PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

9. - 10. März 2024

Teil 1	**:**	**3 lange Aufgaben**
Zeit	:	150 Minuten
Total	:	48 Punkte (3×16)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Einfacher Taschenrechner
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Bärbel & Paul Geissbühler Stiftung
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Huawei
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#cec17ec7

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Lange Aufgaben

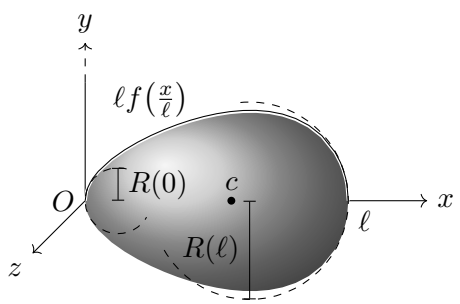
Zeit: 150 Minuten
Maximalpunktzahl: 48 Punkte (3×16)

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiter zu lesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Lange Aufgabe 1.1: Stabilität eines rotierenden Eis *(16 Punkte)*

Wir betrachten ein Ei, das durch einen homogenen Rotationskörper mit dem Profil $f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t - t^4}$ auf dem Gebiet $t \in [a = 0, b = 1]$ dargestellt wird. Um dieses Profil in physikalische Einheiten umzuwandeln, wenden wir einen Längenfaktor ℓ an. Das Ei hat eine Dichte ρ.
Der Massenmittelpunkt des Eis befindet sich bei $x = c = \frac{5}{9}\ell$.



Teil A. Zum Einwärmen *(0.5 Punkte)*

i. (0.5 Pkte.) Berechne das Volumen V des Eis.

Teil B. Trägheitsmoment *(8.5 Punkte)*

Das Trägheitsmoment eines Festkörpers bezüglich einer Achse A ist gegeben durch

$$I_A = \iiint_V \rho D_A^2(x, y, z)\,\mathrm{d}V,$$

wobei $D_A(x, y, z)$ der (senkrechte) Abstand des Punktes (x, y, z) von der Achse A ist.

i. (1.75 Pkte.) Bestimme für eine homogene Kugel mit derselben Dichte ρ und demselben Volumen V wie das Ei das Trägheitsmoment entlang einer Achse, die durch ihren Mittelpunkt verläuft. Dazu kannst du die Kugel in eine Reihe von Ringen mit den Radien $0 \leq s \leq r$, der Dicke $\mathrm{d}s$ und der Breite $\mathrm{d}x$ zerlegen, wobei r der Radius der Kugel ist. Das Integral wird dann zu

$$I_\mathrm{B} = 2\pi\rho \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} s^3 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.$$

Zur Berechnung eines solchen mehrfachen Integrals wird zunächst das innere Integral (über $\mathrm{d}s$) berechnet, wobei x konstant bleibt, und dann das äussere Integral über $\mathrm{d}x$.
Das Ergebnis sollte die folgende Form haben

$$I_\mathrm{B} = k\pi\rho\ell^5,$$

wobei k ein dimensionsloser Faktor ist.

ii. (2.5 Pkte.) Bestimme das Trägheitsmoment I_{cx} des Eis entlang der Achse x durch den Massenmittelpunkt c, wobei du dich an der obigen Berechnung für die Kugel orientieren kannst.

iii. (2 Pkte.) Bestimme das Trägheitsmoment I_{Oz} des Eis entlang der Achse z durch den Ursprung O. Diesmal haben wir keine Rotationssymmetrie um die Achse und wir können nicht den Radius s betrachten. Stattdessen kann das Integral in kartesischen Koordinaten gelöst werden, in der Form

$$I_{Oz} = \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \rho\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Du kannst ohne Beweis verwenden, dass

$$\int_{-|w|}^{|w|} \left(v^2 + x^2\right)\sqrt{w^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\pi w^2\left(4v^2 + w^2\right).$$

iv. (1 Pkt.) Leite das Trägheitsmoment I_{cz} des Eis entlang der Achse z durch den Massenmittelpunkt c ab.

v. (0.5 Pkte.) Was ist der Wert von I_{cy}? Begründe deine Antwort.

vi. (0.75 Pkte.) Überprüfe, dass

$$I_{cx} < I_{\mathrm{B}} < I_{cz} < I_{Oz}$$

und begründe warum.

I_{cx}, I_{cy} und I_{cz} sind Elemente des sogenannten *Trägheitstensor* des Festkörpers, der das Trägheitsmoment auf Fälle verallgemeinert, in denen der Festkörper keine Rotationssymmetrie um seine Drehachse besitzt.
Wenn sich ein Rotationskörper um eine Achse dreht, die durch seinen Massenmittelpunkt verläuft und unter einem Winkel θ zu seiner Symmetrieachse geneigt ist, dann beträgt sein Trägheitsmoment entlang der Rotationsachse

$$I = I_{\parallel} \cos^2(\theta) + I_{\perp} \sin^2(\theta)\,,$$

wobei $I_{\parallel}$ das Trägheitsmoment entlang der Symmetrieachse und $I_{\perp}$ das Trägheitsmoment entlang einer Achse ist, die senkrecht dazu steht und durch den Massenmittelpunkt verläuft.

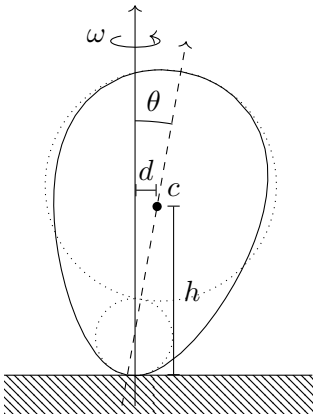
Teil C. Stabilität des rotierenden Eis *(7 Punkte)*

An jedem Punkt einer ausreichend regelmässigen $g(x)$ Kurve kann man einen *Krümmungskreis* definieren, als derjenige Kreis, der die Kurve an diesem Punkt am besten approximiert. Sein Radius wird als *Krümmungsradius* der Kurve an diesem Punkt bezeichnet, und beträgt

$$R(x) = \frac{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x)\right|}.$$

Für das Profil $\ell f\left(\frac{x}{\ell}\right)$ des Eis erhält man $R(0) = \frac{1}{8}\ell$ und $R(\ell) = \frac{3}{8}\ell$.

Wir drehen das Ei auf seiner Spitze und möchten die Winkelgeschwindigkeit ω bestimmen, die mindestens erforderlich ist, damit es nicht kippt. Dazu betrachten wir das Ei in einem Winkel $\theta \ll 1$ zur Vertikalen geneigt, wobei es sich um die vertikale Achse dreht, die durch seinen Berührungspunkt mit dem Boden verläuft.



i. (1.5 Pkte.) Bestimme die Höhe $h(\theta)$ des Massenmittelpunkts und seinen Abstand $d(\theta)$ von der Drehachse. Der Winkel θ ist klein, sodass du die Krümmung der Spitze des Eis durch die Krümmung seines Krümmungskreises annähern kannst.

ii. (2.5 Pkte.) Bestimme die gesamte mechanische Energie des Eis $E(\theta)$, wiederum unter der Annahme, dass der Winkel klein ist.

iii. (2.5 Pkte.) Leite die Bedingung für ω ab, damit das Ei stabil um seine Spitze rotieren kann. Was fällt dir auf?

iv. (0.5 Pkte.) Berechne den numerischen Wert von ω für $\ell = 6\,\mathrm{cm}$ und dem Eigewicht $m = 60\,\mathrm{g}$. Berechne auch den Zahlenwert für die Rotationsfrequenz ν.

Lange Aufgabe 1.2: Dampfschiff *(16 Punkte)*

Vor einigen Jahren unternahm eine Gruppe von Teilnehmenden und Freiwilligen im Rahmen eines Team-Events eine Bootsfahrt auf dem Vierwaldstättersee. Glücklicherweise konnten sie die Fahrt auf einem Dampfschiff machen, an dem neben der grossen Dampfmaschine ein Datenblatt befestigt war. Davon inspiriert, wollen wir die Dampfmaschine untersuchen und über ihre Konstruktion nachdenken. In Abbildung 1 ist eine solche Maschine skizziert.

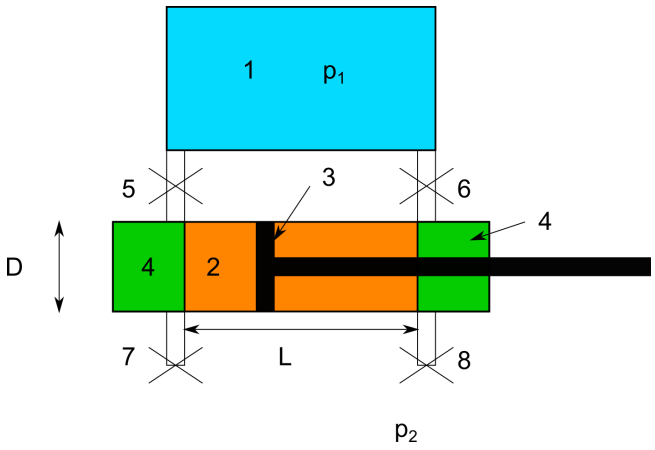


Abbildung 1: Skizze einer Dampfmaschine. 1: Das Dampfreservoir (blau) mit konstantem Druck p_1. 2: Zylinder (Durchmesser D, grüner und oranger Bereich), in dem sich der Kolben (3) im orangen Bereich über die Strecke L bewegt. 4: Minimales Volumen V_0 (jeder grüne Bereich), das verbleibt, wenn sich der Kolben am entsprechenden Ende des Zylinders befindet. 5 und 6: Ventile zur Steuerung des Dampfstroms aus dem Vorratsbehälter (1) in den Zylinder. 7 und 8: Ventile zur Steuerung des Dampfstroms aus dem Zylinder nach aussen, wo der Druck p_2 herrscht.

Teil A. Leistung *(16 Punkte)*

Einige weitere Informationen zur Dampfmaschine: Sie besteht aus einem Zylinder mit einem Durchmesser $D = 800\,\text{mm}$. Der Dampfdruck beträgt $p_1 = 13\,\text{bar}$ (absoluter Druck). Der Kolben gleitet im Zylinder um eine Distanz $L = 1300\,\text{mm}$. Der Motor führt 48 volle Zyklen pro Minute durch.

i. (6 Pkte.) Nimm an, dass bei der Bewegung des Kolbens von links nach rechts die Ventile 5 und 8 ständig geöffnet sind (6 und 7 geschlossen). Die Ventile ändern ihren Zustand sofort, sobald der Kolben den Wendepunkt rechts erreicht und sich nach links zu bewegen beginnt (die Ventile schalten sofort wieder um, wenn sie den linken Wendepunkt erreichen). Schätze die Leistung der Dampfmaschine als Funktion der gegebenen Variablen ab und berechne den entsprechenden Zahlenwert. Triff gegebenenfalls Annahmen und begründe und dokumentiere diese.

ii. (7 Pkte.) Die in der obigen Aufgabe beschriebene Steuerung der Ventile ist ziemlich ineffizient. Denn wenn die Ventile umschalten, geben sie die im Dampf mit hohem Druck p_1 gespeicherte Energie an die Umgebung (bei Druck p_2) ab. Um den Wirkungsgrad zu optimieren, ändern wir nun die Ventilsteuerung: Wenn der Kolben am äussersten linken Punkt steht, öffnet sich das Ventil 5 schnell und füllt das linke Volumen 4 mit Dampf mit Druck p_1. Dann schliesst sich das Ventil 5 wieder und bleibt für den Rest des Zyklus geschlossen. Während der Bewegung des Kolbens nach rechts ist das Ventil 8 ständig geöffnet, während die anderen Ventile geschlossen sind. Wir nehmen an, dass die Zeit Δt, während der das Ventil 5 geöffnet ist, kurz ist, d. h. $\Delta t \ll T$ mit T der Periode des Kolbenzyklus. Wenn sich der Kolben in die entgegengesetzte Richtung bewegt, öffnen und schliessen sich die Ventile entsprechend. Schätze die Leistung in dieser Situation formal und numerisch ab. Triff gegebenenfalls Annahmen zu unbekannten Grössen, und begründe und dokumentiere diese.

iii. (3 Pkte.) Die Leistung auf dem Datenblatt wird als 331 kW angegeben[1]. Vergleiche diesen Wert mit deinen Berechnungen in Teilaufgaben i. und ii. und diskutiere deinen Vergleich qualitativ (d.h. warum beide Werte ziemlich gut übereinstimmen oder warum sie nicht übereinstimmen).

[1] Die Dampfmaschine auf dem Boot hat 3 Zylinder, der Wert hier wurde bereits durch 3 geteilt.

Lange Aufgabe 1.3: Pion-Zerfälle *(16 Punkte)*

Teil A. Pion-Strahl *(3 Punkte)*

Für ein Teilchenphysikexperiment werden (positive) Pionen (π^+) benötigt, welche in einem Strahl mit Impuls $p = 65\,\mathrm{MeV/c}$ transportiert werden. Bei der Pionproduktion entstehen aber auch noch Anti-Myonen (μ^+) und Positronen (e^+), welche alle dieselbe Ladung und Impuls haben. Sie unterscheiden sich jedoch in Masse ($m_\pi = 140\,\mathrm{MeV/c^2}$, $m_\mu = 106\,\mathrm{MeV/c^2}$, $m_e = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$) und Lebensdauer ($\tau_\pi = 26\,\mathrm{ns}$, $\tau_\mu = 2197\,\mathrm{ns}$). Das Positron ist im Vakuum stabil.

i. (1.5 Pkte.) Mit welcher Geschwindigkeit sind die einzelnen Teilchen im Strahl unterwegs?

ii. (1.5 Pkte.) Die Strahlquelle produziert alle drei Teilchensorten im Abstand $T = 20\,\mathrm{ns}$. Das heisst, dass alle 20 ns, Pionen, Anti-Myonen und Positronen in die Strahllinie geschossen werden. In welchem Zeitabstand relativ zu den Pionen kann man beim Experiment Anti-Myonen sehen, wenn die Strahllinie 16 m lang ist?

Teil B. Zerfalls-Arten *(4.5 Punkte)*

Im Folgenden betrachten wir zwei Arten, wie Pionen zerfallen können. Anti-Myonen zerfallen immer zu Positronen.

$\pi^+ \to e^+\nu_e$	0.01 %
$\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$	99.99 %
$\mu^+ \to e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$	100 %

Die (Anti-)Neutrinos ν_e, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$ sind (beinahe) masselose Teilchen, die nicht detektierbar sind.
Ein Pion kann also entweder direkt zu einem Positron zerfallen («$\pi \to e$») oder zuerst zu einem Myon, welches dann zu einem Positron zerfällt («$\pi \to \mu \to e$»). Im Experiment werden alle Pionen gestoppt. Falls das Pion zu einem Myon zerfällt, wird dieses innert weniger Pikosekunden ebenfalls gestoppt. Alle Teilchen in dieser Teilaufgabe zerfallen ruhend.

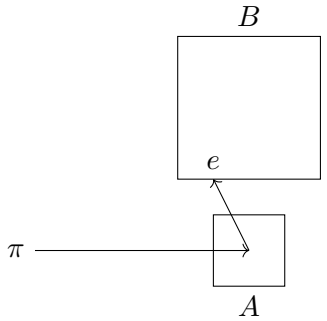
i. (1 Pkt.) Welche Energie $E_e^{\pi\to e}$ hat ein Positron, welches direkt aus einem Pionenzerfall ($\pi \to e\nu_e$) stammt? Wir vernachlässigen die Masse des Positrons in Bezug auf die Pionenmasse und die Positronenenergie ($m_e c^2 \ll E_e^{\pi\to e}, m_\pi c^2$).

ii. (1.5 Pkte.) Wie hoch ist die maximale Energie $E_{e,\max}^{\mu\to e}$ eines Positrons, wenn das Pion zuerst zu einem Anti-Myon zerfällt und das Anti-Myon dann zu einem Positron zerfällt ($\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu, \mu^+ \to e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$)? Begründe warum. Wir vernachlässigen die Masse des Positrons in Bezug auf die Anti-Myonenmasse und die Positronenenergie ($m_e c^2 \ll E_e^{\mu\to e}, m_\mu c^2$).

iii. (2 Pkte.) Beide Pion-Zerfallsarten haben ein messbares Positron am Ende. Skizziere die zeitliche Verteilung von Positronen aus «$\pi \to e$» und «$\pi \to \mu \to e$» Zerfällen ($N_e^{\pi\to e}(t)$ und $N_e^{\pi\to\mu\to e}(t)$). Die Zeit des Pion-Stopps wird dabei als Referenz $t = 0$ genommen.

Teil C. Detektorsystem *(5 Punkte)*

Das Experiment besteht aus zwei Detektoren. Der Strahl trifft auf Detektor A, welcher Pionen stoppt, jedoch von Anti-Myonen und Positronen durchschossen wird. Er misst die Ankunftszeit der Pionen. Detektor B befindet sich seitlich von Detektor A. Wenn ein Positron auf Detektor B trifft, dann wird die Energie des Positrons in einem zylindrischen Volumen von einigen cm Durchmesser verteilt. Detektor B misst sowohl die vom Positron abgegebene Energie (Energiedeposit, E_{dep}) als auch die Zeit t_e des Positrons.



i. (2 Pkte.) Es zeigt sich, dass das von Detektor B gemessene Energiedeposit E_{dep} oftmals kleiner ist als die Energie des Positrons. Aus welchen Gründen kann das passieren? Nenne zwei.

ii. (2 Pkte.) Wenn ein Pion zu einem Myon zerfällt, wird dieses innert 13 ps gestoppt. Welcher Teil der Anti-Myonen zerfällt im Flug, also schneller als 13 ps?

iii. (1 Pkt.) In $c_T \approx 1\,\%$ der «$\pi \to e$» Zerfälle ist die gemessene Energie des Positrons (Energiedeposit) so gering, dass es nicht von einem Positron eines «$\pi \to \mu \to e$» Zerfalls zu unterscheiden ist. Für Anti-Myon Zerfälle im Flug («Decay in Flight», DIF) lässt sich kein Unterschied in der Zeitverteilung feststellen. Anti-Myon Zerfall im Flug und «$\pi \to e$» Zerfälle mit grossem Energieverlust sind also kaum zu unterscheiden. Wie steht es um das Verhältnis $p_{\text{low}}^{\pi\to e}/p_{\text{DIF}}^{\pi\to\mu\to e}$ der zwei Zerfälle relativ zueinander?

Teil D. $R_{e/\mu}$ *(3.5 Punkte)*

Das Verhältnis $R_{e/\mu}$ wird aus den Zerfallswahrscheinlichkeiten des Pions zu einem Anti-Myon bzw. zu einem Positron berechnet

$$R_{e/\mu} = \frac{p(\pi \to e)}{p(\pi \to \mu)}.$$

Ziel des Experiments ist es, dieses Verhältnis mit einer Genauigkeit von 0.01 % zu messen. In einer sehr vereinfachten Form lässt sich die Analyse wie folgt beschreiben:

$$R_{e/\mu} = \frac{N_H}{N_L} \cdot (1 + c_T)\,,$$

wobei N_H die Anzahl (hochenergetischer) «$\pi \to e$» Zerfälle sind, N_L die Anzahl der (niederenergetischen) Positronen aus «$\pi \to \mu \to e$» Zerfällen und $c_T \approx 1\,\%$ ein Korrekturfaktor für «$\pi \to e$» Zerfälle mit grossem Energieverlust.

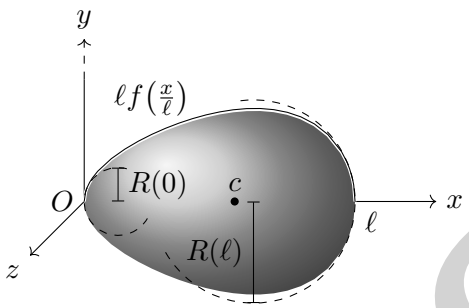
i. (1.5 Pkte.) Welche der drei Grössen wird am wenigsten zur relativen Unsicherheit des Verhältnisses beitragen, wenn eine grosse Anzahl von Positronen gemessen wird? Aus welchem Grund?
Hinweis: Die (absolute) Unsicherheit bezüglich der Anzahl der Ereignisse N solcher Zählversuche ist durch $\sigma = \sqrt{N}$ gegeben.

ii. (2 Pkte.) Wie genau muss c_T bekannt sein, wenn man insgesamt 2×10^{12} Pionzerfälle misst? Wir vernachlässigen die am wenigsten wichtige Unsicherheitsquelle, die in der vorherigen Frage festgestellt wurde.

Lange Aufgaben: Lösungen

Lange Aufgabe 1.1: Stabilität eines rotierenden Eis *16*

Wir betrachten ein Ei, das durch einen homogenen Rotationskörper mit dem Profil $f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t - t^4}$ auf dem Gebiet $t \in [a = 0, b = 1]$ dargestellt wird. Um dieses Profil in physikalische Einheiten umzuwandeln, wenden wir einen Längenfaktor ℓ an. Das Ei hat eine Dichte ρ. Der Massenmittelpunkt des Eis befindet sich bei $x = c = \frac{5}{9}\ell$.



Teil A. Zum Einwärmen *0.5*

i. Berechne das Volumen V des Eis. ***0.5***

Note: here and in what follows, the participants are allowed to write the prefactors in decimal notation.

$$V = \ell^3 \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

0.25

Thus,

$$V = \ell^3 \int_0^1 \frac{1}{4}\pi\left(x - x^4\right)\mathrm{d}x = \ell^3 \frac{1}{4}\pi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3\pi}{40}\ell^3.$$

0.25

Teil B. Trägheitsmoment *8.5*

Das Trägheitsmoment eines Festkörpers bezüglich einer Achse A ist gegeben durch

$$I_A = \iiint_V \rho D_A^2(x, y, z)\,\mathrm{d}V,$$

wobei $D_A(x, y, z)$ der (senkrechte) Abstand des Punktes (x, y, z) von der Achse A ist.

i. Bestimme für eine homogene Kugel mit derselben Dichte ρ und demselben Volumen V wie das Ei das Trägheitsmoment entlang einer Achse, die durch ihren Mittelpunkt verläuft. Dazu kannst du die Kugel in eine Reihe von Ringen mit den Radien $0 \leq s \leq r$, der Dicke $\mathrm{d}s$ und der Breite $\mathrm{d}x$ zerlegen, wobei r der Radius der Kugel ist. Das Integral wird dann zu

$$I_{\mathbf{B}} = 2\pi\rho \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} s^3 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.$$

SOLUTION

Zur Berechnung eines solchen mehrfachen Integrals wird zunächst das innere Integral (über $\mathrm{d}s$) berechnet, wobei x konstant bleibt, und dann das äussere Integral über $\mathrm{d}x$.
Das Ergebnis sollte die folgende Form haben

$$I_{\mathbf{B}} = k\pi\rho\ell^5,$$

wobei k ein dimensionsloser Faktor ist. ***1.75***

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{B}} &= 2\pi\rho \int_{-r}^{r} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} s^3 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\rho \int_{-r}^{r} \left[\frac{1}{4}s^4\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-r}^{r} \left(r^2-x^2\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-r}^{r} \left(r^4-2r^2x^2+x^4\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho \left[r^4x-\frac{2}{3}r^2x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-r}^{r} \\
&= \pi\rho \left[r^4x-\frac{2}{3}r^2x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{0}^{r} \\
&= \pi\rho \left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) r^5 \\
&= \frac{8}{15}\pi\rho r^5
\end{aligned}$$

1.25

A ball's volume is $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, thus using the egg's volume,

$$r = \sqrt[3]{\frac{9}{160}}\ell.$$

0.25

Therefore

$$I_{\mathrm{B}} = \frac{1}{60}\left(\frac{9}{20}\right)^{\frac{5}{3}} \pi\rho\ell^5.$$

0.25

ii. Bestimme das Trägheitsmoment I_{cx} des Eis entlang der Achse x durch den Massenmittelpunkt c, wobei du dich an der obigen Berechnung für die Kugel orientieren kannst. ***2.5***

We can use the same formula as for the ball, changing the bounds for x to $[a, b]$ and those for s to $[0, f(x)]$. 0.5

We also need to accomodate for the length factor, either by using the converted profile function, or more simply by adding a global ℓ^5 factor. 0.5

SOLUTION

$$
\begin{aligned}
I_{cx} &= 2\pi\rho\ell^5 \int_a^b \int_0^{f(x)} s^3 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\rho\ell^5 \int_a^b \left[\frac{1}{4}s^4\right]_0^{f(x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho\ell^5 \int_a^b (f(x))^4\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \int_a^b \left(x - x^4\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \int_a^b \left(x^2 - 2x^5 + x^8\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{9}x^9\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{32}\pi\rho\ell^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \\
&= \frac{1}{288}\pi\rho\ell^5
\end{aligned}
$$

1.5

iii. Bestimme das Trägheitsmoment I_{Oz} des Eis entlang der Achse z durch den Ursprung O. Diesmal haben wir keine Rotationssymmetrie um die Achse und wir können nicht den Radius s betrachten. Stattdessen kann das Integral in kartesischen Koordinaten gelöst werden, in der Form

$$I_{Oz} = \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \rho\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Du kannst ohne Beweis verwenden, dass

$$\int_{-|w|}^{|w|} \left(v^2 + x^2\right)\sqrt{w^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\pi w^2\left(4v^2 + w^2\right).$$

2

SOLUTION

$$
\begin{aligned}
I_{Oz} &= \ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \rho \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \rho\ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \left(x^2+y^2\right) \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \rho\ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \left(x^2+y^2\right) [z]_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\rho\ell^5 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \left(x^2+y^2\right) \sqrt{f^2(x)-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\rho\ell^5 \int_a^b \frac{1}{8}\pi f^2(x) \left(4x^2+f^2(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\pi\rho\ell^5 \int_a^b \left(x-x^4\right) \left(4x^2+\frac{1}{4}\left(x-x^4\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\pi\rho\ell^5 \int_a^b \left(\frac{1}{4}x^2+4x^3-\frac{1}{2}x^5-4x^6+\frac{1}{4}x^8\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\pi\rho\ell^5 \left[\frac{1}{12}x^3+x^4-\frac{1}{12}x^6-\frac{4}{7}x^7+\frac{1}{36}x^9\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{16}\pi\rho\ell^5 \left(\frac{1}{12}+1-\frac{1}{12}-\frac{4}{7}+\frac{1}{36}\right) \\
&= \frac{115}{4032}\pi\rho\ell^5
\end{aligned}
$$

2

iv. Leite das Trägheitsmoment I_{cz} des Eis entlang der Achse z durch den Massenmittelpunkt c ab. ***1***

We can apply Steiner's theorem: 0.5

$$
\begin{aligned}
I_{cz} &= I_{Oz} - mc^2 \\
&= I_{Oz} - \rho V \left(\frac{5}{9}\right)^2 \ell^2 \\
&= I_{Oz} - \rho\frac{3}{40}\pi\ell^3\frac{25}{81}\ell^2 \\
&= I_{Oz} - \frac{5}{216}\pi\rho\ell^5 \\
&= \left(\frac{115}{4032}-\frac{5}{216}\right)\pi\rho\ell^5 \\
&= \frac{65}{12096}\pi\rho\ell^5
\end{aligned}
$$

0.5

v. Was ist der Wert von I_{cy}? Begründe deine Antwort. ***0.5***

$$I_{cy} = I_{cz}$$

0.25

SOLUTION

The y- and z-axes are equivalent due to the egg's symmetry of revolution and alignment with the x-axis. 0.25

vi. Überprüfe, dass

$$I_{cx} < I_{\mathbf{B}} < I_{cz} < I_{Oz}$$

und begründe warum. ***0.75***

Computing the numerical values of the k factors:

$$0.0035 < 0.0044 < 0.0054 < 0.0285$$

0.25

For an equal mass (equal density and equal volume), the closer the mass distribution to the axis of rotation, the smaller the moment of inertia. Therefore the egg along its axis has a smaller moment of inertia than the ball, which has a smaller one than the egg taken perpendicular to its axis. From Steiner's theorem, a moment of inertia for a given axis direction will always be minimal when the axis crosses the center of mass. 0.5

I_{cx}, I_{cy} und I_{cz} sind Elemente des sogenannten *Trägheitstensor* des Festkörpers, der das Trägheitsmoment auf Fälle verallgemeinert, in denen der Festkörper keine Rotationssymmetrie um seine Drehachse besitzt.

Wenn sich ein Rotationskörper um eine Achse dreht, die durch seinen Massenmittelpunkt verläuft und unter einem Winkel θ zu seiner Symmetrieachse geneigt ist, dann beträgt sein Trägheitsmoment entlang der Rotationsachse

$$I = I_{\parallel} \cos^2(\theta) + I_{\perp} \sin^2(\theta)\,,$$

wobei $I_{\parallel}$ das Trägheitsmoment entlang der Symmetrieachse und $I_{\perp}$ das Trägheitsmoment entlang einer Achse ist, die senkrecht dazu steht und durch den Massenmittelpunkt verläuft.

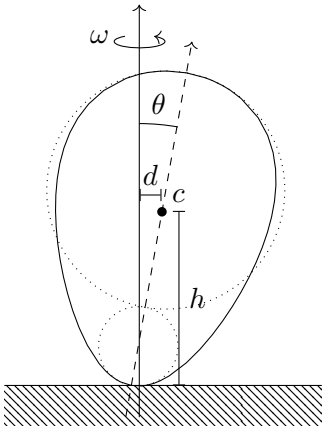
Teil C. Stabilität des rotierenden Eis 7

An jedem Punkt einer ausreichend regelmässigen $g(x)$ Kurve kann man einen *Krümmungskreis* definieren, als derjenige Kreis, der die Kurve an diesem Punkt am besten approximiert. Sein Radius wird als *Krümmungsradius* der Kurve an diesem Punkt bezeichnet, und beträgt

$$R(x) = \frac{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x)\right|}.$$

Für das Profil $\ell f\left(\frac{x}{\ell}\right)$ des Eis erhält man $R(0) = \frac{1}{8}\ell$ und $R(\ell) = \frac{3}{8}\ell$.

Wir drehen das Ei auf seiner Spitze und möchten die Winkelgeschwindigkeit ω bestimmen, die mindestens erforderlich ist, damit es nicht kippt. Dazu betrachten wir das Ei in einem Winkel $\theta \ll 1$ zur Vertikalen geneigt, wobei es sich um die vertikale Achse dreht, die durch seinen Berührungspunkt mit dem Boden verläuft.



SOLUTION

i. Bestimme die Höhe $h(\theta)$ des Massenmittelpunkts und seinen Abstand $d(\theta)$ von der Drehachse. Der Winkel θ ist klein, sodass du die Krümmung der Spitze des Eis durch die Krümmung seines Krümmungskreises annähern kannst. ***1.5***

By using the osculating circle's approximation, the crossing between the axis of revolution and the axis of rotation will be at the circle's center, that is at a distance $R(0)$ from the bottom. 0.5

Therefore

$$h(\theta) = R(0) + (c - R(0))\cos(\theta) = \left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72}\cos(\theta)\right)\ell$$

0.5

and

$$d(\theta) = (c - R(0))\sin(\theta) = \frac{31}{72}\sin(\theta)\,\ell.$$

0.5

Alternativlösung: ***(1.5)***

Alternatively, it is reasonable to Taylor-expand in θ to the second order. Note that the exact distribution of points for this question and the next ones depends on where the Taylor-expansion, the substitution of m and the simplifications are made. Use your best judgement when marking.

$$h(\theta) = R(0) + (c - R(0))\cos(\theta) = \left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72}\cos(\theta)\right)\ell \approx \left(\frac{1}{8} - \frac{31}{144}\theta^2\right)\ell$$

and

$$d(\theta) = (c - R(0))\sin(\theta) = \frac{31}{72}\sin(\theta)\,\ell \approx \frac{31}{72}\theta\ell.$$

(1.5)

ii. Bestimme die gesamte mechanische Energie des Eis $E(\theta)$, wiederum unter der Annahme, dass der Winkel klein ist. ***2.5***

The total mechanical energy consists of the gravitational potential energy plus the kinetic energy of rotation plus the kinetic energy of translation of the center of mass. The two latter can be put together by adapting the moment of inertia via Steiner's theorem. 0.5

$$\begin{aligned}
E(\theta) &= mgh(\theta) + \frac{1}{2}\left(I_{cx}\cos^2(\theta) + I_{cz}\sin^2(\theta) + md^2(\theta)\right)\omega^2 \\
&= \rho\frac{3}{40}\pi\ell^3 g\left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72}\cos(\theta)\right)\ell + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{288}\pi\rho\ell^5\cos^2(\theta) + \frac{65}{12096}\pi\rho\ell^5\sin^2(\theta) + \rho\frac{3}{40}\pi\ell^3\frac{961}{5184}\sin^2(\theta)\,\ell^2\right)\omega^2 \\
&= \left(\frac{3}{40}\left(\frac{1}{8} + \frac{31}{72}\cos(\theta)\right)g + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{288}\cos^2(\theta) + \frac{65}{12096}\sin^2(\theta) + \frac{3}{40}\frac{961}{5184}\sin^2(\theta)\right)\ell\omega^2\right)\rho\pi\ell^4 \\
&= \left(\frac{1}{960}\left(9 + 31\cos(\theta)\right)g + \frac{1}{322560}\left(560\cos^2(\theta) + 3109\sin^2(\theta)\right)\ell\omega^2\right)\rho\pi\ell^4 \\
&= \left(\frac{1}{960}\left(9 + 31\cos(\theta)\right)g + \frac{1}{322560}\left(560 + 2549\sin^2(\theta)\right)\ell\omega^2\right)\rho\pi\ell^4
\end{aligned}$$

SOLUTION

2

Alternativlösung: ***(2.5)***

$$\cos^2(\theta) \approx \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)^2 = 1 - \theta^2 + \theta^4 \approx 1 - \theta^2$$

(This is a particular case of Bernoulli's inequality, resp. approximation.) (0.5)

$$\begin{aligned} E(\theta) &= mgh(\theta) + \frac{1}{2}\left(I_{cx}\cos^2(\theta) + I_{cz}\sin^2(\theta) + md^2(\theta)\right)\omega^2 \\ &\approx mg\left(\frac{1}{8} - \frac{31}{144}\theta^2\right)\ell + \frac{1}{2}\left(I_{cx}\left(1-\theta^2\right) + I_{cz}\theta^2 + m\left(\frac{31}{144}\right)^2\theta^2\ell^2\right)\omega^2 \end{aligned}$$

(2)

iii. Leite die Bedingung für ω ab, damit das Ei stabil um seine Spitze rotieren kann. Was fällt dir auf? ***2.5***

The condition is that the second derivative of the energy around $\theta = 0$ is positive (because the tip of the egg is an equilibrium position, albeit an unstable one, we already know that the first derivative will be zero, and this is also visible from the expression). 0.75

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \left(-\frac{31}{960}\sin(\theta)\,g + \frac{2549}{161280}\cos(\theta)\sin(\theta)\,\ell\omega^2\right)\rho\pi\ell^4$$

0.25

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = \left(-\frac{31}{960}\cos(\theta)\,g + \frac{2549}{161280}\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)\ell\omega^2\right)\rho\pi\ell^4$$

0.25

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\theta^2}(0) = \left(-\frac{31}{960}g + \frac{2549}{161280}\ell\omega^2\right)\rho\pi\ell^4$$

0.25

$$\omega > \sqrt{\frac{161280}{2549}\frac{31}{960}\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{5208}{2549}\frac{g}{\ell}}$$

0.5

We notice that the mass or the density of the egg don't matter, only its shape and size. 0.5

Alternativlösung: ***(2.5)***

SOLUTION

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = -mg\frac{31}{72}\ell\theta + \left(-I_{cx}\theta + I_{cz}\theta + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\theta\ell^2\right)\omega^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = -mg\frac{31}{72}\ell + \left(-I_{cx} + I_{cz} + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\ell^2\right)\omega^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\theta^2}(0) = -mg\frac{31}{72}\ell + \left(-I_{cx} + I_{cz} + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\ell^2\right)\omega^2$$

$$\begin{aligned}
\omega &> \sqrt{\frac{mg\ell\frac{31}{72}}{-I_{cx} + I_{cz} + m\left(\frac{31}{72}\right)^2\ell^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{31}{72}}{-\frac{I_{cx}}{m\ell^2} + \frac{I_{cz}}{m\ell^2} + \left(\frac{31}{72}\right)^2}\frac{g}{\ell}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{31}{72}}{-\frac{1}{288}\frac{40}{3} + \frac{65}{12096}\frac{40}{3} + \left(\frac{31}{72}\right)^2}\frac{g}{\ell}} \\
&= \sqrt{\frac{5208}{2549}\frac{g}{\ell}}
\end{aligned}$$

(2.5)

iv. Berechne den numerischen Wert von ω für $\ell = 6\,\mathrm{cm}$ und dem Eigewicht $m = 60\,\mathrm{g}$. Berechne auch den Zahlenwert für die Rotationsfrequenz ν. ***0.5***

$$\omega > \omega_{\min} = \sqrt{\frac{5208}{2549}\frac{9.806\,65\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{6\,\mathrm{cm}}} \approx 18\,\mathrm{s}^{-1}$$

0.25

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} > \frac{\omega_{\min}}{2\pi} \approx 3\,\mathrm{Hz}$$

0.25

SOLUTION

Lange Aufgabe 1.2: Dampfschiff *16*

Vor einigen Jahren unternahm eine Gruppe von Teilnehmenden und Freiwilligen im Rahmen eines Team-Events eine Bootsfahrt auf dem Vierwaldstättersee. Glücklicherweise konnten sie die Fahrt auf einem Dampfschiff machen, an dem neben der grossen Dampfmaschine ein Datenblatt befestigt war. Davon inspiriert, wollen wir die Dampfmaschine untersuchen und über ihre Konstruktion nachdenken. In Abbildung 1 ist eine solche Maschine skizziert.

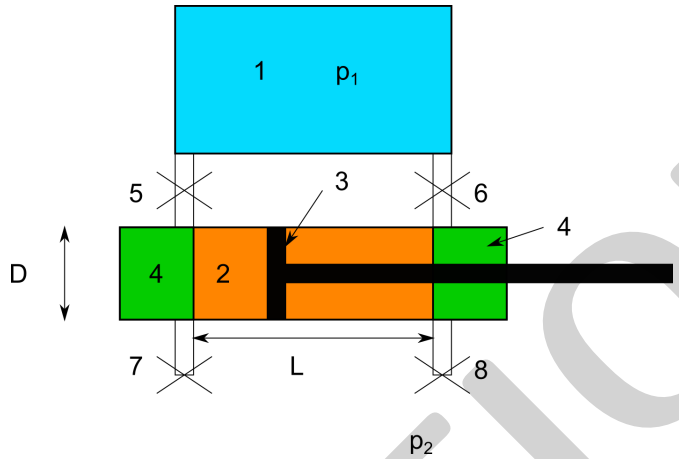


Abbildung 1: Skizze einer Dampfmaschine. 1: Das Dampfreservoir (blau) mit konstantem Druck p_1. 2: Zylinder (Durchmesser D, grüner und oranger Bereich), in dem sich der Kolben (3) im orangen Bereich über die Strecke L bewegt. 4: Minimales Volumen V_0 (jeder grüne Bereich), das verbleibt, wenn sich der Kolben am entsprechenden Ende des Zylinders befindet. 5 und 6: Ventile zur Steuerung des Dampfstroms aus dem Vorratsbehälter (1) in den Zylinder. 7 und 8: Ventile zur Steuerung des Dampfstroms aus dem Zylinder nach aussen, wo der Druck p_2 herrscht.

Teil A. Leistung *16*

Einige weitere Informationen zur Dampfmaschine: Sie besteht aus einem Zylinder mit einem Durchmesser $D = 800\,\mathrm{mm}$. Der Dampfdruck beträgt $p_1 = 13\,\mathrm{bar}$ (absoluter Druck). Der Kolben gleitet im Zylinder um eine Distanz $L = 1300\,\mathrm{mm}$. Der Motor führt 48 volle Zyklen pro Minute durch.

i. Nimm an, dass bei der Bewegung des Kolbens von links nach rechts die Ventile 5 und 8 ständig geöffnet sind (6 und 7 geschlossen). Die Ventile ändern ihren Zustand sofort, sobald der Kolben den Wendepunkt rechts erreicht und sich nach links zu bewegen beginnt (die Ventile schalten sofort wieder um, wenn sie den linken Wendepunkt erreichen). Schätze die Leistung der Dampfmaschine als Funktion der gegebenen Variablen ab und berechne den entsprechenden Zahlenwert. Triff gegebenenfalls Annahmen und begründe und dokumentiere diese. *6*

General note on the marking: this is an "open" style problem. Student solutions can be expected to be very different from one another. The marking schemes presented here are only indicative examples. Use your best judgement. Solutions that display a deeper insight into the physics underlying the problem can be rewarded accordingly.

SOLUTION

Since the valves are permanently open, there is a constant pressure p_1 on the side connected with the reservoir and p_2 at the side connected to the outlet. We therefore are looking at an isobaric process (also give the points if not explicitly stated). V_0 can be assumed to be very small and the valves sufficiently large that the pressure drop they cause is negligible.

The power P is related to the total work of one cycle W_{tot} as $P = fW_{\text{tot}}$ with f the frequency. 0.5

The total work is $W_{\text{tot}} = 2W$ with W the work done moving the piston in one direction. The factor 2 comes from the fact that work is done in both directions. We assume that the area taken by the connection rod is negligible, otherwise the factor would be slightly smaller than 2 (fine is students assume a smaller factor) 0.5

The frequency (in SI units) is given by (only analytic formula, also ok if implicitly correct, no points for numerical value here) $f = \frac{48\text{rot/min}}{60\,\text{s}\cdot\text{min}^{-1}} = 0.8\,\text{s}^{-1}$ 0.5

The work W of one cylinder moving once along L is computed as $W = \int F\text{d}L$ with F the total force acting on the cylinder. 0.5

The force is given by $F = pA$ with p the total pressure. 0.5

The total pressure is given by $p = p_1 - p_2$. 0.5

It is an isobaric process (it can also be considered as two simultaneous isobaric processes, one on each side of the piston). 0.5

The integral leads to $W = L\,(p_1 - p_2)\,A$. 0.5

The area is given by $A = \frac{D^2\pi}{4}$ (only analytic formula, also ok if implicitly correct, no points for numerical value here). 0.5

Therefore the power is $P = 2fL\,(p_1 - p_2)\,A$. 0.5

We assume $p_2 = 1\,\text{bar}$ (environment pressure). This value can vary, however has to be clearly stated. 0.5

The numerical value is $P = 1250\,\text{kW}$. 0.5

ii. Die in der obigen Aufgabe beschriebene Steuerung der Ventile ist ziemlich ineffizient. Denn wenn die Ventile umschalten, geben sie die im Dampf mit hohem Druck p_1 gespeicherte Energie an die Umgebung (bei Druck p_2) ab. Um den Wirkungsgrad zu optimieren, ändern wir nun die Ventilsteuerung: Wenn der Kolben am äussersten linken Punkt steht, öffnet sich das Ventil 5 schnell und füllt das linke Volumen 4 mit Dampf mit Druck p_1. Dann schliesst sich das Ventil 5 wieder und bleibt für den Rest des Zyklus geschlossen. Während der Bewegung des Kolbens nach rechts ist das Ventil 8 ständig geöffnet, während die anderen Ventile geschlossen sind. Wir nehmen an, dass die Zeit Δt, während der das Ventil 5 geöffnet ist, kurz ist, d. h. $\Delta t \ll T$ mit T der Periode des Kolbenzyklus. Wenn sich der Kolben in die entgegengesetzte Richtung bewegt, öffnen und schliessen sich die Ventile entsprechend. Schätze die Leistung in dieser Situation formal und numerisch ab. Triff gegebenenfalls Annahmen zu unbekannten Grössen, und begründe und dokumentiere diese. **7**

While the piston is moving, there is no new steam entering the cylinder and as such the pressure is not constant anymore. We can model this either as a isothermal or adiabatic process (or a process in between). For the marking, both solutions should be considered equally valid as long as a justification is provided. 0.5 points can be deduced if the choice of an isothermal process is not given a justification. Again we can assume that the valves are sufficiently large and that their impact on the pressure is negligible. The

SOLUTION

isobaric process happening on the "outgoing" side of the piston can either be treated separately or, as done here, implicitly with the $-p_2 \mathrm{d}V$ part of the integrals.

Justification isothermal process: big heat capacity of cylinder and piston that transfer thermal energy to the steam during the whole movement, thereby keeping it a constant temperature. 1

To calculate the work, we need the relation $p(V)$ which for the isothermal process is $pV = \text{const}$, hence $p(V) = p_1 \frac{V_0}{V}$. 1

We have to make an assumption on V_0. If well explained and reasonable, any assumption is ok. Here we assume that V_0 is such that the isothermal expansion drops the pressure from p_1 to p_2. This point is given for explicitly mentioning the assumption, not its actual formal consequence (see next point). Note on p_2: They are supposed to take the one from the first subtask, however if they change their choice, no penalty and no benefit. Furthermore if they didn't state anything about p_2 in the first subtask but explain it here, give the points from the previous task aswell. 1

Our assumption formally leads to: $p_1 V_0 = p_2 (V_0 + AL)$ hence $V_0 = \frac{p_2 AL}{p_1 - p_2}$. 1

Work is then (points given for the formula): $W = \int_{V_0}^{V_0+AL} (p(V) - p_2)\,\mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_0+AL} \left(p_1 \frac{V_0}{V} - p_2\right) \mathrm{d}V$. 0.5

Solving the integral gives $W = p_1 V_0 \ln\left(\frac{V_0+AL}{V_0}\right) - p_2 AL$. 1

Analytic solution for the power: $P = 2f \left[p_1 \frac{p_2 AL}{p_1 - p_2} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_2 AL\right] = 2 f p_2 AL \left(\frac{p_1}{p_1 - p_2} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - 1\right)$. 0.5

Numerical solution: $P = 186\,\mathrm{kW}$. 1

Alternativlösung: ***(7)***

Alternatively for adiabatic or process in between (can be treated same but different κ):

Justification adiabatic process: Not a lot of heat exchange during expansion. (1)

To calculate the work, we need the relation $p(V)$, which for the adiabatic process is $pV^\kappa = \text{const}$, hence $p(V) = p_1 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa$. (1)

We have to make an assumption on V_0. If well explained and reasonable, any assumption is ok. Here we assume that V_0 is such that the expansion drops the pressure from p_1 to p_2. This point is given for explicitly mentioning the assumption, not its actual formal consequence (see next point). Note on p_2: They are supposed to take the one from the first subtask, however if they change their choice, no penalty and no benefit. Furthermore if they didn't state anything about p_2 in the first subtask but explain it here, give the points from the previous task aswell. (1)

Our assumption formally leads to: $p_1^{1/\kappa} V_0 = p_2^{1/\kappa} (V_0 + AL)$ hence $V_0 = \frac{p_2^{1/\kappa} AL}{p_1^{1/\kappa} - p_2^{1/\kappa}}$. (1)

Work is then (points given for the formula): $W = \int_{V_0}^{V_0+AL} (p(V) - p_2)\,\mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_0+AL} \left(p_1 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa - p_2\right) \mathrm{d}V$. (0.5)

Solving the integral gives $W = p_1 V_0^\kappa \frac{1}{-\kappa+1} \left((V_0 + LA)^{-\kappa+1} - V_0^{-\kappa+1}\right) - p_2 AL$. Note that to keep the same amount of points with the isothermal process and since inserting variables here is quite tedious, there is no need for further simplification (the points for the simplification in the isothermal process are awarded for the choice of κ, see next point). (1)

SOLUTION

Choice of κ: for adiabatic process $\kappa = \frac{f+2}{f}$ with $f = 6$ for an (idealized) molecule with 3 translational and 3 rotational degrees of freedom (i.e. H_2O). A process in between adiabatic and isothermal would have $\langle\kappa\rangle = \frac{f+2}{f} = \frac{8}{6}$. (0.5)

Numerical solution: $P = 226\,\mathrm{kW}$. (1)

iii. Die Leistung auf dem Datenblatt wird als $331\,\mathrm{kW}$ angegeben[2]. Vergleiche diesen Wert mit deinen Berechnungen in Teilaufgaben i. und ii. und diskutiere deinen Vergleich qualitativ (d.h. warum beide Werte ziemlich gut übereinstimmen oder warum sie nicht übereinstimmen). *3*

The answer might differ depending on the assumptions taken. Different options are presented, if other good points are explained, give the points correspondingly.

A general aspect that has to be mentioned for this point (no matter about the other conclusions): our calculations neglect friction and other dissipative and imperfect effects (0.5 points). Hence with respect to the corresponding process, the calculated power is an overestimate (0.5 points). 1

The power calculated in i. is higher than the actual value not only because of dissipation (point above) but also because it is a highly inefficient process that is not implemented. 0.5

Concerning the calculated power in ii.: For the remaining 1.5 points, there are different items that can be mentioned, depending on the outcome of the calculations:
Similar assumptions as in the sample solution leading to a lower calculated value in ii.: One can increase the power output by not relaxing to $p_2 = 1\,\mathrm{bar}$ but to higher values, which is related to having a bigger value of V_0 than calculated.
The assumptions in part ii. are chosen such that it matches the real value: If it is explicitly stated here that the assumption of ii. were made such that the values agree, give this 1.5 points for the additional effort made to match the values.
If the calculated value in ii. is bigger than the real value because other assumptions were made: A different choice of the assumptions would lead to a better agreement.
If there is a calculation error in ii. leading to a unreasonably different value: 1.5 points if stated that the calculated value is unreasonable. 1.5

SOLUTION

[2] Die Dampfmaschine auf dem Boot hat 3 Zylinder, der Wert hier wurde bereits durch 3 geteilt.

Lange Aufgabe 1.3: Pion-Zerfälle *16*

Teil A. Pion-Strahl *3*

Für ein Teilchenphysikexperiment werden (positive) Pionen (π^+) benötigt, welche in einem Strahl mit Impuls $p = 65\,\mathrm{MeV/c}$ transportiert werden. Bei der Pionproduktion entstehen aber auch noch Anti-Myonen (μ^+) und Positronen (e^+), welche alle dieselbe Ladung und Impuls haben. Sie unterscheiden sich jedoch in Masse ($m_\pi = 140\,\mathrm{MeV/c^2}$, $m_\mu = 106\,\mathrm{MeV/c^2}$, $m_e = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$) und Lebensdauer ($\tau_\pi = 26\,\mathrm{ns}$, $\tau_\mu = 2197\,\mathrm{ns}$). Das Positron ist im Vakuum stabil.

i. Mit welcher Geschwindigkeit sind die einzelnen Teilchen im Strahl unterwegs? *1.5*

In relativistic kinematics, the velocity can be written as

$$v = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}}. \tag{A.1}$$

Using the given numerical values for the momentum and the masses, one obtains the velocities for pions, anti-muons and positrons. 0.75

$$v_\pi = 0.42 \cdot c = 1.26 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

0.25

$$v_\mu = 0.52 \cdot c = 1.56 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

0.25

$$v_e \approx c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

0.25

Remark:

$$v_e = 0.999969c$$

Results may be given in terms of c or $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. If no points are awared for eq. (A.1), $v_e \approx c$ can be determined by highly relativistic approximation. This awards 0.5 points.

ii. Die Strahlquelle produziert alle drei Teilchensorten im Abstand $T = 20\,\mathrm{ns}$. Das heisst, dass alle $20\,\mathrm{ns}$, Pionen, Anti-Myonen und Positronen in die Strahllinie geschossen werden. In welchem Zeitabstand relativ zu den Pionen kann man beim Experiment Anti-Myonen sehen, wenn die Strahllinie $16\,\mathrm{m}$ lang ist? *1.5*

The time of flight difference for pions and muons can be written as

$$\Delta t = \frac{l}{v_\pi} - \frac{l}{v_\mu}.$$

0.5

Inserting the velocities obtained in the previous question, one obtains

$$\Delta t = 24.6\,\mathrm{ns}.$$

0.25

SOLUTION

Pions arrive 24.6 ns after muons of the same production. One needs to consider that all particles are produced every 20 ns. 0.5

Muons thus arrive either 4.6 ns prior to the pions or 15.4 ns after. Full points for any of the two values. 0.25

Teil B. Zerfalls-Arten *4.5*

Im Folgenden betrachten wir zwei Arten, wie Pionen zerfallen können. Anti-Myonen zerfallen immer zu Positronen.

$$\begin{aligned} \pi^+ &\to e^+\nu_e & 0.01\,\% \\ \pi^+ &\to \mu^+\nu_\mu & 99.99\,\% \\ \mu^+ &\to e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e & 100\,\% \end{aligned}$$

Die (Anti-)Neutrinos ν_e, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$ sind (beinahe) masselose Teilchen, die nicht detektierbar sind.
Ein Pion kann also entweder direkt zu einem Positron zerfallen («$\pi \to e$») oder zuerst zu einem Myon, welches dann zu einem Positron zerfällt («$\pi \to \mu \to e$»). Im Experiment werden alle Pionen gestoppt. Falls das Pion zu einem Myon zerfällt, wird dieses innert weniger Pikosekunden ebenfalls gestoppt. Alle Teilchen in dieser Teilaufgabe zerfallen ruhend.

i. Welche Energie $E_e^{\pi\to e}$ hat ein Positron, welches direkt aus einem Pionenzerfall ($\pi \to e\nu_e$) stammt? Wir vernachlässigen die Masse des Positrons in Bezug auf die Pionenmasse und die Positronenenergie ($m_e c^2 \ll E_e^{\pi\to e}, m_\pi c^2$). *1*

Using the symmetry coming from the fact that we have a decay into two (approximately) massless particles, one can expect the positron energy to be given by

$$E_e^{\pi\to e} \approx \frac{m_\pi}{2}.$$

0.75

Inserting the numerical value for m_π yields

$$E_e^{\pi\to e} \approx 70\,\mathrm{MeV}.$$

0.25

Alternativlösung: *(1)*

Using that mass is a Lorentz invariant, and neglecting the electron mass, one finds thanks to momentum conservation (from a pion decaying at rest) $m_\pi^2 = ((E_e + E_{\nu_e})^2 = (E_e + |\vec{p}_{\nu_e}|)^2 = (E_e + |\vec{p}_e|)^2 \approx (E_e + E_e)^2 = 4E_e^2$, *which gives*

$$E_e^{\pi\to e} \approx \frac{m_\pi}{2}.$$

(0.75)

Inserting the numerical value for m_π *yields*

$$E_e^{\pi\to e} \approx 70\,\mathrm{MeV}.$$

(0.25)

ii. Wie hoch ist die maximale Energie $E_{e,\mathbf{max}}^{\mu\to e}$ eines Positrons, wenn das Pion zuerst zu einem Anti-Myon zerfällt und das Anti-Myon dann zu einem Positron zerfällt ($\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu, \mu^+ \to$

SOLUTION

$e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$)? Begründe warum. Wir vernachlässigen die Masse des Positrons in Bezug auf die Anti-Myonenmasse und die Positronenenergie ($m_e c^2 \ll E_e^{\mu\to e}, m_\mu c^2$). ***1.5***

By momentum conservation from a muon assumed to decay at rest, we expect to have the highest positron energy when both neutrinos point in the same direction (note: other justifications, as long as they are sensible, are accepted). 0.75

We are thus back in the same situation as in the previous question, but with m_π being replaced by m_μ:

$$E_{e,\max}^{\mu\to e} \approx \frac{m_\mu}{2}.$$

0.5

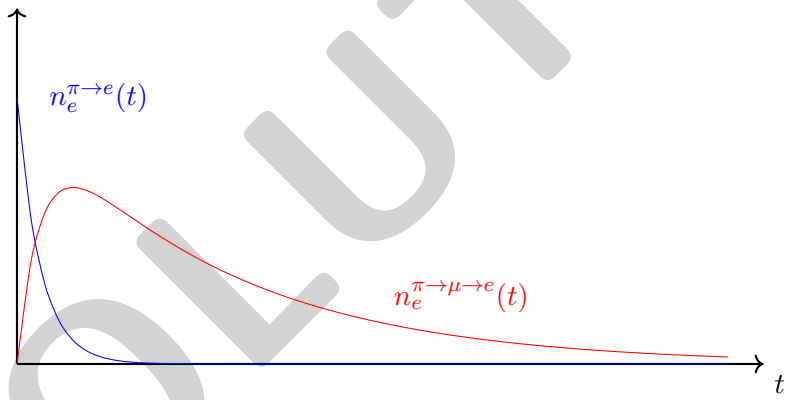
Inserting the numerical value for m_μ gives

$$E_{e,\max}^{\mu\to e} \approx 53\,\mathrm{MeV}.$$

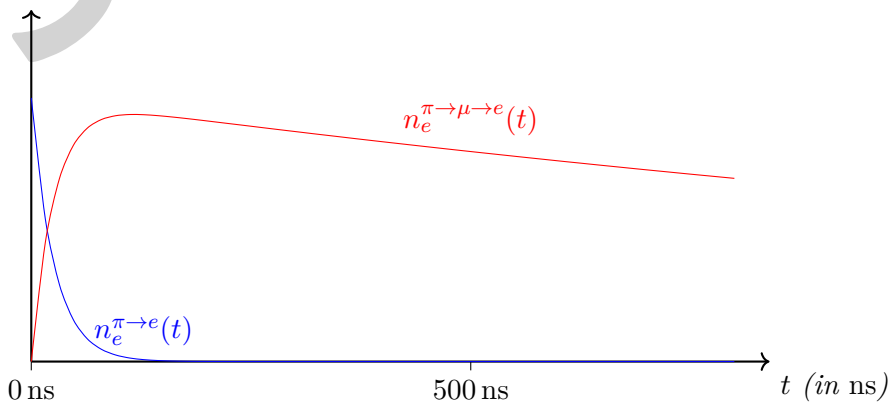
0.25

iii. Beide Pion-Zerfallsarten haben ein messbares Positron am Ende. Skizziere die zeitliche Verteilung von Positronen aus «$\pi \to e$» und «$\pi \to \mu \to e$» Zerfällen ($N_e^{\pi\to e}(t)$ und $N_e^{\pi\to\mu\to e}(t)$). Die Zeit des Pion-Stopps wird dabei als Referenz $t = 0$ genommen. ***2***

We expect something of the following qualitative form (using 1/10 of the muon lifetime)



For reference, the actual time spectrum



SOLUTION

Indeed, the $\pi \to e$ case is a typical exponentional decay that qualitatively goes as $n_e^{\pi\to e}(t) \propto e^{-t/\tau_\pi}$. The $\pi \to \mu \to e$ case is an exponential decay from anti-muons which are themselves the result of an exponential decay. Qualitatively we thus expect something of the form $n_e^{\pi\to\mu\to e}(t) \propto e^{-t/\tau_\mu} - e^{-t/\tau_\pi}$.

Derivation (not required, no points):
Let N_μ be the number of muons at a given time. The number of positrons from muon decay is thus

$$n_e^{\pi\to\mu\to e}(t) \propto N_\mu. \tag{B.1}$$

Also, the pions as primary particles follow an exponential decay. Thus the change in number of muons is equal to the new muons from pion decay minus the muons that decay. As each muon has a given decay probability, this is proportional to the total number of muons. Let N_0 be the total number of pions decaying to muons.

$$\dot{N}_\mu = \frac{N_0}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu} N_\mu$$

This equation can be approached with the ansatz

$$N_\mu = Ae^{-t/\tau_\mu} + Be^{-t/\tau_\pi}$$

and thus

$$\begin{aligned}
-\frac{A}{\tau_\mu} e^{-t/\tau_\mu} - \frac{B}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} &= \frac{N_0}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu}\left(Ae^{-t/\tau_\mu} + Be^{-t/\tau_\pi}\right) \\
-\frac{B}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} &= \frac{N_0}{\tau_\pi} e^{-t/\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu} Be^{-t/\tau_\pi} \\
-\frac{B}{\tau_\pi} &= \frac{N_0}{\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu} B \\
-\left(\frac{1}{\tau_\pi} - \frac{1}{\tau_\mu}\right) B &= \frac{N_0}{\tau_\pi} \\
-\frac{\tau_\mu - \tau_\pi}{\tau_\mu \tau_\pi} B &= \frac{N_0}{\tau_\pi} \\
B &= -N_0 \frac{\tau_\mu}{\tau_\mu - \tau_\pi}.
\end{aligned}$$

From the condition that the pion first has to decay to a muon and thus $N_\mu(0) = 0$, it follows that $A = -B$. And thus, plugging into eq. (B.1),

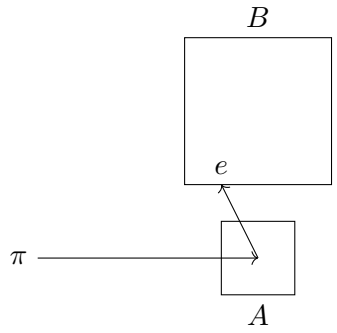
$$n_e^{\pi\to\mu\to e}(t) \propto e^{-t/\tau_\mu} - e^{-t/\tau_\pi}.$$

Caption	0.5
Exp. decay for $\pi \to e$ with $\tau = \tau_\pi$	0.5
Exp. rise with $\tau = \tau_\pi$ for $\pi \to \mu \to e$	0.5
Exp. decay for $\pi \to \mu \to e$ with $\tau = \tau_\mu$	0.5

Teil C. Detektorsystem — 5

Das Experiment besteht aus zwei Detektoren. Der Strahl trifft auf Detektor A, welcher Pionen stoppt, jedoch von Anti-Myonen und Positronen durchschossen wird. Er misst die Ankunftszeit der Pionen. Detektor B befindet sich seitlich von Detektor A. Wenn ein Positron auf Detektor B trifft, dann wird die Energie des Positrons in einem zylindrischen Volumen von einigen cm Durchmesser verteilt. Detektor B misst sowohl die vom Positron abgegebene Energie (Energiedeposit, E_{dep}) als auch die Zeit t_e des Positrons.

SOLUTION



i. Es zeigt sich, dass das von Detektor B gemessene Energiedeposit $E_{\mathbf{dep}}$ oftmals kleiner ist als die Energie des Positrons. Aus welchen Gründen kann das passieren? Nenne zwei. *2*

For each plausible reason a point is awarded. Possibilities are:

- Energy loss A
- Energy deposit cylinder exceeds B. (Lateral Energy Leakage)
- Positron passes B partially.
- Positron reflects on B.
- Positron-electron annihilation with escaping gamma
- Positron interacts with nuclei (or any other particle in the shower, e.g. bremsstrahlung + photonuclear interaction)
- Positron doesn't hit B, annihiliates in A and only a gamma hits B
- ...

Corrector should decide at which point two arguments are the same with a different wording and when they should be considered as different arguments. This should be two easy points for students that have some creative suggestions. 2

ii. Wenn ein Pion zu einem Myon zerfällt, wird dieses innert 13 ps gestoppt. Welcher Teil der Anti-Myonen zerfällt im Flug, also schneller als 13 ps? *2*

The probability for an anti-muon decay between time t_1 and t_2 can be written as

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \frac{1}{N} \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,\mathrm{d}t,$$

where N is some normalization factor (such that integrating from 0 to ∞ yields a probability of 1) and $N(t)$ is the time distribution. 0.5

In the case of decays, the distribution $N(t)$ is an exponentially decaying distribution. The normalization constant can be obtained by computing the integral from 0 to ∞ . One then obtains

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \frac{1}{\tau_\mu} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t/\tau_\mu}\mathrm{d}t.$$

SOLUTION

0.5

Computing the integral then yields

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \left[-e^{-t/\tau_\mu}\right]_{t_1}^{t_2}$$

0.25

and further

$$p(t_1 < t_e < t_2) = \left(e^{-t_1/\tau_\mu} - e^{-t_2/\tau_\mu}\right).$$

0.25

Inserting the numerical values then gives

$$p(t_1 < t_e < t_2) \approx 5.9 \times 10^{-6}.$$

0.5

The first 0.5P are for the normalisation, the second 0.5P for the integral over the exp. function. In case the normalisation was forgotten, deduct 0.5P

iii. In $c_T \approx 1\,\%$ der «$\pi \to e$» Zerfälle ist die gemessene Energie des Positrons (Energiedeposit) so gering, dass es nicht von einem Positron eines «$\pi \to \mu \to e$» Zerfalls zu unterscheiden ist. Für Anti-Myon Zerfälle im Flug («Decay in Flight», DIF) lässt sich kein Unterschied in der Zeitverteilung feststellen. Anti-Myon Zerfall im Flug und «$\pi \to e$» Zerfälle mit grossem Energieverlust sind also kaum zu unterscheiden. Wie steht es um das Verhältnis $p_{\mathbf{low}}^{\pi\to e}/p_{\mathbf{DIF}}^{\pi\to\mu\to e}$ der zwei Zerfälle relativ zueinander? ***1***

The probability to get a low-energy $\pi \to e$ decay over all the decays is the product of the probability to get a direct $\pi \to e$ decay and of the one to get a low-energy decay in such a case, c_T:

$$p_{\text{low}}^{\pi\to e} = 1 \times 10^{-2} \cdot 1 \times 10^{-4} = 1 \times 10^{-6}$$

0.5

The probability for muon DIF was computed above.

Using our results from above, one finds

$$p_{\text{low}}^{\pi\to e}/p_{\text{DIF}}^{\pi\to\mu\to e} = 0.17$$

0.5

Teil D. $R_{e/\mu}$ *3.5*

Das Verhältnis $R_{e/\mu}$ wird aus den Zerfallswahrscheinlichkeiten des Pions zu einem Anti-Myon bzw. zu einem Positron berechnet

$$R_{e/\mu} = \frac{p(\pi \to e)}{p(\pi \to \mu)}.$$

Ziel des Experiments ist es, dieses Verhältnis mit einer Genauigkeit von $0.01\,\%$ zu messen. In einer sehr vereinfachten Form lässt sich die Analyse wie folgt beschreiben:

$$R_{e/\mu} = \frac{N_H}{N_L} \cdot (1 + c_T)\,,$$

SOLUTION

wobei N_H die Anzahl (hochenergetischer) «$\pi \to e$» Zerfälle sind, N_L die Anzahl der (niederenergetischen) Positronen aus «$\pi \to \mu \to e$» Zerfällen und $c_T \approx 1\,\%$ ein Korrekturfaktor für «$\pi \to e$» Zerfälle mit grossem Energieverlust.

i. Welche der drei Grössen wird am wenigsten zur relativen Unsicherheit des Verhältnisses beitragen, wenn eine grosse Anzahl von Positronen gemessen wird? Aus welchem Grund? *Hinweis:* Die (absolute) Unsicherheit bezüglich der Anzahl der Ereignisse N solcher Zählversuche ist durch $\sigma = \sqrt{N}$ gegeben. ***1.5***

The answer is N_L. 0.5

The reason is that $N_L \gg N_H$ 0.5

and that such counting experiments have a (Poisson distribution with) relative uncertainty on the number of events given by

$$\frac{\sigma}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{D.1}$$

0.25

while the uncertainty σ_T on c_T a priori does not change with the number of measured events. 0.25

ii. Wie genau muss c_T bekannt sein, wenn man insgesamt 2×10^{12} Pionzerfälle misst? Wir vernachlässigen die am wenigsten wichtige Unsicherheitsquelle, die in der vorherigen Frage festgestellt wurde. ***2***

In case the 0.25P were missed above for eq. (D.1)*, here is another chance:*

$$\frac{\sigma_H}{N_H} = \frac{1}{\sqrt{N_H}} \quad \textit{(0.25).}$$

By uncertainty propagation and neglecting the uncertainty coming from N_L, one gets

$$\left(\frac{\sigma_R}{R_{e/\mu}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_H}{N_H}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{1+c_T}\right)^2.$$

0.5

We then isolate σ_T with intermediate step

$$\left(\frac{\sigma_T}{1+c_T}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_R}{R_{e/\mu}}\right)^2 - \frac{1}{N_H}$$

0.5

to finally get

$$\sigma_T = (1+c_T)\sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{R_{e/\mu}}\right)^2 - \frac{1}{N_H}}.$$

0.5

Inserting the numerical values and noting that $N_H = 2 \times 10^{12} \cdot 0.01\% \cdot (1 - c_T)$, one finds

$$\sigma_T \approx 7 \times 10^{-5}.$$

0.5

SOLUTION

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

9. - 10. März 2024

Teil 2	:	**6 Kurzaufgaben**
Zeit	:	60 Minuten
Total	:	24 Punkte (6×4)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Einfacher Taschenrechner
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Bärbel & Paul Geissbühler Stiftung
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Huawei
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Kurzaufgaben

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 24 Punkte (6×4)

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern.

Kurzaufgabe 2.1: Brachistochrone Kurve *(4 Punkte)*

Eine Brachistochrone ist eine Kurve zwischen zwei Punkten, entlang der sich ein Körper unter Schwerkraft in kürzerer Zeit bewegen kann als bei jeder anderen Kurve, wenn man Reibung und Luftwiderstand vernachlässigt, was wir in diesem Problem tun.
Wir betrachten zwei Punkte, A und C, die durch eine brachistochrone Rampe verbunden sind (was bedeutet, dass eine punktförmige Masse, die sich entlang der Rampe bewegt, den Weg der kürzest möglichen Zeit nimmt), wie in Abbildung 1 dargestellt.
Ein Punkt B liegt zwischen A und C auf der Brachistochronenkurve. Eine kleine Kugel mit vernachlässigbarem Radius und Masse m bewegt sich entlang der Brachistochronenrampe, ausgehend von der Ruhelage im Punkt A.
Im Punkt B ist die Norm ihrer Geschwindigkeit v_b und der spitze Winkel zwischen seiner Geschwindigkeit und der Vertikalen y-Achse ist $\theta_b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

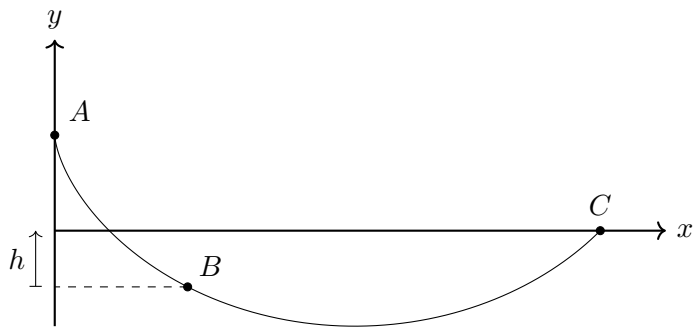


Abbildung 1: Brachistochrone Kurve zwischen den Punkten A und C.

i. (0.5 Pkte.) Wie gross ist das Tempo v (Norm der Geschwindigkeit) des Teilchens in Abhängigkeit von der vertikalen Verschiebung Δy vom Punkt B?
ii. (2 Pkte.) Wie gross ist der Winkel θ_c zwischen der Geschwindigkeit und der Vertikalen, wenn die Kugel im Punkt C ankommt? Schreibe deine Antwort in Form von θ_b, v_b, h (der Höhendifferenz zwischen B und C), g (der Fallbeschleunigung) und m.
Hinweis: Finde die Beziehung zwischen der Norm der Geschwindigkeit und dem Winkel mit der Vertikalen.
iii. (1.5 Pkte.) Nehmen wir nun an, dass die Kugel im Punkt A eine vertikale Anfangsgeschwindigkeit mit der Norm v_a hat. Wäre die Rampe in diesem Fall immer noch ein Weg der kürzesten Zeit? Mit anderen Worten: Gibt es eine andere Rampenform, die den Ball in kürzerer Zeit von Punkt A zu Punkt C bringt, wenn der Ball eine gegebene kinetische Anfangsenergie hat (die Anfangsgeschwindigkeit hat die Norm v_a, aber die Richtung kann so gewählt werden, dass die Zeit minimiert wird)? Erläutere deine Überlegungen.

Kurzaufgabe 2.2: NEOWISE *(4 Punkte)*

Der Komet C/2023 F3 (NEOWISE) flog im Jahr 2020 nahe an der Sonne vorbei. Seine Umlaufzeit wurde auf 6800 Jahre geschätzt. Führe die Berechnungen in astronomischen Einheiten und in Jahren durch.
i. (2 Pkte.) Schätze die maximale Entfernung des Kometen von der Sonne.
ii. (2 Pkte.) Schätze die Geschwindigkeit des Kometen bei der Hälfte der maximalen Entfernung.

Kurzaufgabe 2.3: Pendel *(4 Punkte)*

Emmy möchte eine Pendeluhr bauen. Dazu benötigt sie ein Pendel mit einer Periode von genau $T = 2.0\,\mathrm{s}$. Insbesondere möchte Emmy, dass die Periode des Pendels möglichst wenig von der Temperatur abhängt. Emmy hat folgenden Bauplan im Internet gefunden:

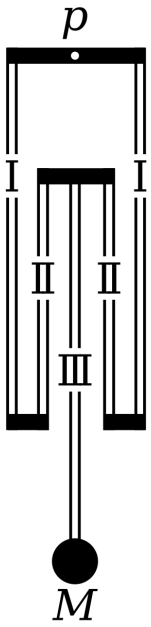


Abbildung 1: Das Pendel ist am Punkt p aufgehängt und besteht aus Stäben I-III, Querverbindungen (schwarz), und der Pendelmasse M. Die Stäbe I und II sind aus Stabilitätsgründen doppelt ausgeführt, wir nehmen an, dass Stäbe mit gleicher Nummer identisch sind.

Emmy weiss, dass sie unterschiedliche Materialien und Längen für die drei Stäbe I-III wählen muss. Sie möchte, dass die Stäbe I und III gleich lang sind, dass heisst $L_\mathrm{I} = L_\mathrm{III}$ und, damit sich die Querverbindungen nicht berühren, muss $L_\mathrm{I} > L_\mathrm{II}$ gelten. Emmy hat folgende Materialien mit Längenausdehnungskoeffizient α zur Verfügung:

Material	α/K^{-1} bei $20\,^\circ\mathrm{C}$
Aluminium	23×10^{-6}
Invar	1.0×10^{-6}
Messing	19×10^{-6}
Stahl	13×10^{-6}

Tabelle 2

Nimm an, dass die Masse der Stäbe gegenüber dem Gewicht der Pendelmasse M vernachlässigbar ist und dass die Pendelmasse annähernd eine Punktmasse ist.

i. (3 Pkte.) Gib eine Kombination von Materialien und Längen der Stäbe I-III an, die Emmys Bedingungen erfüllen.

ii. (1 Pkt.) Emmy hat bemerkt, dass sich die Periode des Pendels bei grossen Temperaturunterschieden trotz deiner Hilfe noch etwas verändert. Weisst du, woran das liegen kann? Gib zwei mögliche Ursachen an.

Kurzaufgabe 2.4: Ein Leck in der Raumstation *(4 Punkte)*

Wir befinden uns auf einer Raumstation mit einem Volumen von $V = 500\,\mathrm{m}^3$ mitten im Weltraum. Die Temperatur ist angenehm $T = 25\,°\mathrm{C}$ und der Luftdruck beträgt $p = 1\,\mathrm{bar}$.

i. (1.5 Pkte.) Wie gross ist die Quadratwurzel aus der mittleren quadratischen Geschwindigkeit $v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ eines Stickstoffmoleküls (N_2, $M = 0.028\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$)?

ii. (2.5 Pkte.) Astronaut Adrian entdeckt nun ein Leck mit der Grösse $A = 0.001\,\mathrm{m}^2$. Drücke die Anzahl der Moleküle, die pro Zeiteinheit ins All fliegen $\frac{\Delta N}{\Delta t}$, als Funktion von A, $\langle |v_\perp| \rangle$, der Gesamtzahl der Gasmoleküle N und V aus. Bestimme dann die Zeit, bis mehr als der Bruchteil 10^{-5} der Luft entwichen ist. Du kannst davon ausgehen, dass sich der Luftdruck in der Raumstation während des Vorgangs nicht wesentlich ändert. Du kannst auch davon ausgehen, dass die Änderung des Volumens und der Anzahl der Moleküle im Verhältnis zum Gesamtvolumen und zur Gesamtzahl der Moleküle klein ist.

Hinweis: Es gilt die Beziehung $\langle |v_\perp| \rangle = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_{\mathrm{rms}}$, wobei $v_\perp$ für die Geschwindigkeit entlang der Richtung senkrecht zum Loch steht. Um die folgenden Grössen abzuschätzen, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Hälfte der Gasmoleküle eine Geschwindigkeit $v_\perp = \langle |v_\perp| \rangle$ und die andere Hälfte eine Geschwindigkeit $v_\perp = -\langle |v_\perp| \rangle$ hat.

Kurzaufgabe 2.5: Gekoppelte RLC-Kreis *(4 Punkte)*

Ähnlich wie bei mechanischen Oszillatoren können auch Wechselstromkreise gekoppelt werden. Betrachte die in Abbildung 1 dargestellte Schaltung, bei der beide Stromschleifen durch die gegenseitige Induktivität L_{12} gekoppelt sind. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die zulässigen Frequenzen dieses Systems zu untersuchen.

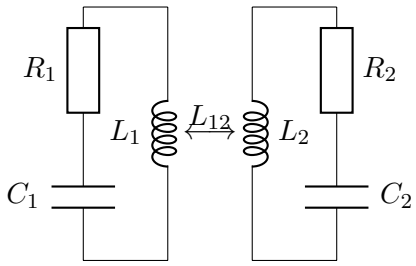


Abbildung 1: Zwei gekoppelte RLC-Kreise mit Widerstand R_n, Induktivität L_n, Kapazität C_n für $n = 1, 2$ und gegenseitiger Induktivität L_{12}.

i. (1.5 Pkte.) Schreibe die Kirchhoff'sche Maschenregel für beide Stromkreise getrennt auf unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktivität L_{12}, und finde ein System gekoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $I_1(t)$ und $I_2(t)$, den Strom in der ersten, beziehungsweise der zweiten Schleife.

ii. (1.5 Pkte.) Zeige anhand des Ansatzes $I_n(t) = I_{0,n} e^{i\omega t}$ für $n = 1, 2$, wobei i die imaginäre Einheit ist, dass die folgende Gleichung für die Frequenzen des Systems gilt:

$$\left[R_1 + i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right]\left[R_2 + i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right] = -\omega^2 L_{12}^2.$$

iii. (1 Pkt.) Nehmen wir nun der Einfachheit halber an, dass $R_1 = R_2 = 0$, $L_1 = L_2 = L$ und $C_1 = C_2 = C$, bestimme die beiden zulässigen Frequenzen ω_1 und ω_2 des Systems in Abhängigkeit von $\frac{L_{12}}{L}$ und ω_0, der Resonanzfrequenz eines LC-Kreises.

Kurzaufgabe 2.6: Vier Polarisatoren *(4 Punkte)*

i. (4 Pkte.) Vier lineare Polarisatoren sind in einer Reihe angeordnet. Die Polarisationsachse des ersten Polarisators ist um 90° gegenüber dem vierten Polarisator gedreht. Die beiden mittleren Polarisatoren können gedreht werden, um die Richtung ihrer Polarisationsachsen anzupassen. Ein unpolarisierter Lichtstrahl der Intensität I_0 wird auf den ersten Polarisator gerichtet. Wie hoch ist die maximale Intensität des aus dem vierten Polarisator austretenden Lichts?

Kurzaufgaben: Lösungen

Kurzaufgabe 2.1: Brachistochrone Kurve *4*

Eine Brachistochrone ist eine Kurve zwischen zwei Punkten, entlang der sich ein Körper unter Schwerkraft in kürzerer Zeit bewegen kann als bei jeder anderen Kurve, wenn man Reibung und Luftwiderstand vernachlässigt, was wir in diesem Problem tun.
Wir betrachten zwei Punkte, A und C, die durch eine brachistochrone Rampe verbunden sind (was bedeutet, dass eine punktförmige Masse, die sich entlang der Rampe bewegt, den Weg der kürzest möglichen Zeit nimmt), wie in Abbildung 1 dargestellt.
Ein Punkt B liegt zwischen A und C auf der Brachistochronenkurve. Eine kleine Kugel mit vernachlässigbarem Radius und Masse m bewegt sich entlang der Brachistochronenrampe, ausgehend von der Ruhelage im Punkt A.
Im Punkt B ist die Norm ihrer Geschwindigkeit v_b und der spitze Winkel zwischen seiner Geschwindigkeit und der Vertikalen y-Achse ist $\theta_b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

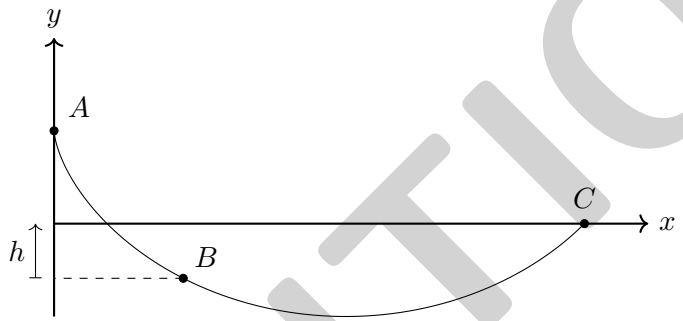


Abbildung 1: Brachistochrone Kurve zwischen den Punkten A und C.

i. Wie gross ist das Tempo v (Norm der Geschwindigkeit) des Teilchens in Abhängigkeit von der vertikalen Verschiebung Δy vom Punkt B? *0.5*

Using the conservation of energy, we have for a fourth point D on the ramp $E_b = E_d$, which gives

$$\begin{aligned} mgy_b + \frac{1}{2}mv_b^2 &= mgy_d + \frac{1}{2}mv_d^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mv_d^2 &= \frac{1}{2}my_b^2 - mg\Delta y \\ \Rightarrow v = v_d &= \sqrt{v_b^2 - 2g\Delta y}. \end{aligned}$$

0.5

ii. Wie gross ist der Winkel θ_c zwischen der Geschwindigkeit und der Vertikalen, wenn die Kugel im Punkt C ankommt? Schreibe deine Antwort in Form von θ_b, v_b, h (der Höhendifferenz zwischen B und C), g (der Fallbeschleunigung) und m.
***Hinweis:* Finde die Beziehung zwischen der Norm der Geschwindigkeit und dem Winkel mit der Vertikalen.** *2*

The particle is following the path of shortest time. We know from Fermat's principle of least time that light travels on the path of least possible time between two points. This tells us that the particle will

SOLUTION

follow the same path that light would (0.5 point for the idea of using optics). We know from Snell's law that $\frac{\sin(\theta)}{v} = K$ where K is a constant (0.5 point). Using the values from point B we obtain the value

$$K = \frac{\sin(\theta_b)}{v_b}.$$

Using the result from the previous question, the velocity at point C will be given by

$$v_c = \sqrt{v_b^2 - 2gh},$$

1

which gives (any form which is correct and is written as a function of the required variables gives the full point)

$$\theta_c = \arcsin(Kv_c) = \arcsin\left(\frac{\sin(\theta_b)}{v_b}\sqrt{v_b^2 - 2gh}\right) = \arcsin\left(\sin(\theta_b)\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_b^2}}\right).$$

1

iii. Nehmen wir nun an, dass die Kugel im Punkt A eine vertikale Anfangsgeschwindigkeit mit der Norm v_a hat. Wäre die Rampe in diesem Fall immer noch ein Weg der kürzesten Zeit? Mit anderen Worten: Gibt es eine andere Rampenform, die den Ball in kürzerer Zeit von Punkt A zu Punkt C bringt, wenn der Ball eine gegebene kinetische Anfangsenergie hat (die Anfangsgeschwindigkeit hat die Norm v_a, aber die Richtung kann so gewählt werden, dass die Zeit minimiert wird)? Erläutere deine Überlegungen. ***1.5***

The answer is no. 0.5

The marking scheme will detail two possible ways to answer the question. Any reasoning that makes sense, as long as it is well thought out and well explained is accepted. The level of detail should ressemble the one of the solutions presented in the marking scheme to achieve full points.

The first way to answer this question is using optics. As we saw before, the path of the ball should follow Snell's law of refraction, meaning that

$$K = \frac{\sin(\theta_a)}{v_a}.$$

Let us assume that the curve of least time in the case of a non-vanishing initial velocity is the brachistochrone curve. Then, at point A, we have $\theta_a = 0$ (a non-vanishing angle would correspond to sliding on an inclined plane for small x, which for a fixed height difference takes more time than a free fall trajectory), which gives

$$K = \frac{0}{v_a} = 0$$

(note that this was not the case before because with $v_a = 0$ we have an undetermined ratio "$K = \frac{0}{0}$" at the point A). Therefore, to follow Snell's law given the initial conditions, the angle θ should be equal to 0 throughout the whole curve, which is not possible, except if C is right under A, which is not the case here. So, the brachistochrone can only be the correct curve in the trivial case where C lies just below A if there is a non-vanishing initial velocity. 1

Alternativlösung: ***(1.5)***

The second way of solving this question is to try to understand what would happen when we make v_a very big. Let us consider the case

$$v_a^2 \gg -2g\Delta y,$$

SOLUTION

where Δy is taken to be negative. We know from before that by the conservation of energy

$$\sqrt{v_a^2 - 2g\Delta y} - v_a = \Delta v,$$

which yields

$$\Delta v \approx 0$$

with our assumptions. The ball will thus have approximately the same speed throughout its path. The path of shortest time between two points for an object moving with constant speed is a straight line, so we can see that as we increase the value of v_a, the path of shortest time will approach a straight line, meaning that the initial velocity has an impact on the path of shortest time under gravity. (1.5)

SOLUTION

Kurzaufgabe 2.2: NEOWISE *4*

Der Komet C/2023 F3 (NEOWISE) flog im Jahr 2020 nahe an der Sonne vorbei. Seine Umlaufzeit wurde auf 6800 Jahre geschätzt. Führe die Berechnungen in astronomischen Einheiten und in Jahren durch.

i. Schätze die maximale Entfernung des Kometen von der Sonne. *2*

We can use Kepler's third law and compare to the Earth, as they both orbit the Sun:

$$\frac{a_\mathrm{E}^3}{T_\mathrm{E}^2} = \frac{a_\mathrm{N}^3}{T_\mathrm{N}^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

0.5

With such a high period, the trajectory is very excentric and we can approximate the maximum distance as twice the semi-major axis. 0.5

This gives

$$d \approx 2a_\mathrm{N} = 2a_\mathrm{E}\left(\frac{T_\mathrm{N}}{T_\mathrm{E}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

0.5

a_E is roughly equivalent to an astronomical unit and T_E is one year, so

$$d \approx 2 \cdot 1\,\mathrm{au} \cdot (6800)^{\frac{2}{3}} \approx 718\,\mathrm{au}.$$

0.5

The actual value (taking the excentricity properly into account) has been estimated at about 710 au.

ii. Schätze die Geschwindigkeit des Kometen bei der Hälfte der maximalen Entfernung. *2*

We can take the trajectory as approximately one-dimensional and assume the speed to be zero at the farthest point, and e.g. use energy conservation. 0.5

$$-\frac{GMm}{d} = -\frac{GMm}{\frac{d}{2}} + \frac{1}{2}mv^2,$$

so

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{d}}.$$

0.5

We know from Kepler's third law that $GM = 4\pi^2 \frac{a_\mathrm{E}^3}{T_\mathrm{E}^2}$. 0.5

So

$$v = 2\pi \frac{1}{T_\mathrm{E}} \sqrt{\frac{2a_\mathrm{E}^3}{d}} \approx 0.332\,\mathrm{au} \cdot \mathrm{a}^{-1}.$$

0.5

SOLUTION

Kurzaufgabe 2.3: Pendel 4

Emmy möchte eine Pendeluhr bauen. Dazu benötigt sie ein Pendel mit einer Periode von genau $T = 2.0\,\mathrm{s}$. Insbesondere möchte Emmy, dass die Periode des Pendels möglichst wenig von der Temperatur abhängt. Emmy hat folgenden Bauplan im Internet gefunden:

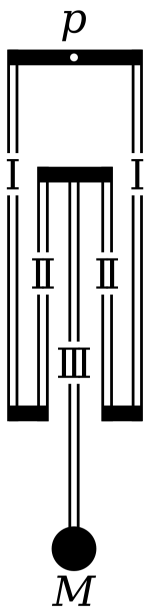


Abbildung 1: Das Pendel ist am Punkt p aufgehängt und besteht aus Stäben I-III, Querverbindungen (schwarz), und der Pendelmasse M. Die Stäbe I und II sind aus Stabilitätsgründen doppelt ausgeführt, wir nehmen an, dass Stäbe mit gleicher Nummer identisch sind.

SOLUTION

Emmy weiss, dass sie unterschiedliche Materialien und Längen für die drei Stäbe I-III wählen muss. Sie möchte, dass die Stäbe I und III gleich lang sind, dass heisst $L_{\mathrm{I}} = L_{\mathrm{III}}$ und, damit sich die Querverbindungen nicht berühren, muss $L_{\mathrm{I}} > L_{\mathrm{II}}$ gelten. Emmy hat folgende Materialien mit Längenausdehnungskoeffizient α zur Verfügung:

Material	α/K^{-1} **bei** $20\,^\circ\mathrm{C}$
Aluminium	23×10^{-6}
Invar	1.0×10^{-6}
Messing	19×10^{-6}
Stahl	13×10^{-6}

Tabelle 2

Nimm an, dass die Masse der Stäbe gegenüber dem Gewicht der Pendelmasse M vernachlässigbar ist und dass die Pendelmasse annähernd eine Punktmasse ist.

i. Gib eine Kombination von Materialien und Längen der Stäbe I-III an, die Emmys Bedingungen erfüllen. *3*

We have $T = 2\pi\sqrt{L_{\text{tot}}/g}$, hence we find $L_{\text{tot}} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$. For $T = 2.0\,\text{s}$ we get $L_{\text{tot}} = 99\,\text{cm}$ (numerical value is not required). 0.5

The length L of any rod goes as $L(1 + \alpha\Delta\tau)$ given a temperature difference $\Delta\tau$. (The points are also given if this fact is used but not explicitly stated.) 0.5

We have

$$L_{\text{tot}} = L_{\text{I}} - L_{\text{II}} + L_{\text{III}} \tag{3}$$

In order for the pendulum to be as precise as possible, we want the change in length to be zero. The change in length given a temperature difference $\Delta\tau$ with coefficients $\alpha_{\text{I}}, \alpha_{\text{II}}, \alpha_{\text{III}}$ is given by:

$$\Delta L_{\text{tot}} = (L_{\text{I}}\alpha_{\text{I}} - L_{\text{II}}\alpha_{\text{II}} + L_{\text{III}}\alpha_{\text{III}})\Delta\tau \tag{4}$$

using $L_{\text{I}} = L_{\text{III}}$ and requiring $\Delta L_{\text{tot}} = 0$ for any $\Delta\tau$ we find the following condition:

$$L_{\text{I}}(\alpha_{\text{I}} + \alpha_{\text{III}}) = L_{\text{II}}\alpha_{\text{II}} \tag{5}$$

1

The constraint $L_{\text{I}} > L_{\text{II}}$ implies that $\alpha_{\text{I}} + \alpha_{\text{III}} > \alpha_{\text{II}}$. The possible combinations of materials (up to exchanging I and III) are listed in the table below. They only need to list one (correct) variant. (0.25) for a correct choice of materials, (0.75) for the correct lengths.

I	II	III	$L_{\text{I}} = L_{\text{III}}$	L_{II}
Invar	Aluminium	Invar	$\frac{23}{44}L_{\text{tot}} = 52\,\text{cm}$	$\frac{2}{44}L_{\text{tot}} = 4.5\,\text{cm}$
Invar	Messing	Invar	$\frac{19}{36}L_{\text{tot}} = 52\,\text{cm}$	$\frac{2}{36}L_{\text{tot}} = 5.5\,\text{cm}$
Invar	Stahl	Invar	$\frac{13}{24}L_{\text{tot}} = 54\,\text{cm}$	$\frac{2}{24}L_{\text{tot}} = 8.3\,\text{cm}$
Invar	Aluminium	Stahl	$\frac{23}{32}L_{\text{tot}} = 71\,\text{cm}$	$\frac{14}{32}L_{\text{tot}} = 43\,\text{cm}$
Invar	Messing	Stahl	$\frac{19}{24}L_{\text{tot}} = 78\,\text{cm}$	$\frac{14}{24}L_{\text{tot}} = 58\,\text{cm}$
Invar	Aluminium	Messing	$\frac{23}{26}L_{\text{tot}} = 88\,\text{cm}$	$\frac{20}{26}L_{\text{tot}} = 76\,\text{cm}$

1

ii. Emmy hat bemerkt, dass sich die Periode des Pendels bei grossen Temperaturunterschieden trotz deiner Hilfe noch etwas verändert. Weisst du, woran das liegen kann? Gib zwei mögliche Ursachen an. *1*

Possible reasons are: 1. Thermal expansion is only approximately linear and the approximation gets worse for large temperature differences. 2. The rods also have masses, which shift and change the period of the pendulum. 3. Thermal expansion also affects other parts of the clock, which can decrease the precision. Other sensible answers are also accepted. Give 0.5 points if only one reason is given. 1

SOLUTION

Kurzaufgabe 2.4: Ein Leck in der Raumstation *4*

Wir befinden uns auf einer Raumstation mit einem Volumen von $V = 500\,\mathrm{m}^3$ mitten im Weltraum. Die Temperatur ist angenehm $T = 25\,°\mathrm{C}$ und der Luftdruck beträgt $p = 1\,\mathrm{bar}$.

i. Wie gross ist die Quadratwurzel aus der mittleren quadratischen Geschwindigkeit $v_{\mathbf{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ eines Stickstoffmoleküls (N_2, $M = 0.028\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$)? *1.5*

The rms velocity is

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{5RT}{M}}.$$

1

Either one knows the formula by heart or it can be derived from Maxwell's distribution or equipartition

$$\frac{1}{2}mv_{rms}^2 = \frac{1}{2}m\langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{5}{2}k_B T$$

where we have 5 degrees of freedom due to two additional rotational degrees of freedom at room temperature for diatomic nitrogen gas.

We get a numerical value $v_{\mathrm{rms}} = 665\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. 0.5

ii. Astronaut Adrian entdeckt nun ein Leck mit der Grösse $A = 0.001\,\mathrm{m}^2$. Drücke die Anzahl der Moleküle, die pro Zeiteinheit ins All fliegen $\frac{\Delta N}{\Delta t}$, als Funktion von A, $\langle |v_\perp| \rangle$, der Gesamtzahl der Gasmoleküle N und V aus. Bestimme dann die Zeit, bis mehr als der Bruchteil 10^{-5} der Luft entwichen ist. Du kannst davon ausgehen, dass sich der Luftdruck in der Raumstation während des Vorgangs nicht wesentlich ändert. Du kannst auch davon ausgehen, dass die Änderung des Volumens und der Anzahl der Moleküle im Verhältnis zum Gesamtvolumen und zur Gesamtzahl der Moleküle klein ist.
Hinweis: **Es gilt die Beziehung $\langle |v_\perp| \rangle = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_{\mathbf{rms}}$, wobei $v_\perp$ für die Geschwindigkeit entlang der Richtung senkrecht zum Loch steht. Um die folgenden Grössen abzuschätzen, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Hälfte der Gasmoleküle eine Geschwindigkeit $v_\perp = \langle |v_\perp| \rangle$ und die andere Hälfte eine Geschwindigkeit $v_\perp = -\langle |v_\perp| \rangle$ hat.** *2.5*

A particle leaves through the hole during a time Δt in case it is within a distance $\Delta x = \Delta t v_\perp$ and it is moving towards the hole. In average we get

$$\Delta x = \Delta t \langle |v_\perp| \rangle.$$

0.5

So we find the exiting particles by multiplying the corresponding volume with the particle density

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}\Delta V \frac{n}{V} = \frac{1}{2}A\langle |v_\perp| \rangle \frac{n}{V}.$$

The factor $\frac{1}{2}$ is because half of the particles are moving away from the hole. 1

In our case we require

$$\Delta n = cn$$

where $c = 10^{-5}$. 0.5

We can solve for Δt and get

$$\Delta t = \frac{2cV}{A\langle |v_\perp| \rangle} = \frac{2cV}{A\sqrt{\frac{2}{3\pi}} v_{\mathrm{rms}}} = 33\,\mathrm{ms}.$$

0.5

SOLUTION

Kurzaufgabe 2.5: Gekoppelte RLC-Kreis *4*

Ähnlich wie bei mechanischen Oszillatoren können auch Wechselstromkreise gekoppelt werden. Betrachte die in Abbildung 1 dargestellte Schaltung, bei der beide Stromschleifen durch die gegenseitige Induktivität L_{12} gekoppelt sind. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die zulässigen Frequenzen dieses Systems zu untersuchen.

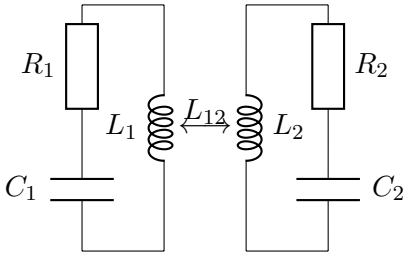


Abbildung 1: Zwei gekoppelte RLC-Kreise mit Widerstand R_n, Induktivität L_n, Kapazität C_n für $n = 1, 2$ und gegenseitiger Induktivität L_{12}.

i. Schreibe die Kirchhoff'sche Maschenregel für beide Stromkreise getrennt auf unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktivität L_{12}, und finde ein System gekoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $I_1(t)$ und $I_2(t)$, den Strom in der ersten, beziehungsweise der zweiten Schleife. *1.5*

The Kirchoff's loop rule (voltage law) gives

$$L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + \frac{Q_1}{C_1} + R_1 I_1 = -L_{12} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t},$$
$$L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 = -L_{12} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}.$$

1

To find a second order coupled system, one can take the time derivative of the above and get

$$L_1 \frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}t^2} + R_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_1} I_1 = -L_{12} \frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}t^2},$$
$$L_2 \frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}t^2} + R_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_2} I_2 = -L_{12} \frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}t^2}.$$

0.5

ii. Zeige anhand des Ansatzes $I_n(t) = I_{0,n} e^{i\omega t}$ für $n = 1, 2$, wobei i die imaginäre Einheit ist, dass die folgende Gleichung für die Frequenzen des Systems gilt:

$$\left[R_1 + i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right]\left[R_2 + i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right] = -\omega^2 L_{12}^2.$$

1.5

SOLUTION

Because of the coupling, the frequencies of both RLC loops are equal. Inserting the ansatz in the system from the previous question gives

$$\left(-L_1\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_1}\right) I_1 = L_{12}\omega^2 I_2,$$
$$\left(-L_2\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_2}\right) I_2 = L_{12}\omega^2 I_1.$$

Multiplying both equations then yields

$$\left[-L_1\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_1}\right]\left[-L_2\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_2}\right] I_1 I_2 = L_{12}^2\omega^4 I_1 I_2.$$

This has only non-trivial solutions for non-vanishing currents I_1 and I_2, so one can divide both sides by $I_1 I_2$ and multiply both sides by $\frac{i^2}{\omega^2}$ in order to reach the desired form:

$$\left[R_1 + i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right]\left[R_2 + i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right] = -\omega^2 L_{12}^2.$$

1.5

iii. Nehmen wir nun der Einfachheit halber an, dass $R_1 = R_2 = 0$, $L_1 = L_2 = L$ und $C_1 = C_2 = C$, bestimme die beiden zulässigen Frequenzen ω_1 und ω_2 des Systems in Abhängigkeit von $\frac{L_{12}}{L}$ und ω_0, der Resonanzfrequenz eines LC-Kreises. ***1***

The resonance frequency of a LC circuit is given by $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. 0.25

In this simplified case, the previous equation for the frequency becomes

$$\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = L_{12}^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \pm L\omega \mp \frac{1}{\omega C} = L_{12}\omega$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \pm\frac{1}{(\pm L - L_{12})\,C} = \frac{1}{(L \mp L_{12})\,C}$$

with solutions

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{(L - L_{12})\,C}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{1 - \frac{L_{12}}{L}}},$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{(L + L_{12})\,C}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{1 + \frac{L_{12}}{L}}}.$$

0.75

SOLUTION

Kurzaufgabe 2.6: Vier Polarisatoren *4*

i. Vier lineare Polarisatoren sind in einer Reihe angeordnet. Die Polarisationsachse des ersten Polarisators ist um 90° gegenüber dem vierten Polarisator gedreht. Die beiden mittleren Polarisatoren können gedreht werden, um die Richtung ihrer Polarisationsachsen anzupassen. Ein unpolarisierter Lichtstrahl der Intensität I_0 wird auf den ersten Polarisator gerichtet. Wie hoch ist die maximale Intensität des aus dem vierten Polarisator austretenden Lichts? *4*

After the first polarizer the intensity is $\frac{1}{2}I_0$. 0.25

By Malus' law, if linearly polarized light of intensity I_1 passes through a linear polarizer with axis tilted by angle θ with respect to the polarization axis of the incoming light, the transmitted beam will have intensity $I_1 \cos(\theta)^2$. 0.5

If the intermediate polarizers are tilted by θ_1 and θ_2 with respect to the first polarizer, the transmitted light has intensity $I_\mathrm{t} = \frac{1}{2}I_0 \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)^2$. 1

For the optimal choice of θ_1, θ_2 we have $\frac{\partial I_\mathrm{t}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial I_\mathrm{t}}{\partial \theta_2} = 0$. 1

Note that

$$\frac{\partial I_t}{\partial \theta_1} \propto \sin(\theta_1)\cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

and

$$\frac{\partial I_t}{\partial \theta_2} \propto \sin(\theta_2 - \theta_1)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) - \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right).$$

Hence, the optimal choice is $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$. 1

The optimal intensity of the transmitted light therefore is $\frac{1}{2}I_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)^6 \approx 0.21 I_0$. 0.25

SOLUTION