_e^{\pi \rightarrow e}$ d'un positron qui provient directement d'une désintégration de pions ($\pi \rightarrow e \nu_e$) ? Nous négligeons la masse du positron par rapport à la masse des pions et à l'énergie du positron ($m_e c^2 \ll E_e^{\pi \rightarrow e}, m_\pi c^2$).

1

Using the symmetry coming from the fact that we have a decay into two (approximately) massless particles, one can expect the positron energy to be given by

$$E_e^{\pi \rightarrow e} \approx \frac{m_\pi}{2}.$$

0.75

Inserting the numerical value for m_π yields

$$E_e^{\pi \rightarrow e} \approx 70 \text{ MeV}.$$

0.25

Solution alternative :

(1)

Using that mass is a Lorentz invariant, and neglecting the electron mass, one finds thanks to momentum conservation (from a pion decaying at rest) $m_\pi^2 = ((E_e + E_{\nu_e})^2 - (E_e + |\vec{p}_{\nu_e}|)^2 = (E_e + |\vec{p}_e|)^2 \approx (E_e + E_e)^2 = 4E_e^2$, which gives

$$E_e^{\pi \rightarrow e} \approx \frac{m_\pi}{2}.$$

(0.75)

Inserting the numerical value for m_π yields

$$E_e^{\pi \rightarrow e} \approx 70 \text{ MeV}.$$

(0.25)

ii. Quelle est l'énergie maximale $E_{e,\max}^{\mu \rightarrow e}$ d'un positron si le pion se désintègre d'abord en un anti-muon et que l'anti-muon se désintègre ensuite en un positron ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$) ? Justifiez pourquoi. Nous négligeons la masse du positron par rapport à la masse de l'anti-muon et à l'énergie du positron ($m_e c^2 \ll E_e^{\mu \rightarrow e}, m_\mu c^2$).

1.5

By momentum conservation from a muon assumed to decay at rest, we expect to have the highest positron energy when both neutrinos point in the same direction (note: other justifications, as long as they are sensible, are accepted).

0.75

We are thus back in the same situation as in the previous question, but with m_π being replaced by m_μ :

$$E_{e,\max}^{\mu \rightarrow e} \approx \frac{m_\mu}{2}.$$

0.5

Inserting the numerical value for m_μ gives

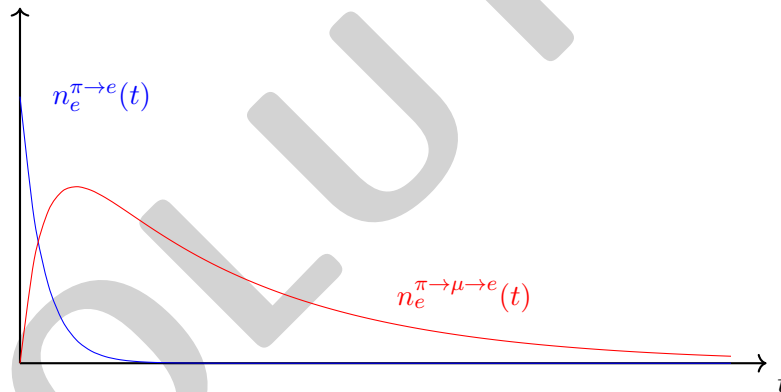
$$E_{e,\max}^{\mu \rightarrow e} \approx 53 \text{ MeV}.$$

0.25

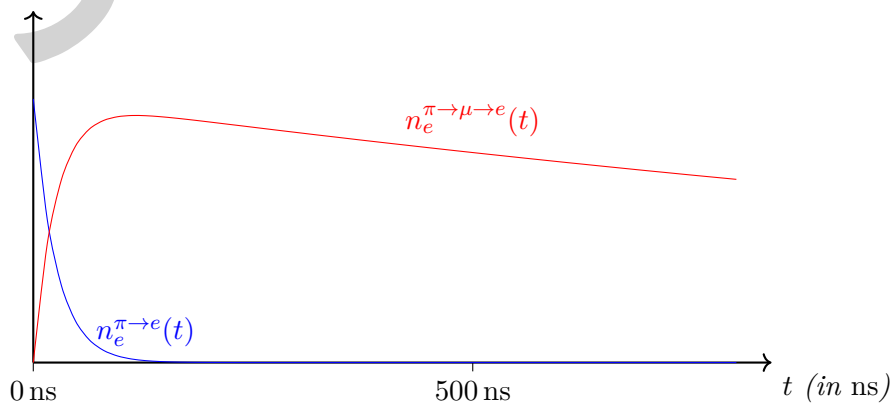
iii. Les deux types de désintégration du pion ont un positron mesurable à la fin. Esquissez la distribution temporelle des positrons issus des désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » et « $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ » ($N_e^{\pi \rightarrow e}(t)$ et $N_e^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e}(t)$). L'instant de l'arrêt du pion est alors pris comme référence $t = 0$.

2

We expect something of the following qualitative form (using 1/10 of the muon lifetime)



For reference, the actual time spectrum



Indeed, the $\pi \rightarrow e$ case is a typical exponential decay that qualitatively goes as $n_e^{\pi \rightarrow e}(t) \propto e^{-t/\tau_\pi}$. The $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ case is an exponential decay from anti-muons which are themselves the result of an exponential decay. Qualitatively we thus expect something of the form $n_e^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e}(t) \propto e^{-t/\tau_\mu} - e^{-t/\tau_\pi}$.

Derivation (not required, no points):

Let N_μ be the number of muons at a given time. The number of positrons from muon decay is thus

$$n_e^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e}(t) \propto N_\mu. \quad (\text{B.1})$$

Also, the pions as primary particles follow an exponential decay. Thus the change in number of muons is equal to the new muons from pion decay minus the muons that decay. As each muon has a given decay probability, this is proportional to the total number of muons. Let N_0 be the total number of pions decaying to muons.

$$\dot{N}_\mu = \frac{N_0}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu} N_\mu$$

This equation can be approached with the ansatz

$$N_\mu = Ae^{-t/\tau_\mu} + Be^{-t/\tau_\pi}$$

and thus

$$\begin{aligned} -\frac{A}{\tau_\mu} e^{-t/\tau_\mu} - \frac{B}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} &= \frac{N_0}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu} (Ae^{-t/\tau_\mu} + Be^{-t/\tau_\pi}) \\ -\frac{B}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} &= \frac{N_0}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu} Be^{-t/\tau_\pi} \\ -\frac{B}{\tau_\pi} &= \frac{N_0}{\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu} B \\ -\left(\frac{1}{\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu}\right) B &= \frac{N_0}{\tau_\pi} \\ -\frac{\tau_\mu - \tau_\pi}{\tau_\mu \tau_\pi} B &= \frac{N_0}{\tau_\pi} \\ B &= -N_0 \frac{\tau_\mu}{\tau_\mu - \tau_\pi}. \end{aligned}$$

From the condition that the pion first has to decay to a muon and thus $N_\mu(0) = 0$, it follows that $A = -B$. And thus, plugging into eq. (B.1),

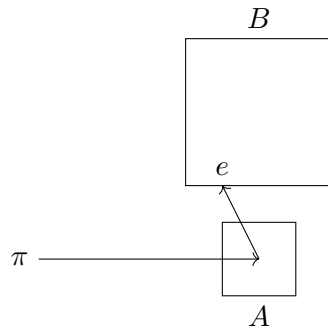
$$n_e^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e}(t) \propto e^{-t/\tau_\mu} - e^{-t/\tau_\pi}.$$

Caption	0.5
Exp. decay for $\pi \rightarrow e$ with $\tau = \tau_\pi$	0.5
Exp. rise with $\tau = \tau_\pi$ for $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$	0.5
Exp. decay for $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ with $\tau = \tau_\mu$	0.5

Partie C. Système de détection

5

L'expérience se compose de deux détecteurs. Le faisceau frappe le détecteur A, qui stoppe les pions, mais est traversé par les anti-muons et les positrons. Il mesure l'instant d'arrivée des pions. Le détecteur B se trouve sur le côté du détecteur A. Lorsqu'un positron frappe le détecteur B, l'énergie du positron est répartie dans un volume cylindrique de quelques cm de diamètre. Le détecteur B mesure à la fois l'énergie délivrée par le positron (dépôt d'énergie, E_{dep}) ainsi que l'instant t_e du positron.



i. On constate que le dépôt d'énergie E_{dep} mesuré par le détecteur B est souvent plus petit que l'énergie du positron. Pour quelles raisons cela peut-il se produire ? Citez-en deux.

2

For each plausible reason a point is awarded. Possibilities are:

- Energy loss A
- Energy deposit cylinder exceeds B . (Lateral Energy Leakage)
- Positron passes B partially.
- Positron reflects on B .
- Positron-electron annihilation with escaping gamma
- Positron interacts with nuclei (or any other particle in the shower, e.g. bremsstrahlung + photonuclear interaction)
- Positron doesn't hit B , annihilates in A and only a gamma hits B
- ...

Corrector should decide at which point two arguments are the same with a different wording and when they should be considered as different arguments. This should be two easy points for students that have some creative suggestions.

2

ii. Lorsqu'un pion se désintègre en un muon, celui-ci est stoppé en l'espace de 13 ps. Quelle partie des anti-muons se désintègre en vol, donc plus rapidement que 13 ps ?

2

The probability for an anti-muon decay between time t_1 and t_2 can be written as

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \frac{1}{N} \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt,$$

where N is some normalization factor (such that integrating from 0 to ∞ yields a probability of 1) and $N(t)$ is the time distribution.

0.5

In the case of decays, the distribution $N(t)$ is an exponentially decaying distribution. The normalization constant can be obtained by computing the integral from 0 to ∞ . One then obtains

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \frac{1}{\tau_\mu} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t/\tau_\mu} dt.$$

0.5

Computing the integral then yields

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \left[-e^{-t/\tau_\mu} \right]_{t_1}^{t_2}$$

0.25

and further

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \left(e^{-t_1/\tau_\mu} - e^{-t_2/\tau_\mu} \right).$$

0.25

Inserting the numerical values then gives

$$p(t_1 < t_e < t_2) \approx 5.9 \times 10^{-6}.$$

0.5

The first 0.5P are for the normalisation, the second 0.5P for the integral over the exp. function. In case the normalisation was forgotten, deduct 0.5P

iii. Dans $c_T \approx 1\%$ des désintégrations « $\pi \rightarrow e$ », l'énergie mesurée du positron (dépôt d'énergie) est si faible qu'il ne peut pas être distingué d'un positron d'une désintégration « $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ ». Pour les désintégrations d'anti-muon en vol (« Decay in Flight », DIF), on ne constate aucune différence dans la distribution temporelle. Les désintégrations anti-muon en vol et les désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » avec une grande perte d'énergie ne peuvent donc guère être distinguées. Qu'en est-il du rapport $p_{\text{low}}^{\pi \rightarrow e} / p_{\text{DIF}}^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e}$ des deux désintégrations ?

1

The probability to get a low-energy $\pi \rightarrow e$ decay over all the decays is the product of the probability to get a direct $\pi \rightarrow e$ decay and of the one to get a low-energy decay in such a case, c_T :

$$p_{\text{low}}^{\pi \rightarrow e} = 1 \times 10^{-2} \cdot 1 \times 10^{-4} = 1 \times 10^{-6}$$

0.5

The probability for muon DIF was computed above.

Using our results from above, one finds

$$p_{\text{low}}^{\pi \rightarrow e} / p_{\text{DIF}}^{\pi \rightarrow \mu \rightarrow e} = 0.17$$

0.5

Partie D. $R_{e/\mu}$

3.5

Le rapport $R_{e/\mu}$ est calculé à partir des probabilités de désintégration du pion en un anti-muon ou en un positron

$$R_{e/\mu} = \frac{p(\pi \rightarrow e)}{p(\pi \rightarrow \mu)}.$$

L'objectif de l'expérience est de mesurer ce rapport avec une précision de 0.01 %. Sous une forme très simplifiée, l'analyse peut être décrite comme suit :

$$R_{e/\mu} = \frac{N_H}{N_L} \cdot (1 + c_T),$$

où N_H est le nombre de désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » (de haute énergie), N_L est le nombre de positrons (de basse énergie) provenant de désintégrations « $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ » et $c_T \approx 1\%$ est un facteur de correction pour les désintégrations « $\pi \rightarrow e$ » avec une grande perte d'énergie.

i. Laquelle des trois grandeurs contribuera le moins à l'incertitude relative du rapport si un grand nombre de positrons est mesuré ? Pour quelle raison ?

Indice : l'incertitude (absolue) concernant le nombre d'événements N de telles expériences de comptage est $\sigma = \sqrt{N}$.

1.5

The answer is N_L .

0.5

The reason is that $N_L \gg N_H$

0.5

and that such counting experiments have a (Poisson distribution with) relative uncertainty on the number of events given by

$$\frac{\sigma}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{D.1})$$

0.25

while the uncertainty σ_T on c_T a priori does not change with the number of measured events.

0.25

ii. À quelle précision c_T doit-il être connu si l'on mesure un total de 2×10^{12} désintégrations de pions ? Nous négligeons la source d'incertitude la moins importante identifiée dans la question précédente.

2

In case the 0.25P were missed above for eq. (D.1), here is another chance:

$$\frac{\sigma_H}{N_H} = \frac{1}{\sqrt{N_H}} \quad (0.25).$$

By uncertainty propagation and neglecting the uncertainty coming from N_L , one gets

$$\left(\frac{\sigma_R}{R_{e/\mu}} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_H}{N_H} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{1 + c_T} \right)^2.$$

0.5

We then isolate σ_T with intermediate step

$$\left(\frac{\sigma_T}{1 + c_T} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_R}{R_{e/\mu}} \right)^2 - \frac{1}{N_H}$$

0.5

to finally get

$$\sigma_T = (1 + c_T) \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{R_{e/\mu}} \right)^2 - \frac{1}{N_H}}.$$

0.5

Inserting the numerical values and noting that $N_H = 2 \times 10^{12} \cdot 0.01\% \cdot (1 - c_T)$, one finds

$$\sigma_T \approx 7 \times 10^{-5}.$$

0.5



**PHYSICS.
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Tour final

9 - 10 mars 2024

Partie 2 : 6 questions courtes

Durée : 60 minutes

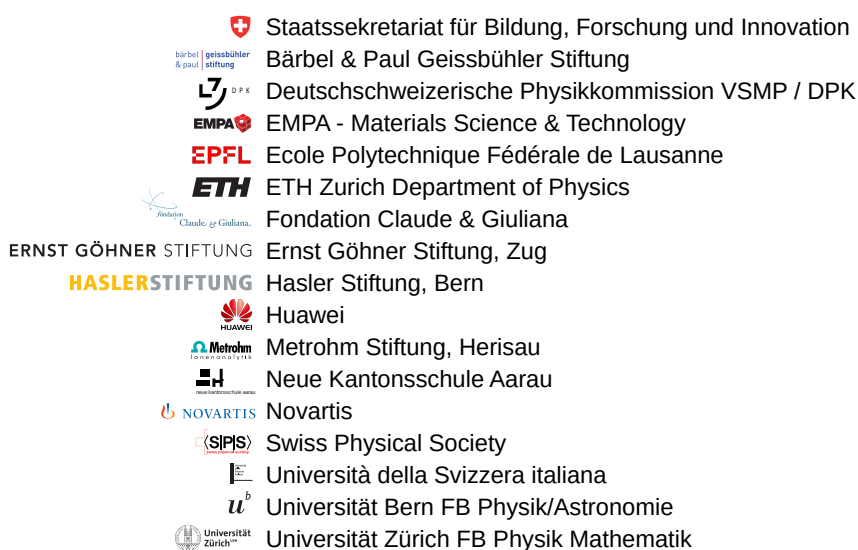
Total : 24 points (6×4)

Moyens autorisés : Calculatrice simple

Matériel pour écrire et dessiner

Bonne chance !

Supported by :



Constantes fondamentales

Fréquence hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse d'un rayonnement	K_{cd}	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Constante magnétique	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Constante des gaz	R	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Questions courtes

Durée : 60 minutes

Cotation : 24 points (6×4)

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

Question courte 2.1 : Courbe brachistochrone (4 points)

Une courbe brachistochrone est une courbe entre deux points le long de laquelle un corps peut se déplacer sous l'effet de la gravité en un temps plus court que pour toute autre courbe, en négligeant les frottements et la résistance de l'air (ce que nous faisons dans ce problème).

Nous considérons deux points, A et C , reliés par une rampe brachistochrone (ce qui signifie qu'une masse ponctuelle se déplaçant le long de la rampe empruntera le chemin le plus rapide possible), comme illustré dans la figure 1.

Un point B se trouve entre A et C sur la courbe brachistochrone. Une petite bille de rayon négligeable et de masse m se déplace le long de la rampe brachistochrone. Elle est initialement au repos au point A .

Au point B , la norme de sa vitesse est v_b et l'angle aigu entre sa vitesse et l'axe vertical y est $\theta_b \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

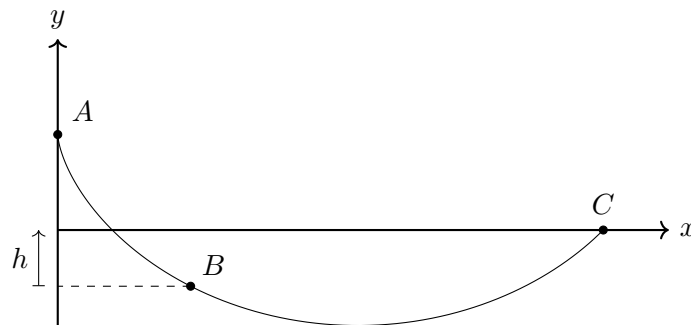


Figure 1 : Courbe brachistochrone entre les points A et C .

i. (0.5 pt) Quelle est la norme de la vitesse v de la particule en fonction du déplacement vertical Δy mesuré depuis le point B ?

ii. (2 pt) Quel est l'angle θ_c entre la vitesse et la verticale lorsque la balle arrive au point C ? Écrivez votre réponse en fonction de θ_b , v_b , h (la différence de hauteur entre B et C), g (l'accélération gravitationnelle) et m .

Indice : Trouvez la relation entre la norme de la vitesse et l'angle avec la verticale.

iii. (1.5 pt) Considérons à présent que la balle au point A possède une vitesse verticale initiale de norme v_a . La rampe serait-elle toujours un chemin de moindre temps dans ce cas ? En d'autres termes : existe-t-il une autre forme de rampe qui permettrait à la balle d'aller du point A au point C en moins de temps si la balle avait une énergie cinétique initiale donnée (la vitesse initiale a pour norme v_a mais la direction peut être choisie pour minimiser le temps) ? Expliquez votre raisonnement.

Question courte 2.2 : NEOWISE (4 points)

La comète C/2023 F3 (NEOWISE) est passée proche du Soleil en 2020. Sa période orbitale a été évaluée à 6800 ans. Effectuez les calculs en unités astronomiques et en années.

i. (2 pt) Estimez la distance maximale de la comète au Soleil.

ii. (2 pt) Estimez la vitesse de la comète à la moitié de la distance maximale.

Question courte 2.3 : Pendule (4 points)

Emmy veut construire une horloge à balancier. Pour cela, elle a besoin d'un pendule dont la période est exactement $T = 2.0\text{s}$. En particulier, Emmy veut que la période du pendule dépende le moins possible de la température. Emmy a trouvé le schéma de construction suivant sur internet :

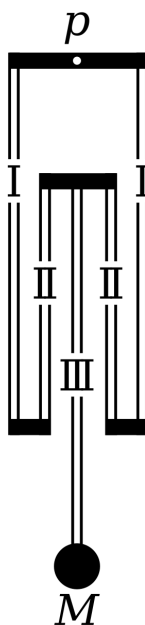


Figure 1 : Le pendule est suspendu au point p et se compose de tiges I-III, de liaisons transversales (en noir), et de la masse du pendule M . Les tiges I et II sont doublées pour des raisons de stabilité ; nous supposons que des tiges ayant le même numéro sont identiques.

Emmy sait qu'elle doit choisir différents matériaux et longueurs pour les trois tiges I-III. Elle veut que les tiges I et III aient la même longueur, c'est-à-dire $L_I = L_{III}$ et, pour que les liaisons transversales ne se touchent pas, $L_I > L_{II}$. Emmy dispose des matériaux suivants avec un coefficient de dilatation linéaire α :

Matériau	α/K^{-1} à 20°C
Aluminium	23×10^{-6}
Invar	1.0×10^{-6}
Laiton	19×10^{-6}
Acier	13×10^{-6}

Table 2

Supposez que la masse des tiges est négligeable par rapport au poids de la masse pendulaire M . On approximera également la masse pendulaire par une masse ponctuelle.

i. (3 pt) Spécifiez une combinaison de matériaux et de longueurs de tiges I-III qui remplit les conditions d'Emmy.

ii. (1 pt) Emmy a remarqué que malgré votre aide, la période du pendule change encore un peu en cas de grandes différences de température. Savez-vous à quoi cela peut être dû ? Donnez deux causes possibles.

Question courte 2.4 : Une fuite sur la station spatiale (4 points)

Nous nous trouvons dans une station spatiale d'un volume de $V = 500 \text{ m}^3$ au milieu de l'espace. La température est de $T = 25^\circ\text{C}$ et la pression atmosphérique de $p = 1 \text{ bar}$.

i. (1.5 pt) Quelle est la racine carrée de la vitesse quadratique moyenne $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ d'une molécule d'azote (N_2 , $M = 0.028 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$) ?

ii. (2.5 pt) Adrian l'astronaute découvre maintenant une fuite de taille $A = 0.001 \text{ m}^2$. Exprimez le nombre de molécules qui s'échappent dans l'espace par unité de temps $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ en fonction de A , $\langle |v_\perp| \rangle$, du nombre total de molécules de gaz N et V . Déterminez ensuite le temps qui s'écoule avant qu'une fraction 10^{-5} de l'air ne se soit échappée. Vous pouvez supposer que la pression de l'air dans la station spatiale ne change pas de manière significative au cours du processus. Vous pouvez également supposer que la variation du volume et du nombre de molécules est faible par rapport au volume total et au nombre total de molécules.

Indice : dans cette question, la relation $\langle |v_\perp| \rangle = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_{\text{rms}}$ s'applique, où v_\perp représente la vitesse le long de la direction perpendiculaire au trou. Pour estimer les quantités demandées, nous supposons pour simplifier que la moitié des molécules de gaz ont une vitesse $v_\perp = \langle |v_\perp| \rangle$ et l'autre moitié une vitesse $v_\perp = -\langle |v_\perp| \rangle$.

Question courte 2.5 : Circuit RLC couplé (4 points)

Comme pour les oscillateurs mécaniques, les circuits à courant alternatif peuvent être couplés. Considérons le circuit illustré dans la figure 1, où les deux boucles de courant sont couplées par l'inductance mutuelle L_{12} . Le but de cet exercice est d'étudier les fréquences autorisées de ce système.

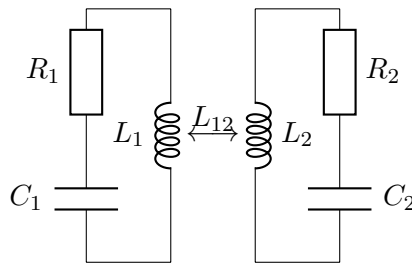


Figure 1 : Deux circuits RLC couplés de résistance R_n , inductance L_n , capacité C_n respectivement pour $n = 1, 2$ et l'inductance mutuelle L_{12} .

i. (1.5 pt) Écrivez la loi des mailles de Kirchhoff pour les deux circuits séparément, en tenant compte de l'inductance mutuelle L_{12} , et déterminez un système d'équations différentielles couplées du second ordre pour $I_1(t)$ et $I_2(t)$, le courant circulant dans la première et la seconde boucle, respectivement.

ii. (1.5 pt) En utilisant l'ansatz $I_n(t) = I_{0,n} e^{i\omega t}$ pour $n = 1, 2$, où i est l'unité imaginaire, montrez que l'équation suivante s'applique aux fréquences du système :

$$\left[R_1 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \left[R_2 + i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] = -\omega^2 L_{12}^2.$$

iii. (1 pt) En supposant pour simplifier que $R_1 = R_2 = 0$, $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, déterminez les deux fréquences autorisées ω_1 et ω_2 du système en fonction de $\frac{L_{12}}{L}$ et ω_0 , la fréquence de résonance d'un circuit LC .

Question courte 2.6 : Quatre polariseurs (4 points)

i. (4 pt) Quatre polariseurs linéaires sont placés en ligne. L'axe de polarisation du premier est tourné de 90° par rapport au quatrième. Les deux polariseurs intermédiaires peuvent être tournés pour ajuster la direction de leurs axes de polarisation. Un faisceau lumineux non polarisé d'intensité I_0 est dirigé sur le premier polariseur. Quelle est l'intensité maximale de la lumière sortant du quatrième polariseur ?

Questions courtes : solutions

Question courte 2.1 : Courbe brachistochrone

4

Une courbe brachistochrone est une courbe entre deux points le long de laquelle un corps peut se déplacer sous l'effet de la gravité en un temps plus court que pour toute autre courbe, en négligeant les frottements et la résistance de l'air (ce que nous faisons dans ce problème).

Nous considérons deux points, A et C , reliés par une rampe brachistochrone (ce qui signifie qu'une masse ponctuelle se déplaçant le long de la rampe empruntera le chemin le plus rapide possible), comme illustré dans la figure 1.

Un point B se trouve entre A et C sur la courbe brachistochrone. Une petite bille de rayon négligeable et de masse m se déplace le long de la rampe brachistochrone. Elle est initialement au repos au point A .

Au point B , la norme de sa vitesse est v_b et l'angle aigu entre sa vitesse et l'axe vertical y est $\theta_b \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

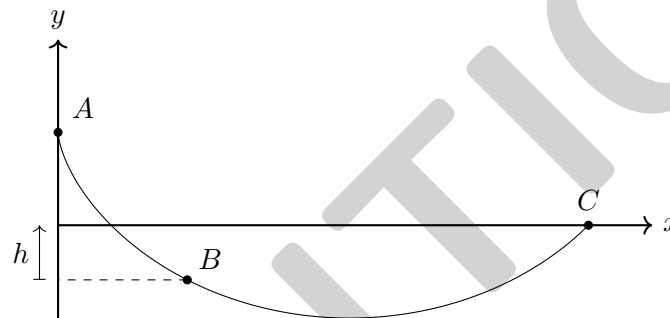


Figure 1 : Courbe brachistochrone entre les points A et C .

i. Quelle est la norme de la vitesse v de la particule en fonction du déplacement vertical Δy mesuré depuis le point B ?

0.5

Using the conservation of energy, we have for a fourth point D on the ramp $E_b = E_d$, which gives

$$\begin{aligned} mgy_b + \frac{1}{2}mv_b^2 &= mgy_d + \frac{1}{2}mv_d^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mv_d^2 &= \frac{1}{2}mv_b^2 - mg\Delta y \\ \Rightarrow v &= v_d = \sqrt{v_b^2 - 2g\Delta y}. \end{aligned}$$

0.5

ii. Quel est l'angle θ_c entre la vitesse et la verticale lorsque la balle arrive au point C ? Écrivez votre réponse en fonction de θ_b , v_b , h (la différence de hauteur entre B et C), g (l'accélération gravitationnelle) et m .

Indice : Trouvez la relation entre la norme de la vitesse et l'angle avec la verticale.

2

The particle is following the path of shortest time. We know from Fermat's principle of least time that light travels on the path of least possible time between two points. This tells us that the particle will

follow the same path that light would (0.5 point for the idea of using optics). We know from Snell's law that $\frac{\sin(\theta)}{v} = K$ where K is a constant (0.5 point). Using the values from point B we obtain the value

$$K = \frac{\sin(\theta_b)}{v_b}.$$

Using the result from the previous question, the velocity at point C will be given by

$$v_c = \sqrt{v_b^2 - 2gh},$$

1

which gives (any form which is correct and is written as a function of the required variables gives the full point)

$$\theta_c = \arcsin(Kv_c) = \arcsin\left(\frac{\sin(\theta_b)}{v_b} \sqrt{v_b^2 - 2gh}\right) = \arcsin\left(\sin(\theta_b) \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_b^2}}\right).$$

1

iii. Considérons à présent que la balle au point A possède une vitesse verticale initiale de norme v_a . La rampe serait-elle toujours un chemin de moindre temps dans ce cas ? En d'autres termes : existe-t-il une autre forme de rampe qui permettrait à la balle d'aller du point A au point C en moins de temps si la balle avait une énergie cinétique initiale donnée (la vitesse initiale a pour norme v_a mais la direction peut être choisie pour minimiser le temps) ? Expliquez votre raisonnement.

1.5

The answer is no.

0.5

The marking scheme will detail two possible ways to answer the question. Any reasoning that makes sense, as long as it is well thought out and well explained is accepted. The level of detail should resemble the one of the solutions presented in the marking scheme to achieve full points.

The first way to answer this question is using optics. As we saw before, the path of the ball should follow Snell's law of refraction, meaning that

$$K = \frac{\sin(\theta_a)}{v_a}.$$

Let us assume that the curve of least time in the case of a non-vanishing initial velocity is the brachistochrone curve. Then, at point A , we have $\theta_a = 0$ (a non-vanishing angle would correspond to sliding on an inclined plane for small x , which for a fixed height difference takes more time than a free fall trajectory), which gives

$$K = \frac{0}{v_a} = 0$$

(note that this was not the case before because with $v_a = 0$ we have an undetermined ratio " $K = \frac{0}{0}$ " at the point A). Therefore, to follow Snell's law given the initial conditions, the angle θ should be equal to 0 throughout the whole curve, which is not possible, except if C is right under A , which is not the case here. So, the brachistochrone can only be the correct curve in the trivial case where C lies just below A if there is a non-vanishing initial velocity.

1

Solution alternative :

(1.5)

The second way of solving this question is to try to understand what would happen when we make v_a very big. Let us consider the case

$$v_a^2 \gg -2g\Delta y,$$

where Δy is taken to be negative. We know from before that by the conservation of energy

$$\sqrt{v_a^2 - 2g\Delta y} - v_a = \Delta v,$$

which yields

$$\Delta v \approx 0$$

with our assumptions. The ball will thus have approximately the same speed throughout its path. The path of shortest time between two points for an object moving with constant speed is a straight line, so we can see that as we increase the value of v_a , the path of shortest time will approach a straight line, meaning that the initial velocity has an impact on the path of shortest time under gravity.

(1.5)

SOLUTION

Question courte 2.2 : NEOWISE**4**

La comète C/2023 F3 (NEOWISE) est passée proche du Soleil en 2020. Sa période orbitale a été évaluée à 6800 ans. Effectuez les calculs en unités astronomiques et en années.

i. Estimez la distance maximale de la comète au Soleil.**2**

We can use Kepler's third law and compare to the Earth, as they both orbit the Sun:

$$\frac{a_E^3}{T_E^2} = \frac{a_N^3}{T_N^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

0.5

With such a high period, the trajectory is very excentric and we can approximate the maximum distance as twice the semi-major axis.

0.5

This gives

$$d \approx 2a_N = 2a_E \left(\frac{T_N}{T_E} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

0.5

a_E is roughly equivalent to an astronomical unit and T_E is one year, so

$$d \approx 2 \cdot 1 \text{ au} \cdot (6800)^{\frac{2}{3}} \approx 718 \text{ au}.$$

0.5

The actual value (taking the excentricity properly into account) has been estimated at about 710 au.

ii. Estimez la vitesse de la comète à la moitié de la distance maximale.**2**

We can take the trajectory as approximately one-dimensional and assume the speed to be zero at the farthest point, and e.g. use energy conservation.

0.5

$$-\frac{GMm}{d} = -\frac{GMm}{\frac{d}{2}} + \frac{1}{2}mv^2,$$

so

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{d}}.$$

0.5

We know from Kepler's third law that $GM = 4\pi^2 \frac{a_E^3}{T_E^2}$.

0.5

So

$$v = 2\pi \frac{1}{T_E} \sqrt{\frac{2a_E^3}{d}} \approx 0.332 \text{ au} \cdot \text{a}^{-1}.$$

0.5

Question courte 2.3 : Pendule

4

Emmy veut construire une horloge à balancier. Pour cela, elle a besoin d'un pendule dont la période est exactement $T = 2.0$ s. En particulier, Emmy veut que la période du pendule dépende le moins possible de la température. Emmy a trouvé le schéma de construction suivant sur internet :

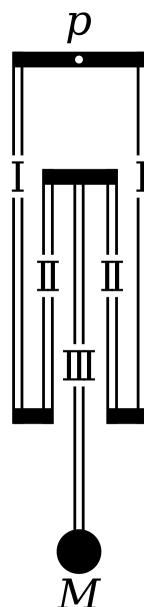


Figure 1 : Le pendule est suspendu au point p et se compose de tiges I-III, de liaisons transversales (en noir), et de la masse du pendule M . Les tiges I et II sont doublées pour des raisons de stabilité ; nous supposons que des tiges ayant le même numéro sont identiques.

Emmy sait qu'elle doit choisir différents matériaux et longueurs pour les trois tiges I-III. Elle veut que les tiges I et III aient la même longueur, c'est-à-dire $L_I = L_{III}$ et, pour que les liaisons transversales ne se touchent pas, $L_I > L_{II}$. Emmy dispose des matériaux suivants avec un coefficient de dilatation linéaire α :

Matériau	α/K^{-1} à 20°C
Aluminium	23×10^{-6}
Invar	1.0×10^{-6}
Laiton	19×10^{-6}
Acier	13×10^{-6}

Table 2

Supposez que la masse des tiges est négligeable par rapport au poids de la masse pendulaire M . On approximera également la masse pendulaire par une masse ponctuelle.

i. Spécifiez une combinaison de matériaux et de longueurs de tiges I-III qui remplit les conditions d'Emmy.

3

We have $T = 2\pi\sqrt{L_{\text{tot}}/g}$, hence we find $L_{\text{tot}} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$. For $T = 2.0\text{ s}$ we get $L_{\text{tot}} = 99\text{ cm}$ (numerical value is not required).

0.5

The length L of any rod goes as $L(1 + \alpha\Delta\tau)$ given a temperature difference $\Delta\tau$. (The points are also given if this fact is used but not explicitly stated.)

0.5

We have

$$L_{\text{tot}} = L_{\text{I}} - L_{\text{II}} + L_{\text{III}} \quad (3)$$

In order for the pendulum to be as precise as possible, we want the change in length to be zero. The change in length given a temperature difference $\Delta\tau$ with coefficients $\alpha_{\text{I}}, \alpha_{\text{II}}, \alpha_{\text{III}}$ is given by:

$$\Delta L_{\text{tot}} = (L_{\text{I}}\alpha_{\text{I}} - L_{\text{II}}\alpha_{\text{II}} + L_{\text{III}}\alpha_{\text{III}})\Delta\tau \quad (4)$$

using $L_{\text{I}} = L_{\text{III}}$ and requiring $\Delta L_{\text{tot}} = 0$ for any $\Delta\tau$ we find the following condition:

$$L_{\text{I}}(\alpha_{\text{I}} + \alpha_{\text{III}}) = L_{\text{II}}\alpha_{\text{II}} \quad (5)$$

1

The constraint $L_{\text{I}} > L_{\text{II}}$ implies that $\alpha_{\text{I}} + \alpha_{\text{III}} > \alpha_{\text{II}}$. The possible combinations of materials (up to exchanging I and III) are listed in the table below. They only need to list one (correct) variant. (0.25) for a correct choice of materials, (0.75) for the correct lengths.

I	II	III	$L_{\text{I}} = L_{\text{III}}$	L_{II}
Invar	Aluminium	Invar	$\frac{23}{44}L_{\text{tot}} = 52\text{ cm}$	$\frac{2}{44}L_{\text{tot}} = 4.5\text{ cm}$
Invar	Messing	Invar	$\frac{19}{36}L_{\text{tot}} = 52\text{ cm}$	$\frac{2}{36}L_{\text{tot}} = 5.5\text{ cm}$
Invar	Stahl	Invar	$\frac{13}{24}L_{\text{tot}} = 54\text{ cm}$	$\frac{2}{24}L_{\text{tot}} = 8.3\text{ cm}$
Invar	Aluminium	Stahl	$\frac{23}{32}L_{\text{tot}} = 71\text{ cm}$	$\frac{14}{32}L_{\text{tot}} = 43\text{ cm}$
Invar	Messing	Stahl	$\frac{19}{24}L_{\text{tot}} = 78\text{ cm}$	$\frac{14}{24}L_{\text{tot}} = 58\text{ cm}$
Invar	Aluminium	Messing	$\frac{23}{26}L_{\text{tot}} = 88\text{ cm}$	$\frac{20}{26}L_{\text{tot}} = 76\text{ cm}$

1

ii. Emmy a remarqué que malgré votre aide, la période du pendule change encore un peu en cas de grandes différences de température. Savez-vous à quoi cela peut être dû ? Donnez deux causes possibles.

1

Possible reasons are: 1. Thermal expansion is only approximately linear and the approximation gets worse for large temperature differences. 2. The rods also have masses, which shift and change the period of the pendulum. 3. Thermal expansion also affects other parts of the clock, which can decrease the precision. Other sensible answers are also accepted. Give 0.5 points if only one reason is given.

1

Question courte 2.4 : Une fuite sur la station spatiale**4**

Nous nous trouvons dans une station spatiale d'un volume de $V = 500 \text{ m}^3$ au milieu de l'espace. La température est de $T = 25^\circ\text{C}$ et la pression atmosphérique de $p = 1 \text{ bar}$.

i. Quelle est la racine carrée de la vitesse quadratique moyenne $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ d'une molécule d'azote (N_2 , $M = 0.028 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$) ?

1.5

The rms velocity is

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{5RT}{M}}.$$

1

Either one knows the formula by heart or it can be derived from Maxwell's distribution or equipartition

$$\frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{2}m\langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{5}{2}k_B T$$

where we have 5 degrees of freedom due to two additional rotational degrees of freedom at room temperature for diatomic nitrogen gas.

We get a numerical value $v_{\text{rms}} = 665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

0.5

ii. Adrian l'astronaute découvre maintenant une fuite de taille $A = 0.001 \text{ m}^2$. Exprimez le nombre de molécules qui s'échappent dans l'espace par unité de temps $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ en fonction de A , $\langle |v_\perp| \rangle$, du nombre total de molécules de gaz N et V . Déterminez ensuite le temps qui s'écoule avant qu'une fraction 10^{-5} de l'air ne se soit échappée. Vous pouvez supposer que la pression de l'air dans la station spatiale ne change pas de manière significative au cours du processus. Vous pouvez également supposer que la variation du volume et du nombre de molécules est faible par rapport au volume total et au nombre total de molécules.

Indice : dans cette question, la relation $\langle |v_\perp| \rangle = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_{\text{rms}}$ s'applique, où v_\perp représente la vitesse le long de la direction perpendiculaire au trou. Pour estimer les quantités demandées, nous supposons pour simplifier que la moitié des molécules de gaz ont une vitesse $v_\perp = \langle |v_\perp| \rangle$ et l'autre moitié une vitesse $v_\perp = -\langle |v_\perp| \rangle$.

2.5

A particle leaves through the hole during a time Δt in case it is within a distance $\Delta x = \Delta t v_\perp$ and it is moving towards the hole. In average we get

$$\Delta x = \Delta t \langle |v_\perp| \rangle.$$

0.5

So we find the exiting particles by multiplying the corresponding volume with the particle density

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \Delta V \frac{n}{V} = \frac{1}{2} A \langle |v_\perp| \rangle \frac{n}{V}.$$

The factor $\frac{1}{2}$ is because half of the particles are moving away from the hole.

1

In our case we require

$$\Delta n = cn$$

where $c = 10^{-5}$.

0.5

We can solve for Δt and get

$$\Delta t = \frac{2cV}{A \langle |v_\perp| \rangle} = \frac{2cV}{A \sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_{\text{rms}}} = 33 \text{ ms}.$$

0.5

Question courte 2.5 : Circuit RLC couplé**4**

Comme pour les oscillateurs mécaniques, les circuits à courant alternatif peuvent être couplés. Considérons le circuit illustré dans la figure 1, où les deux boucles de courant sont couplées par l'inductance mutuelle L_{12} . Le but de cet exercice est d'étudier les fréquences autorisées de ce système.

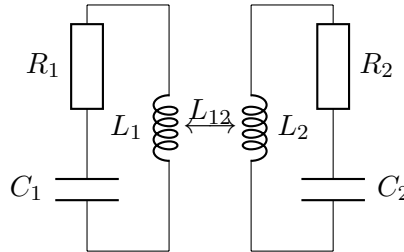


Figure 1 : Deux circuits RLC couplés de résistance R_n , inductance L_n , capacité C_n respectivement pour $n = 1, 2$ et l'inductance mutuelle L_{12} .

i. Écrivez la loi des mailles de Kirchhoff pour les deux circuits séparément, en tenant compte de l'inductance mutuelle L_{12} , et déterminez un système d'équations différentielles couplées du second ordre pour $I_1(t)$ et $I_2(t)$, le courant circulant dans la première et la seconde boucle, respectivement.

1.5

The Kirchhoff's loop rule (voltage law) gives

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} + R_1 I_1 &= -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 &= -L_{12} \frac{dI_1}{dt}. \end{aligned}$$

1

To find a second order coupled system, one can take the time derivative of the above and get

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1 &= -L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2}, \\ L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} I_2 &= -L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2}. \end{aligned}$$

0.5

ii. En utilisant l'ansatz $I_n(t) = I_{0,n} e^{i\omega t}$ pour $n = 1, 2$, où i est l'unité imaginaire, montrez que l'équation suivante s'applique aux fréquences du système :

$$\left[R_1 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \left[R_2 + i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] = -\omega^2 L_{12}^2.$$

1.5

Because of the coupling, the frequencies of both RLC loops are equal. Inserting the ansatz in the system from the previous question gives

$$\begin{aligned} \left(-L_1\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_1}\right) I_1 &= L_{12}\omega^2 I_2, \\ \left(-L_2\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_2}\right) I_2 &= L_{12}\omega^2 I_1. \end{aligned}$$

Multiplying both equations then yields

$$\left[-L_1\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_1}\right] \left[-L_2\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_2}\right] I_1 I_2 = L_{12}^2 \omega^4 I_1 I_2.$$

This has only non-trivial solutions for non-vanishing currents I_1 and I_2 , so one can divide both sides by $I_1 I_2$ and multiply both sides by $\frac{i^2}{\omega^2}$ in order to reach the desired form:

$$\left[R_1 + i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right] \left[R_2 + i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right] = -\omega^2 L_{12}^2.$$

1.5

iii. En supposant pour simplifier que $R_1 = R_2 = 0$, $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, déterminez les deux fréquences autorisées ω_1 et ω_2 du système en fonction de $\frac{L_{12}}{L}$ et ω_0 , la fréquence de résonance d'un circuit LC .

1

The resonance frequency of a LC circuit is given by $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

0.25

In this simplified case, the previous equation for the frequency becomes

$$\begin{aligned} \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2 &= L_{12}^2 \omega^2 \\ \Rightarrow \pm L\omega \mp \frac{1}{\omega C} &= L_{12}\omega \\ \Rightarrow \omega^2 &= \pm \frac{1}{(\pm L - L_{12})C} = \frac{1}{(L \mp L_{12})C} \end{aligned}$$

with solutions

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{(L - L_{12})C}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{1 - \frac{L_{12}}{L}}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{(L + L_{12})C}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{1 + \frac{L_{12}}{L}}}. \end{aligned}$$

0.75

Question courte 2.6 : Quatre polariseurs**4**

i. Quatre polariseurs linéaires sont placés en ligne. L'axe de polarisation du premier est tourné de 90° par rapport au quatrième. Les deux polariseurs intermédiaires peuvent être tournés pour ajuster la direction de leurs axes de polarisation. Un faisceau lumineux non polarisé d'intensité I_0 est dirigé sur le premier polariseur. Quelle est l'intensité maximale de la lumière sortant du quatrième polariseur ?

4

After the first polarizer the intensity is $\frac{1}{2}I_0$.

0.25

By Malus' law, if linearly polarized light of intensity I_1 passes through a linear polarizer with axis tilted by angle θ with respect to the polarization axis of the incoming light, the transmitted beam will have intensity $I_1 \cos(\theta)^2$.

0.5

If the intermediate polarizers are tilted by θ_1 and θ_2 with respect to the first polarizer, the transmitted light has intensity $I_t = \frac{1}{2}I_0 \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)^2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2)^2$.

1

For the optimal choice of θ_1, θ_2 we have $\frac{\partial I_t}{\partial \theta_1} = \frac{\partial I_t}{\partial \theta_2} = 0$.

1

Note that

$$\frac{\partial I_t}{\partial \theta_1} \propto \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

and

$$\frac{\partial I_t}{\partial \theta_2} \propto \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) - \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right).$$

Hence, the optimal choice is $\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \frac{\pi}{3}$.

1

The optimal intensity of the transmitted light therefore is $\frac{1}{2}I_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)^6 \approx 0.21I_0$.

0.25