PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

18. - 19. März 2023

Teil 1	:	**3 lange Probleme**
Zeit	:	150 Minuten
Total	:	48 Punkte (3×16)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#e0650292

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Lange Probleme

Zeit: 150 Minuten
Maximalpunktzahl: 48 Punkte (3×16)

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiter zu lesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Langes Problem 1.1: Das Zwillingsparadoxon *(16 Punkte)*

Die spezielle Relativitätstheorie führt das Konzept der Zeitdilatation ein. Ein gängiges Missverständnis dieses Konzepts ist bekannt als das Zwillingsparadoxon. In dieser Aufgabe wirst du dieses Paradox schrittweise mit Hilfe von Raum-Zeit-Diagrammen lösen.

Teil A. Raum-Zeit-Diagramme *(2.5 Punkte)*

Raum-Zeit-Diagramme sind ein nützliches Hilfsmittel um Aufgaben der speziellen Relativitätstheorie zu bearbeiten. In solchen Diagrammen wird die Zeit multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit ct auf der vertikalen Achse gezeichnet, während die Position x auf der horizontalen Achse gezeichnet wird. Beide Achsen verwenden die gleichen Einheiten.

i. (1 Pkt.) Zeichne in ein Raum-Zeit-Diagramm die zwei Linien eines Teilchens, welches sich mit Lichtgeschwindigkeit c bewegt und durch den Ursprung führt. Die Vereinigung der zwei Linien wird als Lichtkegel bezeichnet.

ii. (0.5 Pkte.) Alice und Bob sind Zwillinge. An ihrem zwanzigsten Geburtstag entscheidet Alice mit einer Rakete zu einem Stern zu reisen. Der Stern ist $x_1 = 1\,\mathrm{ly}$ (Lichtjahre) entfernt und die Rakete fliegt mit $v = \frac{c}{2}$. Am Stern angekommen reist sie zurück mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtung. Bob hingegen bleibt auf der Erde und wartet auf Alice's Rückkehr. Betrachten wir nun wie die Zeitdilatation das Altern der Zwillinge beeinflusst. Zeichne dazu als erstes die Trajektorie von Bob von Zeit $t_0 = 0$ zur Zeit t_2 (Zeit von Alice's Rückkehr) wobei Bob während der ganzen Reise am Ort $x = 0$ bleibt.

iii. (1 Pkt.) Zeichne im selben Diagramm die Trajektorie von Alice. Dabei markiere die Koordinatenzeit t_1 Alice's Ankunft auf dem Stern und ihre Richtungsänderung.

Teil B. Zeitdilatation *(3.5 Punkte)*

Du hast vielleicht gehört, dass in der speziellen Relativitätstheorie Zeitdilatationen auftreten kann wenn ein System sich relativ zu einem anderen bewegt. Naiverweise würde Bob, der auf der Erde bleibt, erwarten, dass Alice zur Zeit t_2 jünger ist wie er, da aus seiner Perspektive Alice sich bewegt hat und darum Zeitdilatation erfahren hat. Umgekehrt kann Alice aus ihrer Perspektive Bob's Bewegung sehen und nach der gleichen Logik erwarten, dass bei der Ankunft Bob jünger ist wie sie. Dies ist das Zwillingsparadoxon. Das Ziel dieser Teilaufgabe ist dieses Paradoxon zu lösen.

i. (0.5 Pkte.) Beschreibe die Differenz der quadrierten Eigenzeit $(\Delta\tau)^2$ als Funktion von Δt und Δx. Dieser Ausdruck kann als Satz des Pythagoras für Raum-Zeit betrachtet werden. Die Eigenzeit eines Systems bezeichnet die im System gemessene Zeit.

ii. (0.5 Pkte.) Berechne wieviel Zeit für Bob vergangen ist, wenn Alice von ihrer Reise zurückkehrt. *Hinweis: Das Diagramm könne nützlich sein um das Problem geometrisch zu lösen.*

iii. (1.5 Pkte.) Berechne wieviel Zeit für Alice vergangen ist während ihrer Reise.

iv. (1 Pkt.) Beschreibe qualitativ den physikalischen Unterschied zwischen Alice und Bob, der deine Resultate aus den zwei vorherigen Fragen erklärt.

Teil C. Alice's Perspektive *(5.5 Punkte)*

Lass uns dies vertiefen, in dem wir Alice's Koordinaten betrachten.

i. (1 Pkt.) Bis anhin haben wir implizit Bob's Koordinatensystem (ct, x) verwendet. Drücke nun

Alice's Koordinatensystem (ct', x') als Funktion von t, x, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ und $\beta = v/c$ aus.

ii. (2 Pkte.) Zeichne in dein Diagramm die Simultaneitätslinie für Alice ein wenn sie den Stern erreicht, i.e., die Linie $t' = \text{const.}$ durch das Ereignis der Ankunft. Bestimme wie alt Bob ist wenn Alice den Stern erreicht.

iii. (1.5 Pkte.) Sei (ct'', x'') das Koordinatensystem von Alice nachdem sie die Geschwindigkeit umgekehrt hat. Zeichne in deinem Diagramm die Simultaneitätslinie ein für Alice, direkt nach ihrer Richtungsänderung. Bestimme mit Hilfe des Diagramms wie alt Bob ist aus Sicht von Alice direkt nach ihrer Richtungsänderung.
Hinweise: Wie ist die Steigung der Simultaneitätslinie im (t'', x'') System relativ zu jener im (t', x') System?

iv. (1 Pkt.) Vergleiche dieses Resultat mit jenem kurz vor Eintreffen auf dem Stern. Hast du dieses Resultat erwartet? Warum?

Teil D. Doppler-Effekt *(4.5 Punkte)*

Lass uns nun annehmen, dass Alice Bob erzählt hat, dass sie während der gesamten Reise einen Lichtstrahl mit Wellenlänge $\lambda = 500\,\text{nm}$ Richtung Erde halten wird.

i. (1 Pkt.) Berechne die Wellenlänge von Alice's Signal vor ihrer Ankunft auf dem Stern aus Sicht von Bob.

ii. (0.5 Pkte.) Berechne die Wellenlänge von Alice's Signal nach ihrem Richtungswechsel aus Sicht von Bob.

iii. (1 Pkt.) Berechne die Zeit t_c zu der Bob die Farbänderung beobachtet.
Hinweis: Das Diagramm könnte hilfreich sein.

iv. (2 Pkte.) Wie kann Bob die Messung von t_c und den zwei Wellenlängen vor und nach dem Richtungswechsel nützen, um Alice's Alter bei Ankunft auf der Erde vorherzusagen? Vergleiche dein Resultat mit jenem von oben.

Langes Problem 1.2: Ballon *(16 Punkte)*

Ziel dieser Aufgabe ist es die Flughöhe eines mit Helium gefüllten Wetterballons auszurechnen. Wir befassen uns hierzu zuerst mit der Physik der Atmosphäre. Nimm dazu an, dass diese aus reinem Stickstoff ^{14}N besteht, welches als ideales Gas aus Stickstoffmolekülen N_2 angenommen werden kann.

Teil A. Atmosphärenmodell *(6.5 Punkte)*

i. (1 Pkt.) Welche Kräfte sind zur Beschreibung einer statischen Luftsäule relevant?

ii. (3.5 Pkte.) Nimm an, dass wir einen Temperaturverlauf $T(z)$ in der Atmosphäre haben. Benutze nun die ideale Gasgleichung, um eine Differentialgleichung für die Dichte ρ herzuleiten.

iii. (2 Pkte.) Wir nehmen an, dass der Temperaturverlauf durch die Funktion $T(z) = T_0\,(1 + \alpha z)$ beschrieben werden kann mit T_0 der Temperatur auf Meereshöhe $z = 0$. Löse die Differentialgleichung mit dem Ansatz

$$\rho(z) = A\,(1 + \alpha z)^{-B}$$

und bestimme die Konstanten A und B in Abhängigkeit von ρ_0 (Dichte auf Meereshöhe), T_0, der molaren Masse m und α. Wir werden in den folgenden Aufgaben mit diesem Ansatz fortfahren.

Teil B. Aufstieg *(9.5 Punkte)*

Nimm nun an wir befinden uns auf Meereshöhe $z = 0$. Nimm an der Luftdruck ist 1.0 bar und wir haben sonnige 25 °C. Wir pumpen nun Helium ^{4}He in einen Ballon mit einer Nettomasse von 3.0 g, bis er ein Volumen von 5.0 L hat. Im Ballon entsteht dadurch ein Überdruck von 5000 Pa. Wir nehmen an, dass der Überdruck beim Aufstieg konstant bleibt. Du darfst zusätzlich annehmen, dass das Helium ein ideales Gas ist.

i. (1 Pkt.) Berechne die Luftdichte auf Meereshöhe und gib das Resultat in $\mathrm{g \cdot m^{-3}}$ an.

ii. (1 Pkt.) Beschreibe kurz in Worten, weshalb das Helium als ideales Gas eine kleinere Dichte hat als der Stickstoff. Welcher Parameter ist ausschlaggebend?

iii. (2.5 Pkte.) Was ist die Masse des Ballons und was ist die Kraft, welche auf Meereshöhe auf ihn wirkt? Gib sowohl die Formel als auch den Zahlenwert an. Nimm hier und im folgenden an, dass das Helium im Ballon jeweils die gleiche Temperatur hat, wie der ihn umgebende Stickstoff in der Atmosphäre.

iv. (4 Pkte.) Berechne nun die Höhe, welche der Ballon erreichen kann. Benutze dazu, dass $\alpha = -0.017\,\mathrm{km^{-1}}$.

v. (1 Pkt.) Auch wenn der Überdruck auf Meereshöhe nicht viel ausmacht ist er dennoch von wichtiger Bedeutung. Wie hoch würde der Ballon theoretisch fliegen, falls wir den Überdruck nicht berücksichtigen? Eine kurze Erklärung ohne Rechnung genügt.

Langes Problem 1.3: Jupitermission der OSA *(16 Punkte)*

Die OSA (Olympiad Space Agency) möchte ihre erste interplanetare Mission starten. Dafür braucht sie einige vorbereitende Berechnungen von dir, um den Erfolg der Mission sicherzustellen.

Teil A. Himmelsmechanik *(1.5 Punkte)*

Das Missionskomitee der OSA hat beschlossen, dass der Jupiter das Reiseziel der Sonde sein soll. Sie wollen, dass du einige Eigenschaften des Ziels berechnest.

i. (1.5 Pkte.) Gegeben die Dauer eines Jupiterjahres ($T_{\text{Jupiter}} = 4333\,\text{d}$) und die Massen des Jupiter-Sonne-Systems,

$$m_{\text{Jupiter}} = 1.899 \times 10^{27}\,\text{kg},$$

$$M_{\text{Sun}} = 1.9884 \times 10^{30}\,\text{kg},$$

berechne den Radius R_{Jupiter} der Jupiterumlaufbahn. Man kann davon ausgehen, dass die Sonne viel schwerer ist als der Jupiter und dass die Bahnen kreisförmig sind.

Teil B. Sonnengezeiten auf dem Jupiter *(4 Punkte)*

Forschende der OSA haben die Existenz von Gezeiten auf dem Jupiter postuliert, die ihrer Meinung nach zu drastischen Einbussen bei der Genauigkeit von jupiterbezogenen Horoskopen führen könnten. Um diese Hypothese zu überprüfen (oder zu widerlegen), sollst du einige Berechnungen anstellen.

i. (1 Pkt.) Berechne die Gravitationsbeschleunigung auf der Oberfläche des Jupiters (unter der Annahme, dass die Schwerkraft anderer Körper und die Rotation um die Sonne keine Auswirkungen haben). Sei $r_{\text{Jupiter}} = 69\,911\,\text{km}$ der Radius des Jupiters. Du kannst annehmen, dass der Jupiter eine perfekte Kugel ist.

ii. (2 Pkte.) Betrachte nun ein Bezugssystem, das sich mit dem Jupiter um die Sonne dreht. Berechne die Gesamtbeschleunigung auf der Sonnenseite des Jupiters in diesem Bezugssystem. Vernachlässige dabei die Gravitation des Jupiters selbst. Mache dasselbe auch für die sonnenabgewandte Seite.

iii. (1 Pkt.) Erkläre, wie die obigen Berechnungen die Existenz von (solaren) Gezeiten auf dem Jupiter zeigen. Glaubst du, dass dieser Effekt auf der Oberfläche des Jupiters erkennbar ist?

Teil C. JWST 2.0 *(3.5 Punkte)*

Forschende der OSA wollen ein Weltraumteleskop bauen, das durch den Jupiter von der Sonnenstrahlung abgeschirmt wird. Dazu werden sie das Teleskop am so genannten Lagrange-Punkt 2 (L2) positionieren.

i. (0.5 Pkte.) Lagrange-Punkte sind Punkte in einem Zweikörpersystem (in diesem Fall Jupiter und Sonne), in denen die Gesamtkraft, die auf einen dritten Körper wirkt, im mitrotierenden Bezugssystem null ist. Erläutere qualitativ, warum derartige Punkte existieren können.

ii. (1 Pkt.) Schreibe mit Hilfe der Frage über die Gezeiten eine Gleichung für die Gesamtbeschleunigung im mitrotierenden Bezugssystem auf, die ein Körper erfährt, der sich in einem Abstand d hinter (auf der sonnenabgewandten Seite) dem Jupiter befindet. Welche Bedingungen müssen an den Lagrange-Punkten gelten? Du brauchst diese Gleichung nicht zu lösen.

iii. (2 Pkte.) Erkläre, warum sich bei L2 normalerweise keine Asteroiden aufhalten. Begründe dies explizit anhand deiner vorherigen Ergebnisse.

Teil D. Reise zum Jupiter *(7 Punkte)*

Dank deiner Berechnungen ist die OSA nun zuversichtlich, dass sie tatsächlich einen Satelliten an der gewünschten Stelle platzieren kann. Jetzt müssen sie ihn «nur» noch dorthin bringen. Dazu haben die Forschenden der OSA die folgende mehrstufige Flugbahn vorgeschlagen:

1. Wir verlassen den Gravitationseinfluss der Erde, indem wir entlang der Erdumlaufbahn reisen, bis wir uns in einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Sonne befinden.
2. Wir zünden das Raketentriebwerk um mit dem starken Schub unsere Umlaufbahn anzupassen, so dass sie so elliptisch wird, dass der äusserste Punkt der Ellipse die Jupiterbahn trifft.
3. Bei Erreichen der Jupiterbahn beschleunigen wir nochmals schnell, um unsere Bahn in die Kreisbahn des Jupiters zu korrigieren.

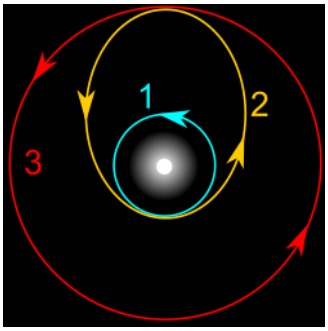


Abbildung D.1: Die geplante Flugbahn

i. (1 Pkt.) Berechne die minimale Geschwindigkeit v_{escape}, die nötig ist, um das Gravitationspotential der Erde zu verlassen (die Geschwindigkeit, bei der ein Objekt, das sich radial nach aussen bewegt, nicht mehr auf die Erde zurückfällt). Du kannst alle anderen Himmelskörper vernachlässigen. Du kannst die Rotation der Erde vernachlässigen. $r_{\text{Earth}} = 6371\,\text{km}$, $R_{\text{Earth}} = 1.496 \times 10^8\,\text{km}$, $m_{\text{Earth}} = 5.972 \times 10^{24}\,\text{kg}$. Wir werden den Satelliten mit einer Atlas-V-Rakete starten, die beim Start $m_{\text{rocket}} = 587\,\text{t}$ wiegt, einschliesslich Treibstoff.

ii. (3.5 Pkte.) Wir nehmen nun an, dass wir uns in einer Umlaufbahn um die Sonne befinden. Berechne die (momentane) Geschwindigkeitsänderung, die erforderlich ist, um auf die Transferbahn zu wechseln. *Hinweis: Verwende Energie- und Drehimpulserhaltung.*

iii. (1 Pkt.) Berechne die Geschwindigkeitsänderung beim Wechsel auf die Jupiterbahn (du kannst die Anziehungskraft des Jupiters vernachlässigen).

iv. (1.5 Pkte.) Berechne anhand der Energiedichte von Raketentreibstoff ($50\,\text{MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) die Treibstoffmenge, die für alle drei Manöver benötigt wird. Nimm an, dass die Masse der Rakete (inklusive Treibstoff) konstant ist. Ist diese Annahme gerechtfertigt?

Lange Probleme: Lösungen

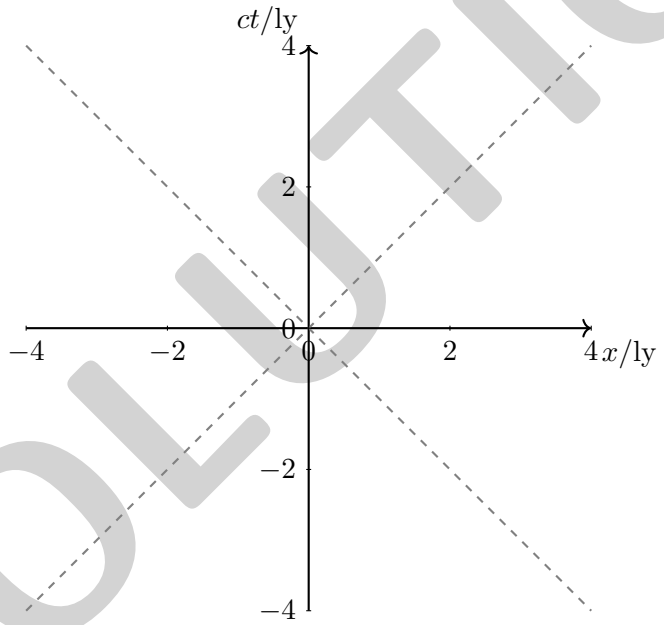
Langes Problem 1.1: Das Zwillingsparadoxon *16*

Die spezielle Relativitätstheorie führt das Konzept der Zeitdilatation ein. Ein gängiges Missverständnis dieses Konzepts ist bekannt als das Zwillingsparadoxon. In dieser Aufgabe wirst du dieses Paradox schrittweise mit Hilfe von Raum-Zeit-Diagrammen lösen.

Teil A. Raum-Zeit-Diagramme *2.5*

Raum-Zeit-Diagramme sind ein nützliches Hilfsmittel um Aufgaben der speziellen Relativitätstheorie zu bearbeiten. In solchen Diagrammen wird die Zeit multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit ct auf der vertikalen Achse gezeichnet, während die Position x auf der horizontalen Achse gezeichnet wird. Beide Achsen verwenden die gleichen Einheiten.

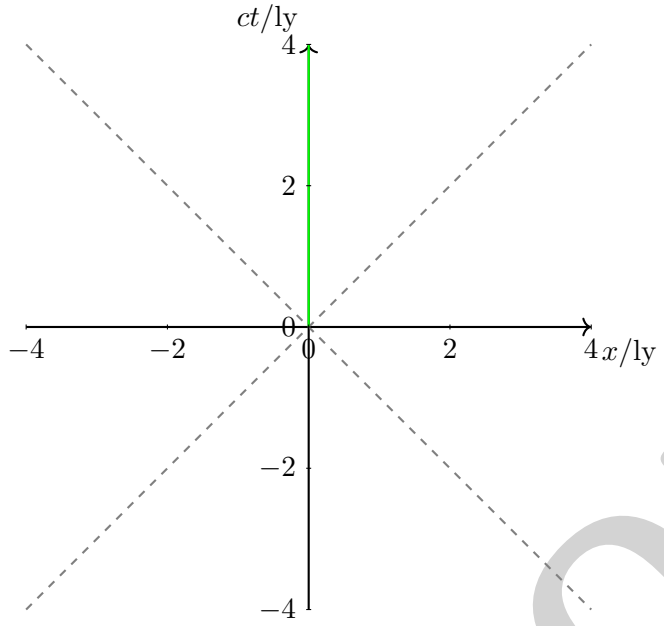
i. Zeichne in ein Raum-Zeit-Diagramm die zwei Linien eines Teilchens, welches sich mit Lichtgeschwindigkeit c bewegt und durch den Ursprung führt. Die Vereinigung der zwei Linien wird als Lichtkegel bezeichnet. *1*



0.5 points for each line. 1

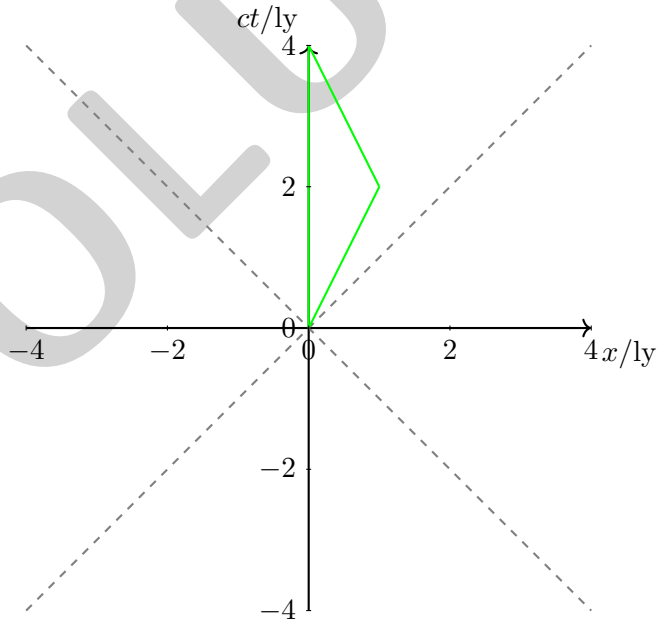
ii. Alice und Bob sind Zwillinge. An ihrem zwanzigsten Geburtstag entscheidet Alice mit einer Rakete zu einem Stern zu reisen. Der Stern ist $x_1 = 1\,\mathrm{ly}$ (Lichtjahre) entfernt und die Rakete fliegt mit $v = \frac{c}{2}$. Am Stern angekommen reist sie zurück mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtung. Bob hingegen bleibt auf der Erde und wartet auf Alice's Rückkehr. Betrachten wir nun wie die Zeitdilatation das Altern der Zwillinge beeinflusst. Zeichne dazu als erstes die Trajektorie von Bob von Zeit $t_0 = 0$ zur Zeit t_2 (Zeit von Alice's Rückkehr) wobei Bob während der ganzen Reise am Ort $x = 0$ bleibt. *0.5*

SOLUTION



0.5

iii. Zeichne im selben Diagramm die Trajektorie von Alice. Dabei markiere die Koordinatenzeit t_1 Alice's Ankunft auf dem Stern und ihre Richtungsänderung. ***1***



0.5 points for each segment. 1

SOLUTION

Teil B. Zeitdilatation *3.5*

Du hast vielleicht gehört, dass in der speziellen Relativitätstheorie Zeitdilatationen auftreten kann wenn ein System sich relativ zu einem anderen bewegt. Naiverweise würde Bob, der auf der Erde bleibt, erwarten, dass Alice zur Zeit t_2 jünger ist wie er, da aus seiner Perspektive Alice sich bewegt hat und darum Zeitdilatation erfahren hat. Umgekehrt kann Alice aus ihrer Perspektive Bob's Bewegung sehen und nach der gleichen Logik erwarten, dass bei der Ankunft Bob jünger ist wie sie. Dies ist das Zwillingsparadoxon. Das Ziel dieser Teilaufgabe ist dieses Paradoxon zu lösen.

i. Beschreibe die Differenz der quadrierten Eigenzeit $(\Delta\tau)^2$ als Funktion von Δt und Δx. Dieser Ausdruck kann als Satz des Pythagoras für Raum-Zeit betrachtet werden. Die Eigenzeit eines Systems bezeichnet die im System gemessene Zeit. ***0.5***

We have $(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2}$. 0.5

ii. Berechne wieviel Zeit für Bob vergangen ist, wenn Alice von ihrer Reise zurückkehrt. ***Hinweis: Das Diagramm könne nützlich sein um das Problem geometrisch zu lösen.*** ***0.5***

As Alice has speed $c/2$ and does a round trip to a star 1 ly away, we have $t_2 = 4\,\mathrm{a}$. As for Bob $\Delta x = 0$, we obtain $\Delta\tau_\mathrm{B} = 4\,\mathrm{a}$. 0.5

iii. Berechne wieviel Zeit für Alice vergangen ist während ihrer Reise. ***1.5***

The situation for Alice is different, as she gets into another intertial frame after turning around. One thus has to add the contributions to proper time of the two parts of her trip separately. 0.5

One thus gets $\Delta\tau_\mathrm{A} = \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2$, where $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = \sqrt{\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 - x_1^2/c^2} = 3\,\mathrm{a}$ such that $\Delta\tau_\mathrm{A} = 2\sqrt{3}\mathrm{a} \approx 3.5\,\mathrm{a}$. 1

iv. Beschreibe qualitativ den physikalischen Unterschied zwischen Alice und Bob, der deine Resultate aus den zwei vorherigen Fragen erklärt. ***1***

The main difference is that while Bob remains an inertial observer, Alice jumps from one inertial frame to another at the moment she turns around. 1

Teil C. Alice's Perspektive *5.5*

Lass uns dies vertiefen, in dem wir Alice's Koordinaten betrachten.

i. Bis anhin haben wir implizit Bob's Koordinatensystem (ct, x) verwendet. Drücke nun Alice's Koordinatensystem (ct', x') als Funktion von t, x, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ und $\beta = v/c$ aus. ***1***

The Lorentz transformation is given by (0.5 points for each coordinate)

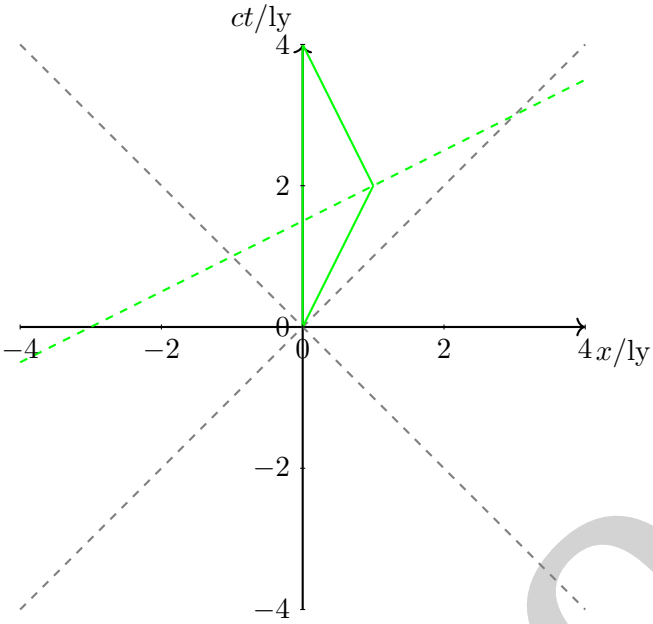
$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \beta\gamma x \\ x' = -\beta\gamma ct + \gamma x \end{cases} .$$

1

ii. Zeichne in dein Diagramm die Simultaneitätslinie für Alice ein wenn sie den Stern erreicht, i.e., die Linie $t' =$ const. durch das Ereignis der Ankunft. Bestimme wie alt Bob ist wenn Alice den Stern erreicht. ***2***

Isolating t in the Lorentz transformation, one sees that the coefficient of x is $\beta = 1/2$. Thus, we want to draw the line with slope $1/2$ passing through $(1\,\mathrm{ly}, 2\,\mathrm{ly})$.

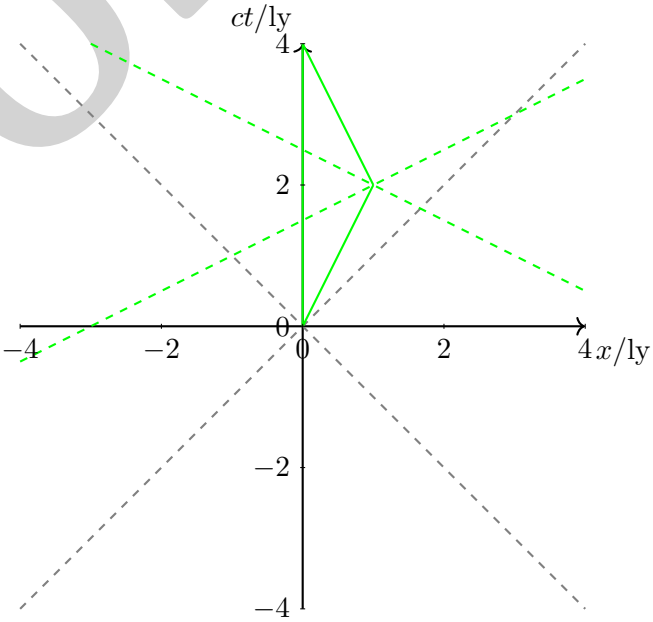
SOLUTION



1

The intersection with the ct-axis is given by $t = 1.5\,\mathrm{ly}$, so Bob would be $21.5\,\mathrm{a}$ old as Alice reaches the star, according to Alice. 1

iii. Sei (ct'', x'') das Koordinatensystem von Alice nachdem sie die Geschwindigkeit umgekehrt hat. Zeichne in deinem Diagramm die Simultaneitätslinie ein für Alice, direkt nach ihrer Richtungsänderung. Bestimme mit Hilfe des Diagramms wie alt Bob ist aus Sicht von Alice direkt nach ihrer Richtungsänderung.
Hinweise: Wie ist die Steigung der Simultaneitätslinie im (t'', x'') System relativ zu jener im (t', x') System? ***1.5***



SOLUTION

0.5

The result can be seen on the diagram by noticing that the slope in the second inertial frame is opposite to the one in the first one because the velocity is opposite. Then, one can see from the diagram that

$$t_{\mathrm{B}''} = t_1 + (t_1 - t_{\mathrm{B}'}) = 2t_1 - t_{\mathrm{B}'} = 2.5\,\mathrm{ly}.$$

Thus, just after Alice turns around, Bob would be 22.5 years old. 1

iv. Vergleiche dieses Resultat mit jenem kurz vor Eintreffen auf dem Stern. Hast du dieses Resultat erwartet? Warum? ***1***

From the point of view of Alice, once she changes her velocity, the age of Bob in her system of coordinates increases by one year almost "instantly". This is very counter-intuitive from a classical mechanics point of view, but we know from the previous section that something "special" happens because Alice changes her direction. This is reflected in this last (maybe surprising) result. 1

Teil D. Doppler-Effekt *4.5*

Lass uns nun annehmen, dass Alice Bob erzählt hat, dass sie während der gesamten Reise einen Lichtstrahl mit Wellenlänge $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ Richtung Erde halten wird.

i. Berechne die Wellenlänge von Alice's Signal vor ihrer Ankunft auf dem Stern aus Sicht von Bob. ***1***

The relativistic Doppler effect can be written as

$$\lambda_{obs} = \lambda_{em}\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

where $v > 0$ for the emitter getting further away from the observer, such that we get $\lambda_{obs} = 500\,\mathrm{nm} \cdot \sqrt{3} \approx 866\,\mathrm{nm}$.

Correct formula. 0.5

Numerical result. 0.5

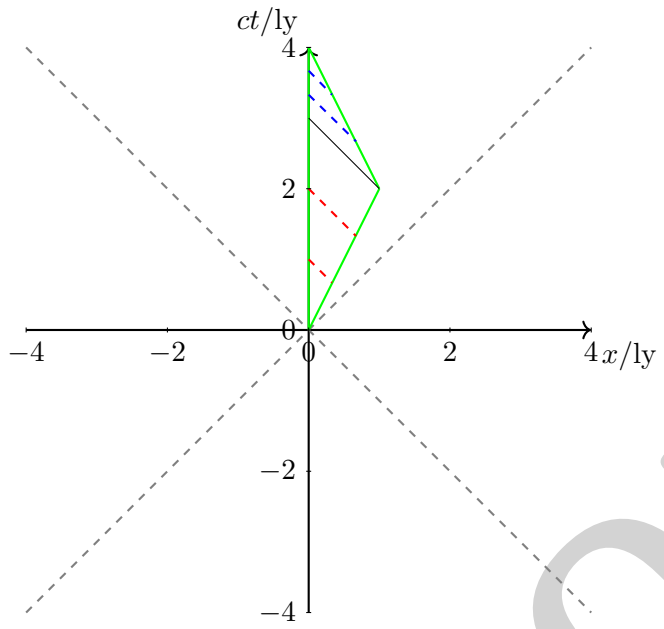
ii. Berechne die Wellenlänge von Alice's Signal nach ihrem Richtungswechsel aus Sicht von Bob. ***0.5***

Using the same formula as before, but with a reversed sign, we obtain $\lambda_{\mathrm{obs}} = 500\,\mathrm{nm}/\sqrt{3} \approx 289\,\mathrm{nm}$. 0.5

iii. Berechne die Zeit t_{c} zu der Bob die Farbänderung beobachtet.
Hinweis: Das Diagramm könnte hilfreich sein. ***1***

Graphically, one can draw a line with slope -1 starting at the event where Alice reaches the star, and find the intersection with the ct-axis. One finds $t_c = 3\,\mathrm{a}$ (see black line in the following diagram (the participants are not asked to draw this)).

SOLUTION



Line with slope -1.	0.5
Correct numerical answer.	0.5
iv. Wie kann Bob die Messung von t_c und den zwei Wellenlängen vor und nach dem Richtungswechsel nützen, um Alice's Alter bei Ankunft auf der Erde vorherzusagen? Vergleiche dein Resultat mit jenem von oben.	*2*

Bob measured t_c as well as the wavelength of the beam before and after the change in wavelength. Comparing these wavelengths with the original wavelength of 500 nm, he can deduce how fast time passes for Alice for both cases of redshift and blueshift. In the first 3 years, we have $\lambda_{\text{obs}}/\lambda_{\text{em}} = \sqrt{3}$ and in the last year, we have $\lambda_{\text{obs}}/\lambda_{\text{em}} = 1/\sqrt{3}$, so one can compute (using that the wavelength is proportional to the period)

$$\Delta\tau_{\text{A}} = 3/\sqrt{3}\text{a} + 1\sqrt{3}\text{a} = 2\sqrt{3}\text{a} \approx 3.5\,\text{a}.$$

This is the same result as before. Alice would thus come back as a 23.5 a old.	2

SOLUTION

Langes Problem 1.2: Ballon *16*

Ziel dieser Aufgabe ist es die Flughöhe eines mit Helium gefüllten Wetterballons auszurechnen. Wir befassen uns hierzu zuerst mit der Physik der Atmosphäre. Nimm dazu an, dass diese aus reinem Stickstoff ^{14}N besteht, welches als ideales Gas aus Stickstoffmolekülen N_2 angenommen werden kann.

Teil A. Atmosphärenmodell *6.5*

i. Welche Kräfte sind zur Beschreibung einer statischen Luftsäule relevant? *1*

The weight and the force caused by the gas pressure always apply. (0.5 points each) 1

ii. Nimm an, dass wir einen Temperaturverlauf $T(z)$ in der Atmosphäre haben. Benutze nun die ideale Gasgleichung, um eine Differentialgleichung für die Dichte ρ herzuleiten. *3.5*

We start with the hydrostatic pressure on an air parcel of height Δz

$$\Delta z \rho g = -\Delta p.$$

0.5

For an infinitesimal small height Δz we get

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

0.5

The ideal gas law allows to express the pressure in dependence of ρ: $p = \frac{\rho R T}{m}$, where m is the molar mass of the gas. 1

We use the product rule to get an expression for p

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{RT}{m} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\rho R}{m}.$$

1

We get the differential equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \left(\frac{mg}{RT} + \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\rho = 0.$$

0.5

iii. Wir nehmen an, dass der Temperaturverlauf durch die Funktion $T(z) = T_0\,(1+\alpha z)$ beschrieben werden kann mit T_0 der Temperatur auf Meereshöhe $z = 0$. Löse die Differentialgleichung mit dem Ansatz

$$\rho(z) = A\,(1+\alpha z)^{-B}$$

und bestimme die Konstanten A und B in Abhängigkeit von ρ_0 (Dichte auf Meereshöhe), T_0, der molaren Masse m und α. Wir werden in den folgenden Aufgaben mit diesem Ansatz fortfahren. *2*

We plug in the Ansatz into the differential equation

$$-AB\alpha\,(1+\alpha z)^{-B-1} + \left(\frac{mg}{R} + T_0\alpha\right) A\frac{(1+\alpha z)^{-B-1}}{T_0} = 0,$$

SOLUTION

which gives

$$-B\alpha + \left(\frac{mg}{RT_0} + \alpha\right) = 0.$$

1

This means $B = \left(\frac{mg}{R\alpha T_0} + 1\right)$. 0.5

The constant $A = \rho_0$ is obtained from the initial condition at $z = 0$. 0.5

Teil B. Aufstieg *9.5*

Nimm nun an wir befinden uns auf Meereshöhe $z = 0$. Nimm an der Luftdruck ist $1.0\,\mathrm{bar}$ und wir haben sonnige $25\,°\mathrm{C}$. Wir pumpen nun Helium ^{4}He in einen Ballon mit einer Nettomasse von $3.0\,\mathrm{g}$, bis er ein Volumen von $5.0\,\mathrm{L}$ hat. Im Ballon entsteht dadurch ein Überdruck von $5000\,\mathrm{Pa}$. Wir nehmen an, dass der Überdruck beim Aufstieg konstant bleibt. Du darfst zusätzlich annehmen, dass das Helium ein ideales Gas ist.

i. Berechne die Luftdichte auf Meereshöhe und gib das Resultat in $\mathrm{g \cdot m^{-3}}$ an. *1*

We get, using the ideal gas equation,

$$\rho = \frac{pm}{RT} = 1130\,\mathrm{g \cdot m^{-3}}.$$

(0.5 points for equation, 0.5 for correct numerical value) 1

ii. Beschreibe kurz in Worten, weshalb das Helium als ideales Gas eine kleinere Dichte hat als der Stickstoff. Welcher Parameter ist ausschlaggebend? *1*

Because both are ideal gases, they have the same molar density. The difference lies in the molar mass. 1

iii. Was ist die Masse des Ballons und was ist die Kraft, welche auf Meereshöhe auf ihn wirkt? Gib sowohl die Formel als auch den Zahlenwert an. Nimm hier und im folgenden an, dass das Helium im Ballon jeweils die gleiche Temperatur hat, wie der ihn umgebende Stickstoff in der Atmosphäre. *2.5*

We have $M_{\mathrm{balloon}} = M_{\mathrm{He}} + M_{\mathrm{rubber}} = \frac{(p_0+\Delta p)m_{\mathrm{He}}}{RT}V + M_{\mathrm{rubber}} = 3.8\,\mathrm{g}$. (0.5 points for equation, 0.5 for correct numerical value) 1

The displaced gas has a mass of $M_{\mathrm{gas}} = \frac{p_0 m_{\mathrm{N}}}{RT}V = 5.6\,\mathrm{g}$. (Numerical value not needed) 0.5

The buoyancy applied on the balloon is therefore $(M_{\mathrm{gas}} - M_{\mathrm{balloon}})\,g = 0.018\,\mathrm{N}$. (0.5 points for equation, 0.5 for correct numerical value) 1

iv. Berechne nun die Höhe, welche der Ballon erreichen kann. Benutze dazu, dass $\alpha = -0.017\,\mathrm{km}^{-1}$. *4*

At the maximal height the mass of the displaced gas is equal to the mass of the balloon, which doesn't change during flight.

$$M_{\mathrm{gas}}(z) = M_{\mathrm{ballon}}.$$

0.5

The mass of the displaced nitrogen at height z is

$$M_{\mathrm{gas}}(z) = \frac{p_{\mathrm{N}}(z)\,m_{\mathrm{N}}}{RT}V.$$

SOLUTION

0.5

The volume and temperature is the same as for the helium inside the ballon, meaning by the ideal gas law

$$\frac{n_{\mathrm{He}}}{(p(z)+\Delta p)} = \frac{V}{RT}.$$

And we obtain

$$M_{\mathrm{gas}}(z) = \frac{p(z)\, m_{\mathrm{N}} n_{\mathrm{He}}}{p(z)+\Delta p}.$$

0.5

The equilibrium equation can now be solved for $p(z)$

$$p(z) = \frac{M_{\mathrm{balloon}} \Delta p}{m_{\mathrm{N}} n_{\mathrm{He}} - M_{\mathrm{balloon}}}.$$

0.5

Note that we can express $m_{\mathrm{N}} n_{\mathrm{He}}$ as

$$m_{\mathrm{N}} n_{\mathrm{He}} = m_{\mathrm{N}} n_{\mathrm{N}}(0)\, \frac{p(0)+\Delta p}{p(0)} = M_{gas}(0)\, \frac{p(0)+\Delta p}{p(0)}.$$

The pressure on height z can be obtained by integration

$$p(z) = p_0\, (1+\alpha z)^{-\frac{m_{\mathrm{N}} g}{R\alpha T_0}}.$$

1

Solving for height H gives

$$H = \left(\left(\frac{\Delta p}{p_0} \frac{M_{\mathrm{balloon}}}{m_{\mathrm{N}} n_{\mathrm{He}} - M_{\mathrm{balloon}}} \right)^{-\frac{R\alpha T_0}{m_{\mathrm{N}} g}} - 1 \right) \frac{1}{\alpha} = 18\,\mathrm{km}.$$

(0.5 points for equation, 0.5 for correct numerical value) 1

v. Auch wenn der Überdruck auf Meereshöhe nicht viel ausmacht ist er dennoch von wichtiger Bedeutung. Wie hoch würde der Ballon theoretisch fliegen, falls wir den Überdruck nicht berücksichtigen? Eine kurze Erklärung ohne Rechnung genügt. ***1***

Because both helium and nitrogen are ideal gases, they behave identically. This means in particular that they expand the same. The nitrogen displaced by the balloon therefore always weighs the same, whether at sea level or in the upper atmosphere. The balloon theoretically rises infinitely high. 1

SOLUTION

Langes Problem 1.3: Jupitermission der OSA *16*

Die OSA (Olympiad Space Agency) möchte ihre erste interplanetare Mission starten. Dafür braucht sie einige vorbereitende Berechnungen von dir, um den Erfolg der Mission sicherzustellen.

Teil A. Himmelsmechanik *1.5*

Das Missionskomitee der OSA hat beschlossen, dass der Jupiter das Reiseziel der Sonde sein soll. Sie wollen, dass du einige Eigenschaften des Ziels berechnest.

i. Gegeben die Dauer eines Jupiterjahres ($T_{\text{Jupiter}} = 4333\,\text{d}$) und die Massen des Jupiter-Sonne-Systems,

$$m_{\text{Jupiter}} = 1.899 \times 10^{27}\,\text{kg},$$
$$M_{\text{Sun}} = 1.9884 \times 10^{30}\,\text{kg},$$

berechne den Radius R_{Jupiter} der Jupiterumlaufbahn. Man kann davon ausgehen, dass die Sonne viel schwerer ist als der Jupiter und dass die Bahnen kreisförmig sind. ***1.5***

Assuming that Jupiter's orbit around the Sun is circular, the semi-major and semi-minor axes of the "degenerate" elliptical trajectory would coincide with the radius $R_{Jupiter}$ of the corresponding circular trajectory.

Using the 3rd Kepler's law $\frac{R^3_{\text{Jupiter}}}{T^2_{\text{Jupiter}}} = \frac{G(M_{\text{Sun}}+m_{\text{Jupiter}})}{4\pi^2} \approx \frac{GM_{\text{Sun}}}{4\pi^2}$ or alternatively by considering the equilibrium between centrifugal and gravitational forces,

$$\frac{mv^2}{R_{\text{Jupiter}}} = \frac{GMm}{R^2_{\text{Jupiter}}}$$

with the velocity v of an object in nearly circular orbit, that can be approximated as

$$v = \frac{2\pi R_{\text{Jupiter}}}{T},$$

0.5

we get:

$$R_{\text{Jupiter}} = \sqrt[3]{\frac{GM_{\text{Sun}}T^2_{\text{Jupiter}}}{4\pi^2}}.$$

0.5

The numerical value is

$$R_{\text{Jupiter}} = 7.78 \times 10^{11}\,\text{m} = 7.78 \times 10^{8}\,\text{km}.$$

0.5

Teil B. Sonnengezeiten auf dem Jupiter *4*

Forschende der OSA haben die Existenz von Gezeiten auf dem Jupiter postuliert, die ihrer Meinung nach zu drastischen Einbussen bei der Genauigkeit von jupiterbezogenen Horoskopen führen könnten. Um diese Hypothese zu überprüfen (oder zu widerlegen), sollst du einige Berechnungen anstellen.

SOLUTION

i. Berechne die Gravitationsbeschleunigung auf der Oberfläche des Jupiters (unter der Annahme, dass die Schwerkraft anderer Körper und die Rotation um die Sonne keine Auswirkungen haben). Sei $r_{\text{Jupiter}} = 69\,911\,\text{km}$ der Radius des Jupiters. Du kannst annehmen, dass der Jupiter eine perfekte Kugel ist. *1*

According to the 2nd Newton's law, mass times acceleration is equal to the sum of all the forces:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i.$$

0.25

We assumed that only the gravitional pull has an effect and therefore:

$$ma = G\frac{m m_{\text{Jupiter}}}{r^2_{\text{Jupiter}}}$$

0.5

and find:

$$a_g = G\frac{m_{\text{Jupiter}}}{r^2} = 25.9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

0.25

ii. Betrachte nun ein Bezugssystem, das sich mit dem Jupiter um die Sonne dreht. Berechne die Gesamtbeschleunigung auf der Sonnenseite des Jupiters in diesem Bezugssystem. Vernachlässige dabei die Gravitation des Jupiters selbst. Mache dasselbe auch für die sonnenabgewandte Seite. *2*

The gravitational pull of the Sun and the centrifugal force have the same direction but opposite signs, so that by Newton's law the magnitude of the resulting acceleration is given by

$$a_{\text{tot}} = -\frac{GM_{\text{Sun}}}{R^2} + \omega^2 R$$

with $\omega = 2\pi R/T$. (0.5 points for each contribution) 1

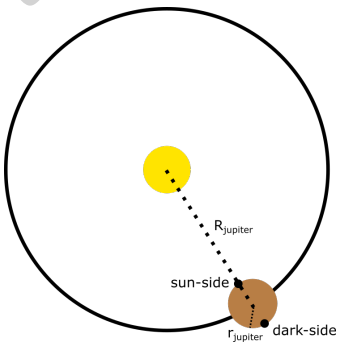


Abbildung B.1: Sketch

As it is clear from a sketch of Jupiter's orbit, and assuming that Jupiter's orbit around the Sun is circular and that both Jupiter and the Sun are perfect spheres, we have that

$$R_{\text{Sun}} = R_{\text{Jupiter}} - r_{\text{Jupiter}},$$

SOLUTION

$$R_{\text{dark}} = R_{\text{Jupiter}} + r_{\text{Jupiter}},$$

0.5

giving an acceleration of

$$a_{\text{tot, Sun}} = 5.909 \times 10^{-8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2},$$
$$a_{\text{tot, dark}} = -5.908 \times 10^{-8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

(0.25 points for each correct numerical result) 0.5

iii. Erkläre, wie die obigen Berechnungen die Existenz von (solaren) Gezeiten auf dem Jupiter zeigen. Glaubst du, dass dieser Effekt auf der Oberfläche des Jupiters erkennbar ist? ***1***

At the center of Jupiter this acceleration is zero (condition for a stable orbit). Therefore we have a difference in acceleration between the center and the Sun/dark points causes a slight relative upwards acceleration (of about the same magnitude on both the Sun and the dark side) as compared to points located on the orbit. 0.5

This could cause slight tides to form, but the effect is very weak, so we probably couldn't notice it on the surface of Jupiter. 0.5

Teil C. JWST 2.0 *3.5*

Forschende der OSA wollen ein Weltraumteleskop bauen, das durch den Jupiter von der Sonnenstrahlung abgeschirmt wird. Dazu werden sie das Teleskop am so genannten Lagrange-Punkt 2 (L2) positionieren.

i. Lagrange-Punkte sind Punkte in einem Zweikörpersystem (in diesem Fall Jupiter und Sonne), in denen die Gesamtkraft, die auf einen dritten Körper wirkt, im mitrotierenden Bezugssystem null ist. Erläutere qualitativ, warum derartige Punkte existieren können. ***0.5***

Consider the reference frame rotating with Jupiter around the Sun as in part B. The centrifugal force increases as we travel outwards from Jupiter, while gravity increases in the opposite direction. Thus there is a point where both need to be equal, which results in (some of) the Lagrange points. 0.5

ii. Schreibe mit Hilfe der Frage über die Gezeiten eine Gleichung für die Gesamtbeschleunigung im mitrotierenden Bezugssystem auf, die ein Körper erfährt, der sich in einem Abstand d hinter (auf der sonnenabgewandten Seite) dem Jupiter befindet. Welche Bedingungen müssen an den Lagrange-Punkten gelten? Du brauchst diese Gleichung nicht zu lösen. ***1***

The acceleration is due to three forces:

1. Jupiter's gravity: $\frac{Gm_{\text{Jupiter}}}{d^2}$,
2. the Sun's gravity: $\frac{GM_{\text{Sun}}}{(d+R_{\text{Jupiter}})^2}$,
3. the centrifugal acceleration: $-\omega^2\,(d + R_{\text{Jupiter}})$.

We can use Newton's law as in part B to get the acceleration

$$a = \frac{Gm_{\text{Jupiter}}}{d^2} + \frac{GM_{\text{Sun}}}{(d + R_{\text{Jupiter}})^2} - \omega^2\,(d + R_{\text{Jupiter}})\,.$$

SOLUTION

(If the centrifugal force and gravity of Jupiter are stated here but not in Bii., the points might be awarded in Bii.) 0.5

The total acceleration (in the rotating frame of reference) needs to be zero. 0.5

iii. Erkläre, warum sich bei L2 normalerweise keine Asteroiden aufhalten. Begründe dies explizit anhand deiner vorherigen Ergebnisse. *2*

This question is asking for the stability of the L2 point. For this we need to check if some small perturbation, which displaces the asteroid by Δd away from the L2 point, accelerates the asteroid away from the L2 point. Therefore we plug $d + \Delta d$ into the formula for the acceleration

$$a' = \frac{Gm_{\text{Jupiter}}}{(d+\Delta d)^2} + \frac{GM_{\text{Sun}}}{(d + R_{\text{Jupiter}} + \Delta d)^2} - \omega^2 \left(d + R_{\text{Jupiter}} + \Delta d\right).$$

0.5

The first two terms get smaller as Δd increases. So does the last term due to the minus sign. In total we get $a' < 0$, which corresponds to an acceleration away from Jupiter. 0.5

The first two terms get larger as Δd decreases. So does the last term due to the minus sign. In total we get $a' > 0$, which corresponds to an acceleration towards Jupiter. 0.5

Thus this point is unstable. 0.5

Teil D. Reise zum Jupiter *7*

Dank deiner Berechnungen ist die OSA nun zuversichtlich, dass sie tatsächlich einen Satelliten an der gewünschten Stelle platzieren kann. Jetzt müssen sie ihn «nur» noch dorthin bringen. Dazu haben die Forschenden der OSA die folgende mehrstufige Flugbahn vorgeschlagen:

1. **Wir verlassen den Gravitationseinfluss der Erde, indem wir entlang der Erdumlaufbahn reisen, bis wir uns in einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Sonne befinden.**
2. **Wir zünden das Raketentriebwerk um mit dem starken Schub unsere Umlaufbahn anzupassen, so dass sie so elliptisch wird, dass der äusserste Punkt der Ellipse die Jupiterbahn trifft.**
3. **Bei Erreichen der Jupiterbahn beschleunigen wir nochmals schnell, um unsere Bahn in die Kreisbahn des Jupiters zu korrigieren.**

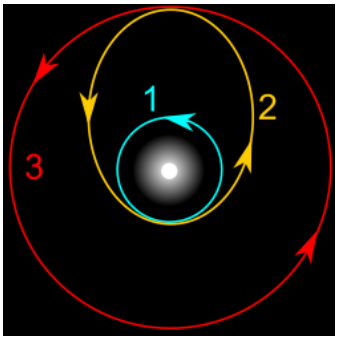


Abbildung D.1: Die geplante Flugbahn

SOLUTION

i. Berechne die minimale Geschwindigkeit $v_{\mathbf{escape}}$, die nötig ist, um das Gravitationspotential der Erde zu verlassen (die Geschwindigkeit, bei der ein Objekt, das sich radial nach aussen bewegt, nicht mehr auf die Erde zurückfällt). Du kannst alle anderen Himmelskörper vernachlässigen. Du kannst die Rotation der Erde vernachlässigen. $r_{\mathbf{Earth}} = 6371\,\mathrm{km}$, $R_{\mathbf{Earth}} = 1.496 \times 10^8\,\mathrm{km}$, $m_{\mathbf{Earth}} = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Wir werden den Satelliten mit einer Atlas-V-Rakete starten, die beim Start $m_{\mathbf{rocket}} = 587\,\mathrm{t}$ wiegt, einschliesslich Treibstoff. ***1***

In order to escape the Earth's gravitational field, the potential barrier needs to be overcome, meaning that the initial kinetic energy has to be equal to the potential energy on the Earth's surface.

$$E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{pot}}$$

0.25

Under the assumption that we neglect the Earth's rotation the only contribution to the kinetic energy comes from v_{escape} and neglecting all the other bodies gravitional influence only the potential of the Earth has to be considered meaning

$$\frac{1}{2} m v_{\mathrm{escape}}^2 = \frac{G m m_{\mathrm{Earth}}}{r_{\mathrm{Earth}}}$$

0.25

Solving for v_{escape}:

$$v_{\mathrm{escape}} = \sqrt{\frac{2 G m_{\mathrm{Earth}}}{r_{\mathrm{Earth}}}} = 11.19\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

0.5

ii. Wir nehmen nun an, dass wir uns in einer Umlaufbahn um die Sonne befinden. Berechne die (momentane) Geschwindigkeitsänderung, die erforderlich ist, um auf die Transferbahn zu wechseln.
Hinweis: Verwende Energie- und Drehimpulserhaltung. ***3.5***

We want to calculate the velocity v_1 needed at the closest point to the Sun R_{Earth} to reach Jupiter's orbit at $R_{Jupiter}$. Energy and angular momentum are conserved at every point on the trajectory.

The total energy consists of kinetic and potential energy and energy conservation reads as

$$E = \frac{m_{\mathrm{rocket}} v_1^2}{2} - \frac{G M_{\mathrm{Sun}} m_{\mathrm{rocket}}}{R_{\mathrm{Earth}}} = \frac{m_{\mathrm{rocket}} v_2^2}{2} - \frac{G M_{\mathrm{Sun}} m_{\mathrm{rocket}}}{R_{\mathrm{Jupiter}}},$$

where v_2 is the velocity at the point farthest away. 1

To calculate the angular momentum, we use as a reference point the position of the Sun and see that the position vectors $\vec{R}_{\mathrm{Earth}}$ and $\vec{r}_{\mathrm{Jupiter}}$ are perpendicular to the instantaneous velocities at these points. Therefore the angular momentum conservation reads as

$$L = m_{\mathrm{rocket}} v_1 R_{\mathrm{Earth}} = m_{\mathrm{rocket}} v_2 R_{\mathrm{Jupiter}}.$$

1

We can solve for v_1:

$$v_1 = \sqrt{G M_{\mathrm{Sun}} \frac{2 R_{\mathrm{Jupiter}}}{R_{\mathrm{Earth}} \left(R_{\mathrm{Jupiter}} + R_{\mathrm{Earth}}\right)}}.$$

SOLUTION

0.5

Since we were on an orbit around the Sun the initial velocity was (see Ai.)

$$v_{\text{init}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sun}}}{R_{\text{Earth}}}}.$$

0.5

Therefore, you can calculate the difference

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sun}}}{R_{\text{Earth}}}} \left(\sqrt{\frac{2R_{\text{Jupiter}}}{R_{\text{Earth}} + R_{\text{Jupiter}}}} - 1 \right),$$

$$\Delta v_1 = 8791\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

0.5

iii. Berechne die Geschwindigkeitsänderung beim Wechsel auf die Jupiterbahn (du kannst die Anziehungskraft des Jupiters vernachlässigen). ***1***

Analogous considerations as above lead to

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sun}}}{R_{\text{Jupiter}}}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R_{\text{Earth}}}{R_{\text{Earth}} + R_{\text{Jupiter}}}} \right) = 5643\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(points for reasoning and formulas can be awarded in D ii.) 1

iv. Berechne anhand der Energiedichte von Raketentreibstoff ($50\,\text{MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) die Treibstoffmenge, die für alle drei Manöver benötigt wird. Nimm an, dass die Masse der Rakete (inklusive Treibstoff) konstant ist. Ist diese Annahme gerechtfertigt? ***1.5***

The energy needed for all the three stages is equal to the change in kinetic energy.

$$E_1 = \frac{1}{2} m_{\text{rocket}} v_{\text{escape}}^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m_{\text{rocket}} \left(v_{\text{init}} + \Delta v_1 \right)^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{init}}^2$$

$$E_3 = \frac{1}{2} m_{\text{rocket}} \left(v_{\text{final}} + \Delta v_2 \right)^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{final}}^2$$

0.5

To get the mass of the fuel needed we divide the total energy $E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 + E_3$ by the energy density ε

$$m_{\text{fuel}} = \frac{E_{\text{tot}}}{\varepsilon},$$

0.5

which amounts to 4600 t. 0.25

This is about eight times the weight of the rocket. We see instantly that the assumption that the weight does not change was invalid. 0.25

SOLUTION

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

18. - 19. März 2023

Teil 2	**:**	**1 Experiment**
Zeit	:	90 Minuten
Total	:	24 Punkte
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

- Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
- Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
- EMPA - Materials Science & Technology
- Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
- ETH Zurich Department of Physics
- Fondation Claude & Giuliana
- Ernst Göhner Stiftung, Zug
- Hasler Stiftung, Bern
- Metrohm Stiftung, Herisau
- Neue Kantonsschule Aarau
- Novartis
- Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
- Swiss Academy of Sciences
- Swiss Physical Society
- Università della Svizzera italiana
- Universität Bern FB Physik/Astronomie
- Universität Zürich FB Physik Mathematik

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Experimente

Zeit: 90 Minuten
Maximalpunktzahl: 24 Punkte

Experiment 2.1: Radius bestimmen *(24 Punkte)*

Einleitung

Bei dieser Aufgabe wollen wir den Radius eines Zylindersegments bestimmen. Ein grosser Teil der Herausforderung besteht im Ausdenken des Versuchsaufbaus. Falls Du jedoch keine Idee hast, wie man dies messen könnte, stehen zwei Tipps bereit. Melde Dich bei der Aufsicht für die Tipps. Der erste Tipp ist eine Skizze des Versuchsaufbaus und der zweite Tipp eine detailliertere Beschreibung. Beachte: Falls Du die Tipps brauchst, bekommst Du für entsprechende Teilaufgaben keine Punkte (für den ersten Tipp kannst Du die 5 Punkte für Aufgabe A.i. nicht holen, für den zweiten jene 6 Punkte für A.ii. nicht). Du kannst den zweiten Tipp nur bekommen, nachdem Du den ersten genommen hast.
Zudem: Nur die unten aufgeführten Materialien dürfen benutzt werden. Es ist nicht erlaubt, Massstab, Geodreieck, Zirkel oder andere Längenmessinstrumente zu verwenden! Teilaufgaben, bei welcher ein unerlaubtes Hilfsmittel benutzt wurde, werden mit Null Punkten gewertet. Massstäbe dürfen nur zum zeichnen von Graphen oder Versuchsbeschreibungen genutzt werden.

Material

- Hölzernes Zylindersegment mit zu bestimmendem Radius R, siehe Abbildung Ma.1.
- Aluprofil mit Länge L und Markierungen im Abstand $L/10 \pm 0.0005L$. Die Masse des Aluprofiles ist $(72.6 \pm 0.1)\,\mathrm{g}$.
- Goniometer (Winkelmessgerät).
- Zwei Nägel, je $(1.53 \pm 0.03)\,\mathrm{g}$.
- Klebeband
- Schere
- Holzklötzchen

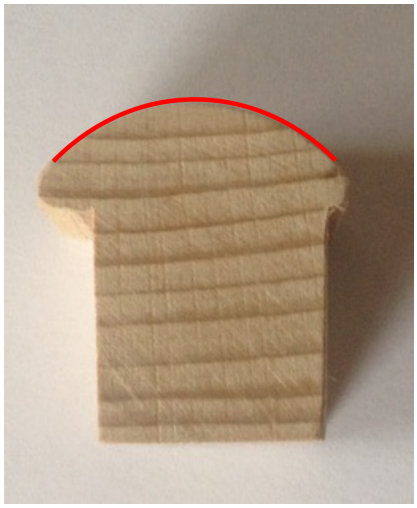


Abbildung Ma.1: Hölzernes Zylindersegment, der Radius ist entlang der roten Line konstant und soll da vermessen werden.

Aufgaben

Bestimme den Radius R des Zylindersegments als Vielfaches der Länge der Alustange L.

Teil A. Versuch ausdenken *(11 Punkte)*

In diesem ersten Teil soll der Versuchsaufbau ausgedacht und dokumentiert sowie die Theorie erarbeitet werden. Falls Du jedoch keine Idee hast, wie man dies messen könnte, stehen zwei Tipps bereit. Melde Dich bei der Aufsicht für die Tipps. Der erste Tipp ist eine Skizze des Versuchsaufbaus und der zweite Tipp eine detailliertere Beschreibung inklusive Formeln. Beachte: Falls Du die Tipps brauchst, bekommst Du für entsprechende Teilaufgaben keine Punkte (für den ersten Tipp kannst Du die 5 Punkte für Aufgabe A.i. nicht holen, für den zweiten jene 6 Punkte für A.ii. nicht). Du kannst den zweiten Tipp nur bekommen, nachdem Du den ersten genommen hast.

i. (5 Pkte.) Beschreibe Deinen Versuchsaufbau (mit Skizze) wie Du den Radius R messen willst.

ii. (6 Pkte.) Beschreibe mathematisch (mit Formeln) wie Du aus den gemessenen Grössen den Radius bestimmen wirst.

Teil B. Radius bestimmen *(13 Punkte)*

Wir wollen nun den Radius R des Zylindersegments als vielfaches von L bestimmen.

i. (5 Pkte.) Führe die Messung(en) zur Bestimmung von R im Vergleich zur Länge des Alustabes L durch.

ii. (4 Pkte.) Stelle das Resultat grafisch dar.

iii. (4 Pkte.) Schätze die Messgenauigkeit vom Radius R mit einer geeigneten Fehleranalyse ab.

Experimente: Lösungen

Experiment 2.1: Radius bestimmen 24

Einleitung

Bei dieser Aufgabe wollen wir den Radius eines Zylindersegments bestimmen. Ein grosser Teil der Herausforderung besteht im Ausdenken des Versuchsaufbaus. Falls Du jedoch keine Idee hast, wie man dies messen könnte, stehen zwei Tipps bereit. Melde Dich bei der Aufsicht für die Tipps. Der erste Tipp ist eine Skizze des Versuchsaufbaus und der zweite Tipp eine detailliertere Beschreibung. Beachte: Falls Du die Tipps brauchst, bekommst Du für entsprechende Teilaufgaben keine Punkte (für den ersten Tipp kannst Du die 5 Punkte für Aufgabe A.i. nicht holen, für den zweiten jene 6 Punkte für A.ii. nicht). Du kannst den zweiten Tipp nur bekommen, nachdem Du den ersten genommen hast.
Zudem: Nur die unten aufgeführten Materialien dürfen benutzt werden. Es ist nicht erlaubt, Massstab, Geodreieck, Zirkel oder andere Längenmessinstrumente zu verwenden! Teilaufgaben, bei welcher ein unerlaubtes Hilfsmittel benutzt wurde, werden mit Null Punkten gewertet. Massstäbe dürfen nur zum zeichnen von Graphen oder Versuchsbeschreibungen genutzt werden.

Material

- Hölzernes Zylindersegment mit zu bestimmendem Radius R, siehe Abbildung Ma.1.
- Aluprofil mit Länge L und Markierungen im Abstand $L/10 \pm 0.0005L$. Die Masse des Aluprofiles ist (72.6 ± 0.1) g .
- Goniometer (Winkelmessgerät).
- Zwei Nägel, je (1.53 ± 0.03) g.
- Klebeband
- Schere
- Holzklötzchen

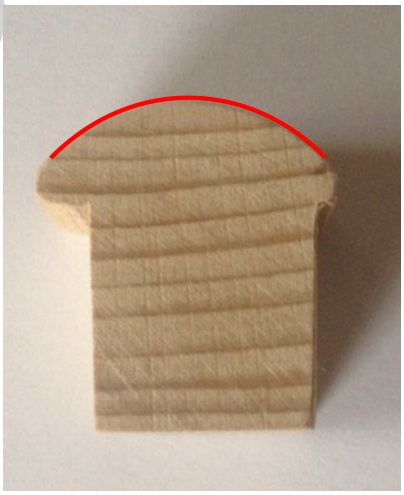


Abbildung Ma.1: Hölzernes Zylindersegment, der Radius ist entlang der roten Line konstant und soll da vermessen werden.

SOLUTION

Aufgaben

Bestimme den Radius R des Zylindersegments als Vielfaches der Länge der Alustange L.

Teil A. Versuch ausdenken *11*

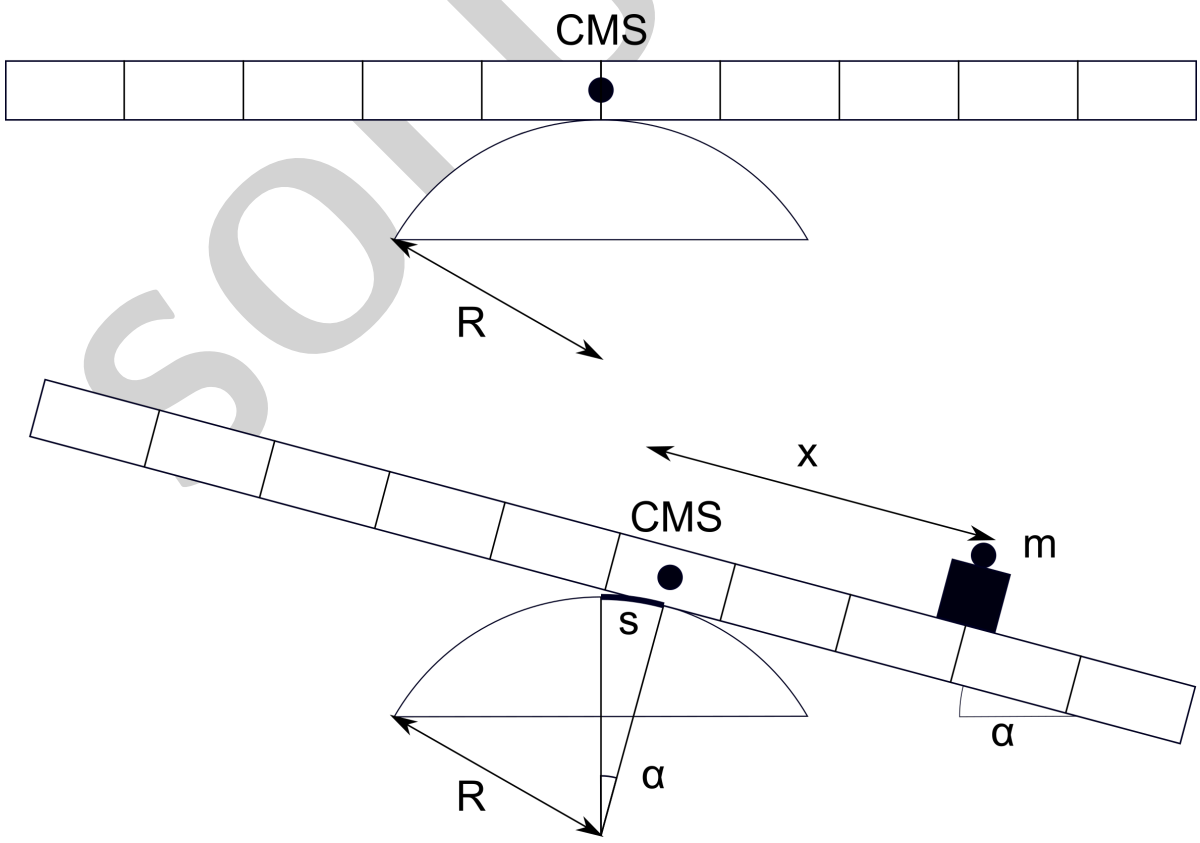
In diesem ersten Teil soll der Versuchsaufbau ausgedacht und dokumentiert sowie die Theorie erarbeitet werden. Falls Du jedoch keine Idee hast, wie man dies messen könnte, stehen zwei Tipps bereit. Melde Dich bei der Aufsicht für die Tipps. Der erste Tipp ist eine Skizze des Versuchsaufbaus und der zweite Tipp eine detailliertere Beschreibung inklusive Formeln. Beachte: Falls Du die Tipps brauchst, bekommst Du für entsprechende Teilaufgaben keine Punkte (für den ersten Tipp kannst Du die 5 Punkte für Aufgabe A.i. nicht holen, für den zweiten jene 6 Punkte für A.ii. nicht). Du kannst den zweiten Tipp nur bekommen, nachdem Du den ersten genommen hast.

i. Beschreibe Deinen Versuchsaufbau (mit Skizze) wie Du den Radius R messen willst. ***5***

The idea is to have a balance with the aluminium rod and have it balancing in equilibrium on the cylinder. Then by adding a bit of weight, the center of mass (CMS) shifts and the rod tilts a bit to the side by rolling by a distance s on the cylinder. Knowing the angle of this tilting α and comparing it with the shift of the CMS, we can conclude on the radius.
Note that some explanations or ideas might also appear in the next subtask, then the points are are also given.

Idea of balance (give this points also if not explicitly stated but thought obvious)	2
Idea of shifting CMS (give this points also if not explicitly stated but thought obvious)	2

Clear drawing



SOLUTION

Abbildung A.1: Idea of how to measure the radius. Explanation see text, variables defined and used in next subtask.

	1
Alternativlösung:	***(5)***
A simpler, but potentially less precise approach involves measuring the length of the arc and the corresponding angle and then conclude on the radius.	
Idea of measuring arc and angle.	(1)
Clear drawing.	(1)
Suggestions for increasing precision of measurement.	(1)
Having a suggestion that does not include the construction of the center of the cylinder (due to the rather small segment provided by the mushroom-like wooden piece, the construction of the center is very imprecise).	(2)
ii. Beschreibe mathematisch (mit Formeln) wie Du aus den gemessenen Grössen den Radius bestimmen wirst.	***6***

The idea is to have a balance with the aluminium rod and have it balancing in equilibrium on the cylinder. Then by adding a bit of weight, the center of mass (CMS) shifts and the rod tilts a bit to the side by rolling by a distance s on the cylinder. Knowing the angle of this tilting α and comparing it with the shift of the CMS, we can conclude on the radius. The overall function is (explanation see at point distribution, however, the final formula is not worth any points as such):

$$R = \frac{s}{\alpha} = \frac{xm}{(M+m)\alpha} \tag{A.2}$$

Note that some explanations, ideas might also appear in the previous subtask, then the points are also given.	
CMS without additional mass is in middle of rod (give this points also if not explicitly stated but thought obvious)	1
When adding the small mass m at a distance x from the middle of the rod, the CMS moves by a distance $s = \frac{xm}{M+m}$ where M is the mass of the rod. If the approximation $M \ll m$ is made and correspondingly $s = \frac{xm}{M}$, only 1 point is given.	2
Measuring angle α	1
This distance s is connected with the tilting angle α as $s = R\alpha$	1
Technical detail: either it is explicitly stated that the rod without additional mass m is set such that it is very well balanced or an initial tilt α_0 is measured and α is referenced to that value α_0. This point is also given if it is staten in one of the next tasks.	1
Alternativlösung:	***(6)***
Continuing on the alternative approach measuring the arc and the corresponding angle (note, there are different possibilities):	

SOLUTION

Arc s and angle α are connected as $s = r\alpha$ (1)

Mention measure arc s and angle α (also give these points if obvious otherwise) (1)

Explanations on careful measurement (1)

Explanations on how to do the measurements without constructing the center of the arc. For example by not measuring the angle of the segment (corresponding to the arc) but measuring the angle of a side of the wooden cylinder with respect to some reference (e.g. the table). (3)

Teil B. Radius bestimmen *13*

Wir wollen nun den Radius R des Zylindersegments als vielfaches von L bestimmen.

i. Führe die Messung(en) zur Bestimmung von R im Vergleich zur Länge des Alustabes L durch. ***5***

The measurement as described above is performed now (for all the part B, the measurements are independent of the measurement method and the points distributed accordingly). If some points from the previous task get clarified, feel free to include it in the marking above.
The measurement should roughly look like (including an offset when there is no nail on the balance of $0.5°$)

s/L	$\alpha/°$	*Nr nails*	R/L	σ_R
-0.1	-2	1	0.059	0.019
-0.2	-4.5	1	0.053	0.008
-0.3	-6.5	1	0.055	0.006
-0.4	-8	1	0.059	0.005
0.1	1.5	1	0.079	0.031
0.2	3	1	0.079	0.015
0.3	5.5	1	0.065	0.007
0.4	7.5	1	0.063	0.005
0.1	3.5	2	0.066	0.016
-0.1	-4.5	2	0.051	0.012
0.2	7	2	0.055	0.006
-0.2	-8.5	2	0.066	0.008

Note that 2 nails can only be placed at the $s = 0.1L$ and $s = 0.2L$ The obtained mean is 0.062.
For later, the expected error according to Gaussian error propagation is also included in this table.

Number of measurements/datapoints: 1 measurement: 0 pt, 2 or 3 measurements: 1 pt, 4 or more measurements: 2 pt 2

The exact value is $0.071L$. Give points if obtained value between 0.057 and 0.086 ($\pm 20\%$) 1

Value obtained by some kind of averaging (either averaging of individual values or trend line in graph). There are mainly two ways how to change the experimental parameters: The easier is to move the mass m on the aluminium rod. The other method is to vary the weight m. Both are considered ok, nevertheless the second one is a bit trickier for later linearization. Note: Zero points if single measurement. 1

Values taken on both sides of the balance (i.e. at positive and negative s and correspondingly positive and negative α). This makes the evaluation more precise. 1

ii. Stelle das Resultat grafisch dar. ***4***

Graphical data representation. It is unimportant whether R for different measurements is plotted or a graph which connects α and s (most conclusive) or something else. Here the blue dots are the measurements with only one nail, which are also fitted. The orange dots are with two nails.

SOLUTION

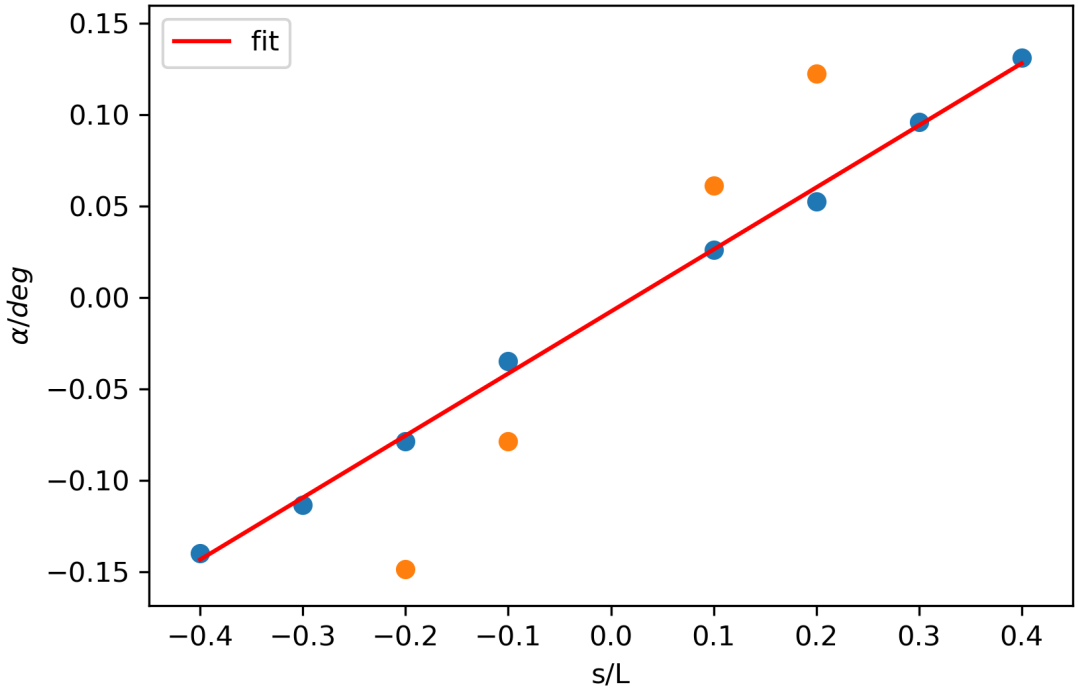


Abbildung B.1: visualized data.

Data correctly plotted	1
Graphic representation: axis labelled	0.5
Units and scale clear	0.5
Data points obvious (not connected with line)	1
Big graph	0.5
Axis drawn by ruler	0.5
iii. Schätze die Messgenauigkeit vom Radius R mit einer geeigneten Fehleranalyse ab.	*4*

The actual estimation of the measuring error and also the method is not so important. However, it should be clear how the value is obtained and what enters the calculation.
If the error estimation is done graphically in a linearized data evaluation by roughly estimating the spread of the data: 3 pt (full points for the method, if clear how it was done). As mentioned earlier, there are basically two methods how to do a linarized data evaluation: either move the position of the additional weight m or change the weight, both are ok, for the equation, see (A.2).
The following scheme includes the point distribution for computing the standard deviation from computing R several times. For the method of Gaussian error propagation, see the alternative solution below.

Computing the standard deviation of the sample $\sigma = \sqrt{\sum_i \left(R_i - \bar{R}\right)^2}$.	1

Note, this point can only be obtained if several datapoints are included in the error analysis. Dividing the std by the square of the number of points	1
Somehehow state that for small α the error is big and hence they dominate the estimated error. If anyway only big α are measured ($\lvert\alpha\rvert > 5°$), this is not an issue and this point is given.	1
Obtained or guessed accuracy of about maximal 0.005 (if larger, the measurement is considered not to be done careful enough). From the measurement here, a value of 0.003 is obtained (including all datapoints).	1
Alternativlösung:	***(4)***
Reasonable error propagation (sum of absolute values or rms) for a single point.	(1)
Note, this point can only be obtained if several datapoints are included in the error analysis. *Error propagation for the average of the data points.*	(1)
Error of α of $\pm 0.5°$ considered. For the other variables (m, M, x) it is not necessary to include them as their error is negligible compared to error of α (however, also ok if taken into account).	(1)
Obtained or guessed accuracy of about maximal 0.005 *(if larger, the measurement is considered not to be done careful enough).*	(1)

SOLUTION

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

18. - 19. März 2023

Teil 3	**:**	**1 Experiment**
Zeit	:	90 Minuten
Total	:	24 Punkte
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

- Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
- Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
- EMPA - Materials Science & Technology
- Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
- ETH Zurich Department of Physics
- Fondation Claude & Giuliana
- Ernst Göhner Stiftung, Zug
- Hasler Stiftung, Bern
- Metrohm Stiftung, Herisau
- Neue Kantonsschule Aarau
- Novartis
- Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
- Swiss Academy of Sciences
- Swiss Physical Society
- Università della Svizzera italiana
- Universität Bern FB Physik/Astronomie
- Universität Zürich FB Physik Mathematik

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Experimente

Zeit: 90 Minuten
Maximalpunktzahl: 24 Punkte

Experiment 3.1: Der reale Transformator *(24 Punkte)*

Einleitung

In dieser Aufgabe wollen wir das Verhalten eines Transformators betrachten, wenn man ihn belastet und er Leistung liefern muss.
Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, welche durch einen gemeinsamen Eisenkern miteinander gekoppelt sind (siehe Abbildung In.2). Legt man an eine der Spulen (Primärspule) eine Wechselspannung an, so erzeugt die Wechselspannung ein zeitlich wechselndes Magnetfeld im Eisenkern, welches in der anderen Spule (Sekundärspule) wiederum eine Spannung erzeugt. Die Formel für den idealen Transformator besagt, dass zwischen der Anzahl Windungen N_1 und N_2 der Primär-und Sekundärspule sowie deren Spannungen U_1 und U_2 die Beziehung

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \text{const.}$$

gilt. Aus der Energieerhaltung folgt dann für die Ströme, dass

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \text{const.}$$

Bei einigen Bauformen sowie bei kleinen Strömen gelten diese Formeln nach wie vor mit guter Näherung. Die Gültikeit der Formeln hängt davon ab, ob die Spulen magnetisch stark gekoppelt sind, also ob das Magnetfeld, welches von der Primärspule erzeugt wird, nach wie vor durch den Eisenkern und daher auch durch die Sekunderspäule fliesst, oder sich einen "neuen" Weg ausserhalb des Eisenkerns sucht. Diese "neuen" Wege werden Streuflüsse genannt.
Hier wollen wir den Fall untersuchen, wo die Streuflüsse nicht mehr vernachlässigbar sind, und die obigen Formel nicht mehr gilt.
Um den Transformator genauer zu verstehen und zu beschreiben müssen wir die Spulen genauer anschauen. Gemäss dem Induktionsgesetz ist die Spannung U an der Spule proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ (wobei $\Phi = BA$ mit B die magnetische Feldstärke, A die Querschnittfläche und N die Anzahl Windungen). Betrachten wir eine fixe Frequenz ω des Wechselstromes und schauen nur die Peak- oder Effektivwerte an, so vereinfacht sich die Formal zu

$$U = \omega N \Phi.$$

Da Magnetfelder kein Anfang und Ende haben sondern geschlossene Feldlinien sind, muss der magnetische Fluss Φ_1, welches von der Primärspule erzeugt wird, irgendwie ausserhalb der Primärspule wieder zurückfliessen. Ein Teil fliesst durch den Eisenkern und passiert die Sekundärspule Φ_2, je nach Belastung der Sekundärspule (also Widerstand R an der Sekundärspule) fliesst aber auch ein beachtlicher Teil als Streufluss Φ_S ausserhalb des Kerns.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_\mathrm{S} \\ \frac{U_1}{N_1} &= \frac{U_2}{N_2} + \Phi_\mathrm{S}\omega \end{aligned} \tag{In.1}$$

Für alle Aufgaben wird eine Beschreibung des Aufbaus erwartet. Achtung: der Strom durch die Spulen darf NIE über 0.5 A steigen, dies kann erreicht werden, indem die Primärspannung immer unter 2 V liegt. Zur Sicherheit bitte immer die Sicherungen nutzen.
Noch ein Tipp: Lies zuerst alle Aufgaben durch.

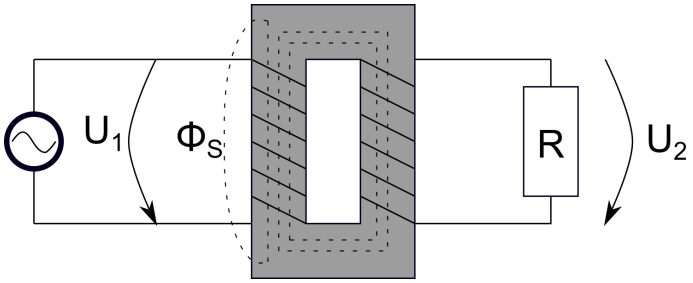


Abbildung In.2: Transformator mit Primärspule (links, mit Wechselstromquelle verbunden) und Sekundärspule (rechts, mit Widerstand R). Die gestrichelte Linien repräsentieren das Magnetfeld. Ein Teil des Feldes geht nicht durch den Eisenkern (links von der Primärspule), dies ist der Streufluss.

Material

- 2 Multimeter
- Satz Widerstände (1 Ω, 15 Ω, 22 Ω, 68 Ω, 1000 Ω)
- 1 Wechselspannungsquelle
- 1 Transformator mit zwei gleichen Spulen (bitte nur die beiden äusseren Steckbuchsen benutzen)
- 1 weitere Spule
- 1 Sicherungen 0.5 A (falls diese durchbrennt, bitte bei der Aufsicht um Ersatz fragen)
- 10 Krokodilklemme (5 rote und 5 schwarze)
- 12 Laborkabel (6 rote und 6 schwarze)
- Klebeband
- Schere

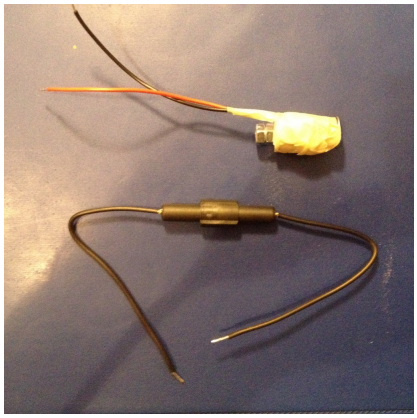


Abbildung Ma.3: Oben: weitere Spule, unten: Sicherung

Aufgaben

Für alle Aufgaben wird eine Beschreibung des Aufbaus erwartet. Achtung: der Strom durch die Spulen darf NIE über 0.5 A steigen, dies kann erreicht werden, indem die Primärspannung immer unter 2 V liegt. Zur Sicherheit bitte immer die Sicherungen nutzen.

Teil A. Trafo Belasten *(7.5 Punkte)*

Wir wollen zuerst das Verhalten des Transformators kennen lernen.

i. (4.5 Pkte.) Miss die Primärspannung U_1 und Sekundärspannung U_2 für verschiedene Belastungen (ohmscher Widerstand R am Sekundärkreis) des Trafos. Berechne oder miss zudem den Strom I_2 in der Sekundärspule. Führe mindesten 9 Messungen durch.

ii. (3 Pkte.) Stelle das Verhältnis U_2/U_1 als Funktion von I_2 grafisch dar.

Teil B. Spannungsverhältnis *(3 Punkte)*

Nun wollen wir zeigen, dass das Verhältnis U_2/U_1 bei einer gegebenen Belastung unabhängig von der Primärspannung ist.

i. (1 Pkt.) Bei welcher Belastung (ohmischer Widerstand R am Sekundärkreis), die Du gemessen hast ist die Sekundärspannung in etwa halb so gross wie die Primärspanung?

ii. (2 Pkte.) Zeige mit einer geeigneten Messung, dass bei diesem Widerstand $2U_2 = U_1$ weitgehend unabhängig von der Primärspannung ist. Beachte, dass Du mit der Primärspannung unter 2 V bleibst.

Teil C. Streufluss *(13.5 Punkte)*

Nun wollen wir zeigen, dass die Streuflüsse in der Tat für das Abnehmen der Sekundärspannung bei grösserer Belastung verantwortlich sind. Du kannst den ganzen Streufluss nicht als solches messen, aber Du kannst eine Grösse messen, welche proportional zum Streufluss ist. Wir bezeichnen diese messbare Grösse im Folgenden mit U_S.
Entsprechend können wir auch nicht exakt zeigen, dass die Streuflüsse für das Abnehmen der Sekundärspannung bei grösserer Belastung verantwortlich sind, sondern lediglich, dass eine Reduktion der Sekundärspannung einen proportional grossen Anstieg des Streuflusses verursacht. Da die Magnetflüsse nicht direkt gemessen werden können sondern nur Grössen proportional dazu (in unserem Experiment induzierte Spannungen in verschiedenen Spulen), kann Gleichung (In.1) folgendermassen umgeschreiben werden:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_\mathrm{S} \\ \frac{U_1}{C_1} &= \frac{U_2}{C_2} + \frac{U_\mathrm{S}}{C_\mathrm{S}}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Für diese Teilaufgabe kannst Du Deine Messungen aus früheren Aufgaben verwenden. Es muss aber klar ersichtlich sein, welche Daten aus früheren Aufgaben stammen und welche neu gemessen wurden!

i. (5 Pkte.) Finde eine Möglichkeit den Streufluss zu messen (nicht über U_1 und U_2 berechnen) und beschreibe Deine Idee.

ii. (4.5 Pkte.) Führe die entsprechende Messung durch und zeige mit einer geeigneten grafischen Darstellung, dass U_S/U_1 linear von U_2/U_1 abhängt (wird nicht perfekt der Fall sein, da es noch zusätzliche Effekte gibt).

iii. (4 Pkte.) Berechne aus Deiner Messung C_1/C_2 und interpretiere den Wert, den Du gefunden hast.

Anhang 1: Die Spannungsquelle

Für den Versuch brauchen wir eine Wechselspannungsquelle (AC), welche im Folgenden kurz erklärt wird, siehe Abbildung Ax1.1. Beachte folgende wichtige Punkte:

- Es darf NUR die Wechselspannung genutzt werden, die Gleichspannung würde den Transformator sofort zerstören!
- Um den Strom unter 0.5 A zu halten, soll die Spannung immer unter 2 V sein!

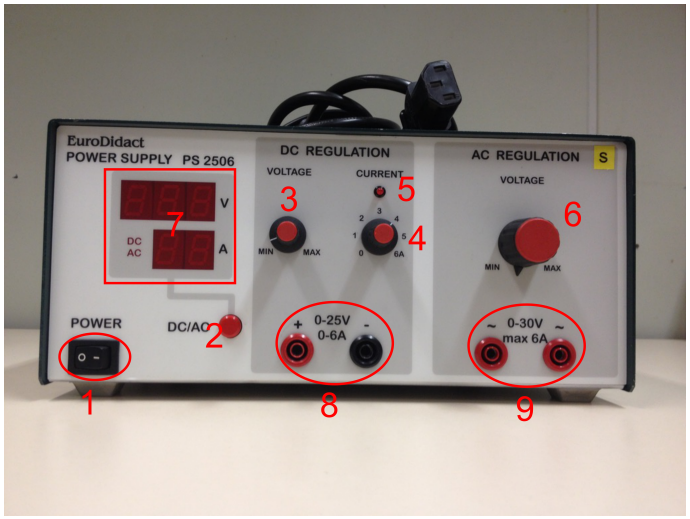


Abbildung Ax1.1: Erklärungen: 1: Ein-Ausschalter, 2: Anzeige (7) auf AC (Wechselspannung) oder DC (Gleichspannung) umschalten, immer auf AC haben, 3: Spannungsregulierung DC, 4: Strombegrenzung DC (nicht für Wechselspannung!), 5: Überlast für DC (nicht für Wechselspannung), 6: Spannungsregulierung AC, 7. Anzeige für Strom und Spannung, 8: DC Ausgänge, 9: AC Ausgägne.

Anhang 2: Das Multimeter

Für die Messung von Spannung, Strom und Widerstand benutzen wir hier ein Multimeter. Es werden zwei Modelle genutzt, siehe Abbildungen Ax2.1 und Ax2.2. Obschon es Unterschiede in der Bedienung gibt, gibt es ein paar Punkte, die beachtet werden müssen (auch zum Schutze des Multimeters).

- Das eine Kabel muss immer in der COM Buchse sein. Dies ist der Nullpunkt (üblicherweise das schwarze Kabel).
- Der Eingang für die Spannungsmessung (und z.T. kleine Ströme) ist hochohmig, d.h. es fliesst kaum ein Strom durch das Multimeter.
- Der Eingang für die Strommessung ist niederohmig, d.h. es kann ein grosser Strom durch das Multimeter fliessen
- Generell bei der Messung von Strömen: Der Strom fliesst durch das Multimeter, welches einen viel tieferen Widerstand hat als bei Spannungsmessungen. Dadurch können grosse Ströme fliessen und das Multimeter (oder die Spannungsquelle) zerstören! Daher darf das Multimeter in dieser Konfiguration NIE parallel zur Spannungsquelle geschaltet werden sondern nur in Serie mit einem Verbraucher!

Abbildung Ax2.1: Bei diesem Multimeter muss der Messbereich manuell eingestellt werden, also z.B. je nach Spannung muss ein anderer Spannungsbereich gewählt werden. Erklärungen: 1: Ein-Ausschalter, 2: COM Buchse, da gehört das schwarze Kabel hin, 3: Buchse für das zweite Kabel zur Spannungs- oder Widerstandsmessung, 4: Buchse für das zweite Kabel zur Strommessung bis MAXIMAL 0.2 A, 5: Buchse für das zweite Kabel zur Strommessung bis MAXIMAL 20 A, 6: Spannungsmessung Gleichspannung, verschiedene Messbereiche, 7: Spannungsmessung Wechselspannung, verschiedene Messbereiche, 8: Strommessung Wechselstrom (Achtung: für 0.2 A andere Buchse verwenden), verschiedene Messbereiche, 9: Strommessung Gleichstrom (Achtung: für 0.2 A andere Buchse verwenden), verschiedene Messbereiche, 10: Widerstandsmessung, verschiedene Messbereiche, 11: Display.

Abbildung Ax2.2: Bei diesem Multimeter stellt sich der Messbereich automatisch ein. Erklärungen: 1: Multimeter ausgeschaltet, 2: COM Buchse, da gehört das schwarze Kabel hin, 3: Buchse für das zweite Kabel zur Spannungs- oder Widerstandsmessung und Strommessung bis MAXIMAL 0.6 mA, 4: Buchse für das zweite Kabel zur Strommessung bis MAXIMAL 10 A, 5: Wechselpannungsmessung, 6: Gleichspannungsmessung, 7: Widerstandsmessung, 8, 9: nicht relevant hier, 10: Starkstrommessung, bis 10 A. Zum Umschalten von Gleichstrom auf Wechselstrom, orange Taste (13) drücken, 11: Kleinstrommessung, bis 0.6 mA. Zum Umschalten von Gleichstrom auf Wechselstrom, orange Taste (13) drücken, 12: Display, 13: Umstellen gewisser Messungen (orange Zeichen beim Rad).

Experimente: Lösungen

Experiment 3.1: Der reale Transformator 24

Einleitung

In dieser Aufgabe wollen wir das Verhalten eines Transformators betrachten, wenn man ihn belastet und er Leistung liefern muss.
Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, welche durch einen gemeinsamen Eisenkern miteinander gekoppelt sind (siehe Abbildung In.2). Legt man an eine der Spulen (Primärspule) eine Wechselspannung an, so erzeugt die Wechselspannung ein zeitlich wechselndes Magnetfeld im Eisenkern, welches in der anderen Spule (Sekundärspule) wiederum eine Spannung erzeugt. Die Formel für den idealen Transformator besagt, dass zwischen der Anzahl Windungen N_1 und N_2 der Primär-und Sekundärspule sowie deren Spannungen U_1 und U_2 die Beziehung

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \text{const.}$$

gilt. Aus der Energieerhaltung folgt dann für die Ströme, dass

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \text{const.}$$

Bei einigen Bauformen sowie bei kleinen Strömen gelten diese Formeln nach wie vor mit guter Näherung. Die Gültikeit der Formeln hängt davon ab, ob die Spulen magnetisch stark gekoppelt sind, also ob das Magnetfeld, welches von der Primärspule erzeugt wird, nach wie vor durch den Eisenkern und daher auch durch die Sekunderspäule fliesst, oder sich einen "neuen" Weg ausserhalb des Eisenkerns sucht. Diese "neuen" Wege werden Streuflüsse genannt.
Hier wollen wir den Fall untersuchen, wo die Streuflüsse nicht mehr vernachlässigbar sind, und die obigen Formel nicht mehr gilt.
Um den Transformator genauer zu verstehen und zu beschreiben müssen wir die Spulen genauer anschauen. Gemäss dem Induktionsgesetz ist die Spannung U an der Spule proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ (wobei $\Phi = BA$ mit B die magnetische Feldstärke, A die Querschnittfläche und N die Anzahl Windungen). Betrachten wir eine fixe Frequenz ω des Wechselstromes und schauen nur die Peak- oder Effektivwerte an, so vereinfacht sich die Formal zu

$$U = \omega N \Phi.$$

Da Magnetfelder kein Anfang und Ende haben sondern geschlossene Feldlinien sind, muss der magnetische Fluss Φ_1, welches von der Primärspule erzeugt wird, irgendwie ausserhalb der Primärspule wieder zurückfliessen. Ein Teil fliesst durch den Eisenkern und passiert die Sekundärspule Φ_2, je nach Belastung der Sekundärspule (also Widerstand R an der Sekundärspule) fliesst aber auch ein beachtlicher Teil als Streufluss Φ_S ausserhalb des Kerns.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_\mathrm{S} \\ \frac{U_1}{N_1} &= \frac{U_2}{N_2} + \Phi_\mathrm{S}\omega \end{aligned} \tag{In.1}$$

Für alle Aufgaben wird eine Beschreibung des Aufbaus erwartet. Achtung: der Strom durch die Spulen darf NIE über 0.5 A steigen, dies kann erreicht werden, indem die Primärspannung immer unter 2 V liegt. Zur Sicherheit bitte immer die Sicherungen nutzen.
Noch ein Tipp: Lies zuerst alle Aufgaben durch.

SOLUTION

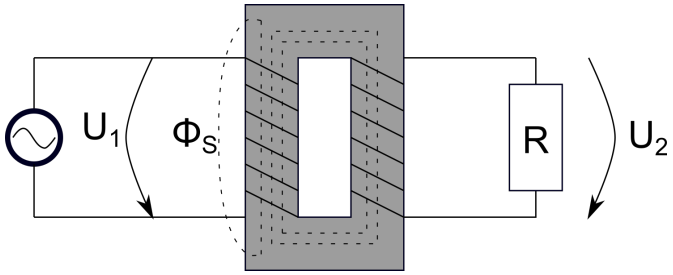


Abbildung In.2: Transformator mit Primärspule (links, mit Wechselstromquelle verbunden) und Sekundärspule (rechts, mit Widerstand R). Die gestrichelte Linien repräsentieren das Magnetfeld. Ein Teil des Feldes geht nicht durch den Eisenkern (links von der Primärspule), dies ist der Streufluss.

Material

- 2 Multimeter
- Satz Widerstände (1 Ω, 15 Ω, 22 Ω, 68 Ω, 1000 Ω)
- 1 Wechselspannungsquelle
- 1 Transformator mit zwei gleichen Spulen (bitte nur die beiden äusseren Steckbuchsen benutzen)
- 1 weitere Spule
- 1 Sicherungen 0.5 A (falls diese durchbrennt, bitte bei der Aufsicht um Ersatz fragen)
- 10 Krokodilklemme (5 rote und 5 schwarze)
- 12 Laborkabel (6 rote und 6 schwarze)
- Klebeband
- Schere

SOLUTION

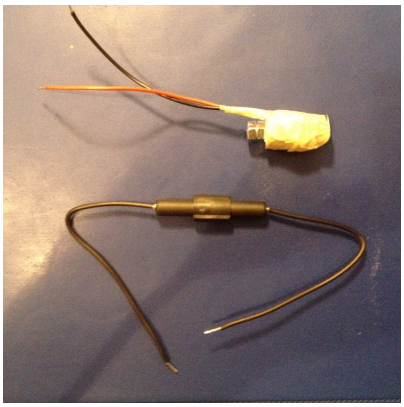


Abbildung Ma.3: Oben: weitere Spule, unten: Sicherung

Aufgaben

Für alle Aufgaben wird eine Beschreibung des Aufbaus erwartet. Achtung: der Strom durch die Spulen darf NIE über $0.5\,\mathrm{A}$ steigen, dies kann erreicht werden, indem die Primärspannung immer unter $2\,\mathrm{V}$ liegt. Zur Sicherheit bitte immer die Sicherungen nutzen.

Teil A. Trafo Belasten *7.5*

Wir wollen zuerst das Verhalten des Transformators kennen lernen.

i. Miss die Primärspannung U_1 und Sekundärspannung U_2 für verschiedene Belastungen (ohmscher Widerstand R am Sekundärkreis) des Trafos. Berechne oder miss zudem den Strom I_2 in der Sekundärspule. Führe mindesten 9 Messungen durch. ***4.5***

The idea is to connect the secondary coil with different resistors and measure U_1 and U_2. Note that one has to combine different resistors to get enough measurement points. The collected data might look like (other resistors are used than the given in the exam, however, the actual value of the resistor is unimprtant (more precisely, the ohmic resistor of the secondary coil would also count), only U_2/U_1 is relevant):

R/Ω	*Combination*	U_1/V	U_2/V	I_2/mA	U_S/mV	U_2/U_1	U_S/U_1
0	$0\,\Omega$	1.75	0.00	45.4	289	0.000	145
1	$1\,\Omega$	1.75	0.05	45.0	287	0.0290	144
8.9	$15\,\Omega + 22\,\Omega$ *parallel*	1.74	0.38	40.1	259	0.218	129
12.3	$15\,\Omega + 68\,\Omega$ *parallel*	1.74	0.49	38.3	246	0.282	121
15	$15\,\Omega$	1.74	0.57	36.7	237	0.328	116
22	$22\,\Omega$	1.75	0.77	33.0	212	0.440	101
37	$15\,\Omega + 22\,\Omega$	1.76	1.04	26.7	172	0.581	77.8
68	$68\,\Omega$	1.79	1.31	18.7	122	0.732	48.6
83	$15\,\Omega + 68\,\Omega$	1.79	1.38	16.1	107	0.771	40.23
90	$22\,\Omega + 68\,\Omega$	1.80	1.41	15.2	101	0.783	36.7
105	$15\,\Omega + 22\,\Omega + 68\,\Omega$	1.81	1.46	13.4	91	0.807	30.9
1000	$1000\,\Omega$	1.86	1.70	1.54	38	0.914	1.61
∞	*open circuit*	1.86	1.72	0.00	35	0.925	0

Note that some of the data above will be relevant later, but is collected here for completeness.

Clear description of the experiment (The idea is to connect the secondary coil with different resistors and measure U_1 and U_2.) 1

Number of measurements, if less than 9, subtract 0.5 P for each missing point. 1

Quantities correctly measured, i.e. the voltages over the corresponding coils. The current has to be measured or if computed with the resistors, the resistors have to be measured (as they have an uncertinty of $\pm 5\%$) 1

SOLUTION

Open circuit included	0.25
1000 Ohm included	0.25
Shortcut included or argued why this is not useful to measure (i.e. because the resistance of the transformer is non negligible for such a small resistance)	0.25
1 Ohm included or argued why this is not useful to measure (i.e. because the resistance of the transformer is non negligible for such a small resistance)	0.25
Three resistances between 5 and 30 Ohm included	0.25
Two resistances between 50 and 120 Ohm included	0.25
ii. Stelle das Verhältnis U_2/U_1 als Funktion von I_2 grafisch dar.	*3*

Here the data obtained from the previous task is represented.

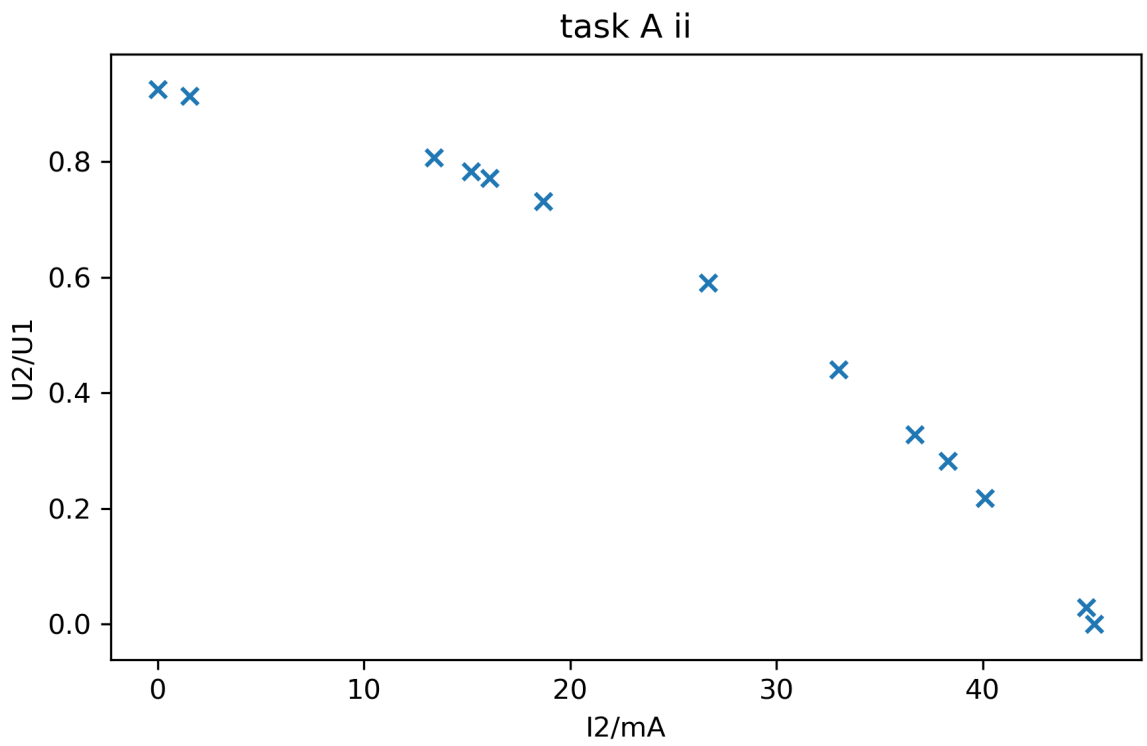


Abbildung A.1: Expected graph.

Data points correctly entered (for the 1 Ohm resistor and the short cut there might be weird results if the current is computed as U_2/R. We do not care about this.)	0.5
Graphic representation: axis labelled	0.5
Units and scale clear	0.5

Data points obvious (not connected with line)	0.5
Big graph	0.5
Axis drawn by ruler	0.5
Teil B. Spannungsverhältnis	*3*
Nun wollen wir zeigen, dass das Verhältnis U_2/U_1 bei einer gegebenen Belastung unabhängig von der Primärspannung ist.	
i. Bei welcher Belastung (ohmischer Widerstand R am Sekundärkreis), die Du gemessen hast ist die Sekundärspannung in etwa halb so gross wie die Primärspanung?	*1*
The idea is to find a resistor (or a combination of several), where $2U_2 = U_1$	
Find correct resistance, it should be either 22 Ohm or 37 (= 15+22) Ohm. Give this point also, if the students did not use these two resistances but quote their closest resistance.	1
ii. Zeige mit einer geeigneten Messung, dass bei diesem Widerstand $2U_2 = U_1$ weitgehend unabhängig von der Primärspannung ist. Beachte, dass Du mit der Primärspannung unter 2 V bleibst.	*2*
Knowing the right resistor, we change U_1 and check whether the ratio U_1/U_2 stays the same. Note, that the points in this sub tasks are distributed independent whether the resistor is correct or not.	
Quick description of experiment (it is enough to state that it is the same as above but fixed R and variable U_1)	0.5
Number of measurements: at least 3	0.5
Range of U_1: lower than 0.9 V and higher than 1.6 V	0.5
Document/Indicate that the ratio U_2/U_1 stays almost the same (needs to be indicated explicitly)	0.5
Teil C. Streufluss	*13.5*

Nun wollen wir zeigen, dass die Streuflüsse in der Tat für das Abnehmen der Sekundärspannung bei grösserer Belastung verantwortlich sind. Du kannst den ganzen Streufluss nicht als solches messen, aber Du kannst eine Grösse messen, welche proportional zum Streufluss ist. Wir bezeichnen diese messbare Grösse im Folgenden mit $U_\mathbf{S}$.
Entsprechend können wir auch nicht exakt zeigen, dass die Streuflüsse für das Abnehmen der Sekundärspannung bei grösserer Belastung verantwortlich sind, sondern lediglich, dass eine Reduktion der Sekundärspannung einen proportional grossen Anstieg des Streuflusses verursacht. Da die Magnetflüsse nicht direkt gemessen werden können sondern nur Grössen proportional dazu (in unserem Experiment induzierte Spannungen in verschiedenen Spulen), kann Gleichung (In.1) **folgendermassen umgeschreiben werden:**

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_\mathbf{S} \\ \frac{U_1}{C_1} &= \frac{U_2}{C_2} + \frac{U_\mathbf{S}}{C_\mathbf{S}}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

SOLUTION

Für diese Teilaufgabe kannst Du Deine Messungen aus früheren Aufgaben verwenden. Es muss aber klar ersichtlich sein, welche Daten aus früheren Aufgaben stammen und welche neu gemessen wurden!

i. Finde eine Möglichkeit den Streufluss zu messen (nicht über U_1 und U_2 berechnen) und beschreibe Deine Idee.	***5***
Using the additional small coil, one can measure the induced voltage. That voltage is proportional to the flux Φ_C going though the coil. This flux is proportional to the entire flux.	
Idea of using the small coil (best aside of the primary coil). Needs to be clear from description.	2
The voltage U_S measured at this coil is proportional to the flux though the coil. Needs to be clear from description.	1
The flux though the coil is proportional to the entire flux not going though the iron. Needs to be clear from description.	2
ii. Führe die entsprechende Messung durch und zeige mit einer geeigneten grafischen Darstellung, dass U_S/U_1 linear von U_2/U_1 abhängt (wird nicht perfekt der Fall sein, da es noch zusätzliche Effekte gibt).	***4.5***

We rearrange (equation (C.1)*)*

$$\frac{U_S}{U_1} = \frac{C_S}{C_1} - \frac{C_S}{C_2}\frac{U_2}{U_1},$$

which is a linear equation $y = \frac{U_S}{U_1}$ and $x = \frac{U_2}{U_1}$. If the plot x vs. y is linear, equation (In.1) *is fulfilled. Note that one shoul subtract some offset voltage from U_S (i.e. the measured voltage at the small coil when the circuit is open). Nevertheless, we do not care whether this is done or not. The plot should look as follows:*

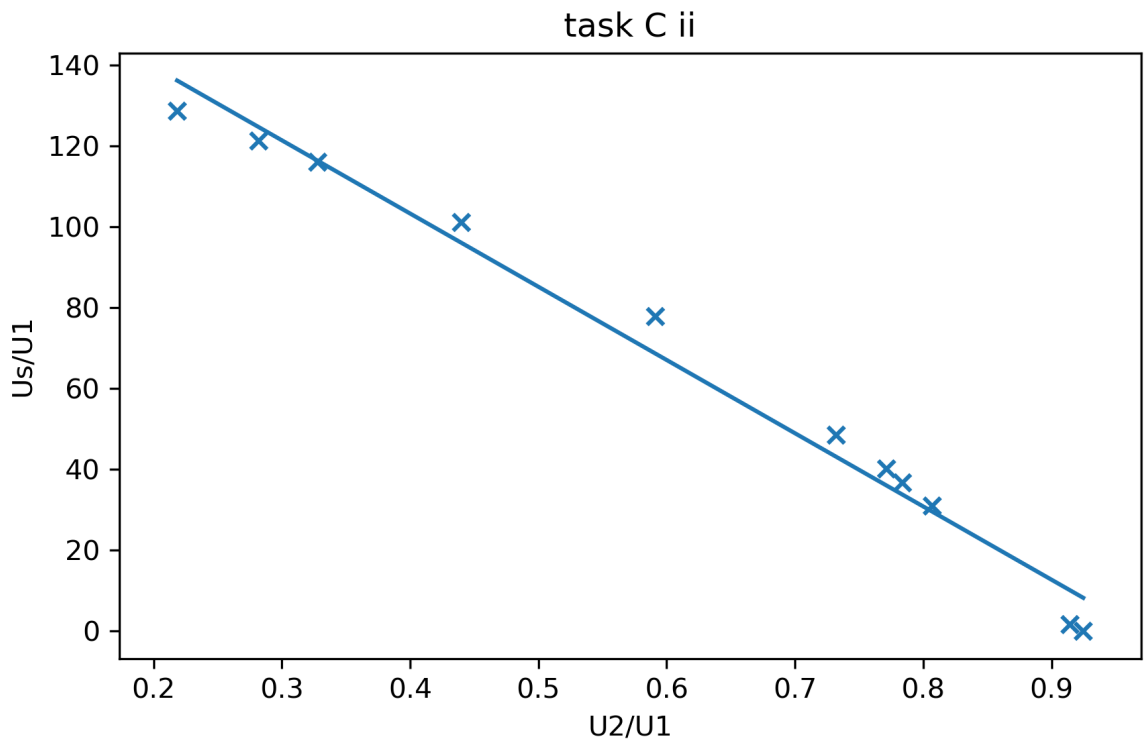


Abbildung C.2: Expected graph.

Points are distributed as:	
Finding the linearized equation (or something similar)	1
Concluding that a linear plot shows the expected behaviour (need to be stated explicitly)	1
Measuring U_S for at least 4 values (together with U_1 and U_2 or using U_1 and U_2 from previous tasks)	1
Graphic representation: axis labelled	0.25
Units and scale clear	0.25
Data points obvious (not connected with line)	0.5
Big graph	0.25
Axis drawn by ruler	0.25
iii. Berechne aus Deiner Messung C_1/C_2 und interpretiere den Wert, den Du gefunden hast.	*4*
From the linear dependence between U_S/U_1 as function of U_2/U_1 we find that C_1/C_2 is equal to minus the y-axis intersection divided by the slope.	
Dividing the y-axis intersecion by the slope including minus sign (if minus sign is forgotten, i.e. the value is negative, -0.5 pt).	1
Value between 0.95 and 1.15 (in principle the value should be 1, however due to imprecisions a value slightly higher than one is more likely obtained). The value obtained in the measurement above is 1.03.	1
Interpretation: each C_i describes how the magnetic flux Φ_i is connected to the corresponding voltage U_i. This connection is only dependent on the coil and the frequency. Since the two coils are the same, we expect to obtain a value close to 1.	2

SOLUTION

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

18. - 19. März 2023

Teil 4	**:**	**6 Kurzaufgaben**
Zeit	:	60 Minuten
Total	:	24 Punkte (6×4)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Kurzaufgaben

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 24 Punkte (6×4)

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern.

Kurzaufgabe 4.1: Heisser Draht *(4 Punkte)*

i. (4 Pkte.) Ein Draht der Länge l und konstantem Radius $r \ll l$ ist mit einer Spannungsquelle mit Spannung V verbunden. Der spezifische Widerstand des Drahtes, ρ, ist temperaturabhängig: $\rho(T) = cT$ für eine Konstante $c > 0$. Der Draht strahlt wie ein schwarzer Körper. Wie viel Strom fliesst im Gleichgewicht durch den Draht?

Kurzaufgabe 4.2: Maximale Leistung *(4 Punkte)*

i. (4 Pkte.) Wir haben eine Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand von $R_\mathrm{i} = 50\,\Omega$. Wie gross muss der Widerstand R sein, den wir mit der Spannungsquelle verbinden um eine maximale Wärmeleistung über R zu erzielen?

Kurzaufgabe 4.3: Fotografie fotografieren *(4 Punkte)*

Wenn man ein Foto eines Gegenstandes macht, bildet die Linse (oder ein Linsensystem) den Gegenstand auf den Kamerachip ab. Angenommen wir verringern die Distanz zwischen Linse und Chip, ohne dabei die Brennweite der Linse anzupassen, dann liegt das scharfe Bild hinter dem Chip und der Chip nimmt nur ein vorschwommenes Bild auf (wir nehmen an, dass die Auflösung genügend hoch ist und nicht berücksichtigt werden muss), siehe hierzu Abbildung 1. Können wir dieses verschwommene Bild ausdrucken und noch einmal mit einer Kamera abfotografieren, sodass bei geeigneter Platzierung des Chips (in Bezug auf die Linse) ein scharfes Bild entsteht?

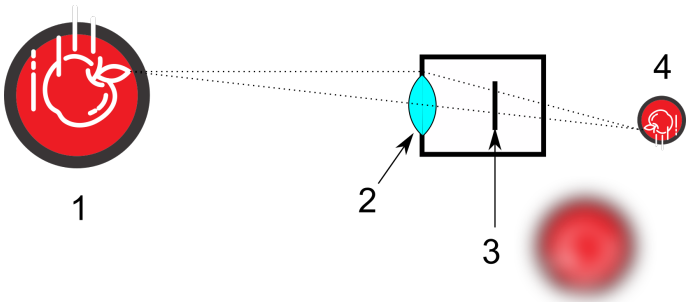


Abbildung 1: Skizze der Anordnung. 1: Objekt, welches abgebildet werden soll, 2: Linse, 3: Chip mit Beispiel eines verschwommenen Bildes, 4. eigentliche Abbildung des Objektes (hinter dem Chip).

i. (1 Pkt.) Geht das, ja oder nein?
ii. (3 Pkte.) Begründe Deine Antwort.

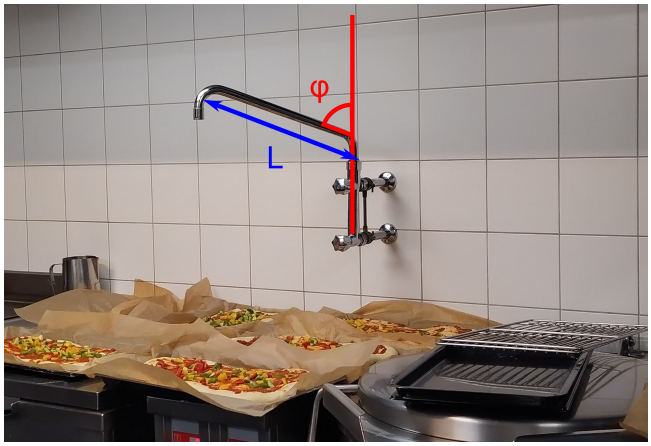
Kurzaufgabe 4.4: Auftrieb *(4 Punkte)*

Ein Zylinder mit Höhe $L = 20\,\mathrm{cm}$ und Radius $r = 50\,\mathrm{cm}$ hat eine homogene Dichte ρ_Zylinder.
Emmy platziert den Zylinder mit einer der beiden Kreisflächen gegen unten in Wasser. Sie macht einen Strich dort auf den Zylinder, wo dieser die Wasseroberfläche berührt. Dann dreht sie den Zylinder um, so dass nun die andere Kreisfläche unten ist. Sie macht nochmals einen Strich dort auf den Zylinder, wo dieser die Wasseroberfläche berührt. Die beiden Striche haben Abstand $d = 4\,\mathrm{cm}$.
i. (4 Pkte.) Berechne die Dichte des Zylinders. Dabei sei $\rho_\mathrm{Luft} \ll \rho_\mathrm{Wasser} = 1000\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

Kurzaufgabe 4.5: Wasserhahn schwenken *(4 Punkte)*

Im Physik-Lager beobachtete das Küchenteam, dass beim Schwenken des grossen Wasserhahns jeweils viel Wasser heraustropfte, obschon der Hahn geschlossen war. Wieso bloss? Wir nehmen folgende Parameter an:

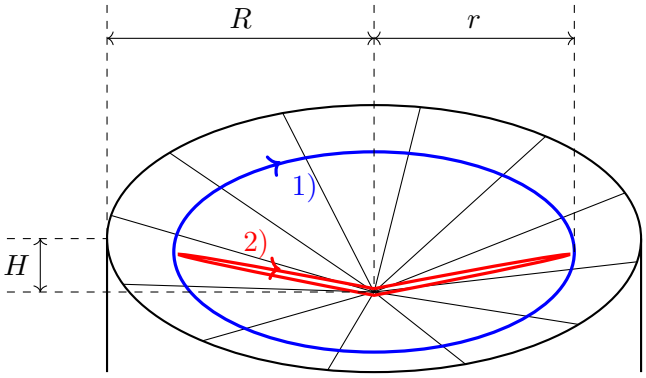
- Der Hahn ist nicht horizontal sondern leicht ansteigend mit einem Winkel von $\varphi = 70°$ bezüglich der vertikalen Schwenkachse.
- Die Länge des ansteigenden Teils des Wasserhahns sei $L = 50\,\text{cm}$.
- Der Wasserhahn sei geschlossen, aber trotzdem auf der ganzen Länge L mit Wasser gefüllt.
- Der Rohrdurchmesser sei $D = 1\,\text{cm}$.



i. (4 Pkte.) Berechne die Winkelgeschwindigkeit ω um die Schwenkachse, welche erreicht werden muss, damit die Hälfte des Wassers aus dem ansteigenden Teil des Rohres ausfliesst.

Kurzaufgabe 4.6: Der Munot *(4 Punkte)*

Der Munot ist eine Festung in Schaffhausen. Der Turm hat die Form eines Zylinders mit Radius $R = 20\,\text{m}$. Das Dach ist zur Mitte hin abgesenkt, wobei es die Form eines umgekehrten Kegels hat, welcher coaxial zum Turm ist und die Höhe H hat. (In dessen Mitte befindet sich ein Gitter und ein Regenwasserabfluss, was wir hier aber ignorieren.) Reibungskräfte werden ebenfalls vernachlässigt.



Wir möchten H messen, aber haben nur einen Ball (mit vernachlässigbarem Radius) und eine Stoppuhr. Wir positionieren uns auf dem Dach mit einer horizontalen Distanz $r < R$ vom Zentrum und gehen wie folgt vor:[a]

- Zuerst lassen wir den Ball tangentiell zum Kegel rollen, wobei wir die Startgeschwindigkeit gross genug wählen, so dass der Ball eine Kreisbewegung mit konstanter Höhe ausführt bis er wieder zu uns zurück kommt. Wir messen die Dauer T_1 dieser Bewegung.
- Nun lassen wir den Ball ohne Startgeschwindigkeit rollen. Somit bewegt er sich durch die Mitte des Kegels, steigt auf der anderen Seite hoch, stoppt und kommt dann den gleichen Weg zurück bis zu uns. Wir messen eine Dauer T_2 für diese Bewegung.

i. (4 Pkte.) Wir messen $\frac{T_1}{T_2} = 1.105$. Berechne H.

[a] Hinweis: diese Messmethode ist nicht zwingend praktikabel...

Kurzaufgaben: Lösungen

Kurzaufgabe 4.1: Heisser Draht 4

i. Ein Draht der Länge l und konstantem Radius $r \ll l$ ist mit einer Spannungsquelle mit Spannung V verbunden. Der spezifische Widerstand des Drahtes, ρ, ist temperaturabhängig: $\rho(T) = cT$ für eine Konstante $c > 0$. Der Draht strahlt wie ein schwarzer Körper. Wie viel Strom fliesst im Gleichgewicht durch den Draht? 4

The resistance is given by $R(T) = \frac{l}{r^2\pi}\rho(T) = \frac{l}{r^2\pi}cT$. The heating power is given by $P_{heat} = \frac{V^2}{R(T)}$. The black body radiation is given by the Stefan-Boltzmann law $P_{rad} = \sigma T^4 A$, where σ is the Stefan-Boltzmann constant and $A = 2\pi rl$ is the surface of the wire. At equilibrium, $P_{heat} = P_{rad}$, leading to:

$$\frac{V^2}{R(T_e)} = \sigma T_e^4 A$$
$$\frac{V^2 r^2 \pi}{lcT} = \sigma T_e^4 2\pi rl$$
$$\frac{V^2 r}{2\sigma l^2 c} = T_e^5$$
$$T_e = \left(\frac{V^2 r}{2\sigma l^2 c}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Using $I_e = \frac{V}{R(T_e)}$ we find:

$$I_e = V^{\frac{3}{5}} \frac{(2\sigma)^{\frac{1}{5}}\, r^{\frac{9}{5}} \pi}{l^{\frac{3}{5}} c^{\frac{4}{5}}}$$

Resistance $R(T) = \frac{l}{r^2\pi}\rho(T) = \frac{l}{r^2\pi}cT$.	0.5
Heating power $P_{\text{heat}} = \frac{V^2}{R(T)}$.	0.5
Stefan-Boltzmann law $P_{\text{rad}} = \sigma T^4 A$.	0.5
Area for the Stefan-Boltzmann law $A = 2\pi rl$ ($A = 2\pi rl + 2r^2\pi$ is also correct).	0.5
Equilibrium condition $P_{\text{heat}} = P_{\text{rad}}$.	0.5
Correct equilibrium temperature $T_{\text{e}} = \left(\frac{V^2 r}{2\sigma l^2 c}\right)^{\frac{1}{5}}$.	0.5
Correct equilibrium current.	1

Points are also awarded if the equations were used implicitly.

SOLUTION

Kurzaufgabe 4.2: Maximale Leistung *4*

i. Wir haben eine Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand von $R_\mathrm{i} = 50\,\Omega$. Wie gross muss der Widerstand R sein, den wir mit der Spannungsquelle verbinden um eine maximale Wärmeleistung über R zu erzielen? *4*

Let U be the electromotive force at the voltage source then the current at resistance R is

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{i} + R},$$

1

which means the dissipated power over R is

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{(R_\mathrm{i} + R)^2} R.$$

1

Maximal power means that

$$0 = \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{U^2 \left((R_\mathrm{i} + R)^2 - 2R\,(R_\mathrm{i} + R) \right)}{(R_\mathrm{i} + R)^4},$$

1

which is fullfilled for $R = R_\mathrm{i} = 50\,\Omega$. 1

SOLUTION

Kurzaufgabe 4.3: Fotografie fotografieren *4*

Wenn man ein Foto eines Gegenstandes macht, bildet die Linse (oder ein Linsensystem) den Gegenstand auf den Kamerachip ab. Angenommen wir verringern die Distanz zwischen Linse und Chip, ohne dabei die Brennweite der Linse anzupassen, dann liegt das scharfe Bild hinter dem Chip und der Chip nimmt nur ein vorschwommenes Bild auf (wir nehmen an, dass die Auflösung genügend hoch ist und nicht berücksichtigt werden muss), siehe hierzu Abbildung 1. Können wir dieses verschwommene Bild ausdrucken und noch einmal mit einer Kamera abfotografieren, sodass bei geeigneter Platzierung des Chips (in Bezug auf die Linse) ein scharfes Bild entsteht?

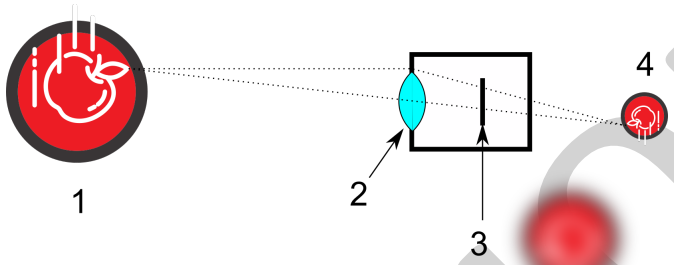


Abbildung 1: Skizze der Anordnung. 1: Objekt, welches abgebildet werden soll, 2: Linse, 3: Chip mit Beispiel eines verschwommenen Bildes, 4. eigentliche Abbildung des Objektes (hinter dem Chip).

SOLUTION

i. Geht das, ja oder nein? *1*

A "no" without justification is fine here.

No. 1

ii. Begründe Deine Antwort. *3*

The reason why this does not work is the following: the camera records the intensity distribution. However, a sharp image is a coherent superposition of the field (electric and magnetic field) that is imaged by the lens. In more detail: the field distribution at the image is the same as at the object. Therefore the phase of the field is very important but not recorded. Such a crucial "information" contained in the field gets lost when only the intensity is recorded.
The students do not need to answer in such detail, but some milestones should be mentioned (be generous in distributing the points, in particular if the description is a bit fuzzy).

The camera records an intensity. 1

Sharp image is superposition of waves from the object (main focus on superposition of field). 1

Phase information of superposition is lost. 1

Kurzaufgabe 4.4: Auftrieb 4

Ein Zylinder mit Höhe $L = 20\,\mathrm{cm}$ und Radius $r = 50\,\mathrm{cm}$ hat eine homogene Dichte $\rho_{\mathbf{Zylinder}}$.

Emmy platziert den Zylinder mit einer der beiden Kreisflächen gegen unten in Wasser. Sie macht einen Strich dort auf den Zylinder, wo dieser die Wasseroberfläche berührt. Dann dreht sie den Zylinder um, so dass nun die andere Kreisfläche unten ist. Sie macht nochmals einen Strich dort auf den Zylinder, wo dieser die Wasseroberfläche berührt. Die beiden Striche haben Abstand $d = 4\,\mathrm{cm}$.

i. Berechne die Dichte des Zylinders. Dabei sei $\rho_{\mathbf{Luft}} \ll \rho_{\mathbf{Wasser}} = 1000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. 4

There are two possibilities for the density of the cylinder, as the cylinder can sink by $\frac{L+d}{2}$ or $\frac{L-d}{2}$.
(0.25 point for each correct expression of the sinking length and 0.75 point for recognizing the existence of two solutions. No point reduction in later parts for giving only one solution.) 1.25

The weight of the displaced water is

$$\frac{L \pm d}{2}\pi r^2 \rho_{\text{water}} g.$$

0.25

The weight of the cylinder is

$$L\pi r^2 \rho_{\text{cylinder}} g.$$

0.25

Using Archimedes' principle, we can equate both expressions. 0.5

This gives

$$\frac{L \pm d}{2}\rho_{\text{water}} g = L\rho_{\text{cylinder; 1, 2}} g.$$

0.5

Solving for ρ_{cylinder}:

$$\rho_{\text{cylinder; 1, 2}} = \frac{L \pm d}{2L}\rho_{\text{water}}.$$

(-0.5 point for small errors) 0.75

Numerically:

$$\rho_{\text{cylinder; 1}} = 600\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3},$$
$$\rho_{\text{cylinder; 2}} = 400\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}.$$

0.5

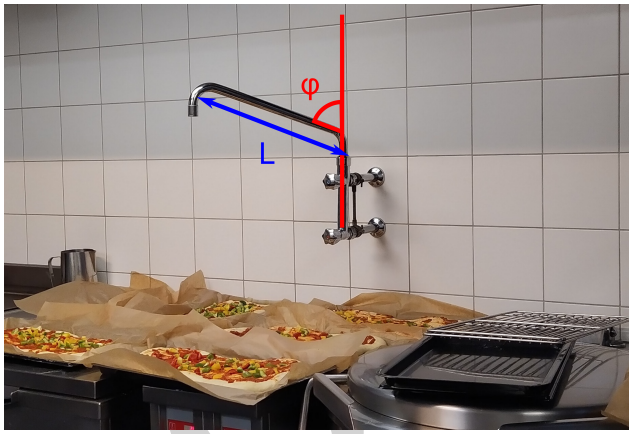
One could also take the mass of displaced air into account at first. Setting ρ_{air} small then leads to the wanted formula.

SOLUTION

Kurzaufgabe 4.5: Wasserhahn schwenken 4

Im Physik-Lager beobachtete das Küchenteam, dass beim Schwenken des grossen Wasserhahns jeweils viel Wasser heraustropfte, obschon der Hahn geschlossen war. Wieso bloss? Wir nehmen folgende Parameter an:

- **Der Hahn ist nicht horizontal sondern leicht ansteigend mit einem Winkel von $\varphi = 70°$ bezüglich der vertikalen Schwenkachse.**
- **Die Länge des ansteigenden Teils des Wasserhahns sei $L = 50\,\mathrm{cm}$.**
- **Der Wasserhahn sei geschlossen, aber trotzdem auf der ganzen Länge L mit Wasser gefüllt.**
- **Der Rohrdurchmesser sei $D = 1\,\mathrm{cm}$.**



i. Berechne die Winkelgeschwindigkeit ω um die Schwenkachse, welche erreicht werden muss, damit die Hälfte des Wassers aus dem ansteigenden Teil des Rohres ausfliesst. 4

The water faucet is rotated with an angular velocity ω. Depending on the distance r from the rotation axis, gravity might or might not be sufficient to compensate for the centripetal force due to the rotation.

For a given distance r of the water faucet with respect to the rotation axis, the needed centripetal acceleration to keep the water in place is given by

$$a_Z(r) = \omega^2 r.$$

0.5

Due to the slope, the projection of this centripetal force along the faucet, is given by $a_{Z,p}(r) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) a_Z(r) = \sin(\varphi)\, a_Z(r)$. 0.5

The gravitational acceleration pushing the water down along the faucet is given by $a_{G,p} = g\cos(\varphi)$. 1

We want the two accelerations to be the same at $x = L/2$. 0.5

The distance along the faucet and the distance to the rotation axis are connected as $r = x\sin(\varphi)$. 0.5

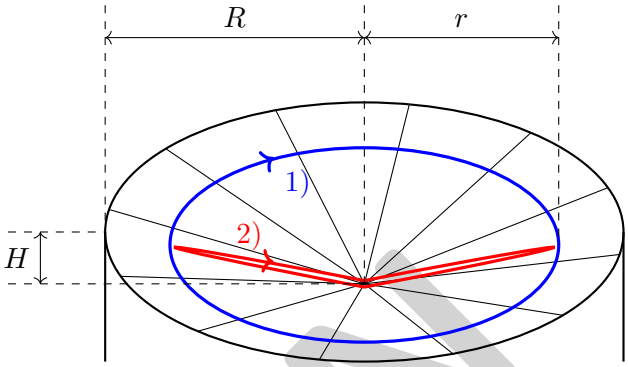
Solving for $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L\sin(\varphi)\tan(\varphi)}}$. 0.5

Numeric value of $3.90\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. 0.5

SOLUTIO

Kurzaufgabe 4.6: Der Munot 4

Der Munot ist eine Festung in Schaffhausen. Der Turm hat die Form eines Zylinders mit Radius $R = 20\,\mathrm{m}$. Das Dach ist zur Mitte hin abgesenkt, wobei es die Form eines umgekehrten Kegels hat, welcher coaxial zum Turm ist und die Höhe H hat. (In dessen Mitte befindet sich ein Gitter und ein Regenwasserabfluss, was wir hier aber ignorieren.) Reibungskräfte werden ebenfalls vernachlässigt.



Wir möchten H messen, aber haben nur einen Ball (mit vernachlässigbarem Radius) und eine Stoppuhr. Wir positionieren uns auf dem Dach mit einer horizontalen Distanz $r < R$ vom Zentrum und gehen wie folgt vor: [1]

- **Zuerst lassen wir den Ball tangentiell zum Kegel rollen, wobei wir die Startgeschwindigkeit gross genug wählen, so dass der Ball eine Kreisbewegung mit konstanter Höhe ausführt bis er wieder zu uns zurück kommt. Wir messen die Dauer T_1 dieser Bewegung.**
- **Nun lassen wir den Ball ohne Startgeschwindigkeit rollen. Somit bewegt er sich durch die Mitte des Kegels, steigt auf der anderen Seite hoch, stoppt und kommt dann den gleichen Weg zurück bis zu uns. Wir messen eine Dauer T_2 für diese Bewegung.**

i. Wir messen $\frac{T_1}{T_2} = 1.105$. Berechne H. 4

The depth of the surface from our position is h, with

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H}.$$

0.25

In the first case, we have a uniform circular motion obeying the relation

$$a_1 = \frac{v^2}{r}.$$

0.25

The acceleration can be found by projecting the forces (weight and normal force), knowing that it is radial and horizontal. We find

$$\frac{a_1}{g} = \frac{h}{r}.$$

[1] Hinweis: diese Messmethode ist nicht zwingend praktikabel...

SOLUTION

0.5

The velocity is related to T_1 by

$$v = \frac{2\pi r}{T_1}.$$

0.25

Putting it together we find

$$T_1 = 2\pi \frac{r}{\sqrt{gh}}.$$

For the second case, we have a piecewise uniformly accelerated motion. Due to spatial symmetry and temporal symmetry (energy conservation), it is sufficient to find the rolling time from the initial position to the center, then multiply by four. 0.25

As in the first case, the acceleration points towards the axis, but this time tangentially to the slope. By projecting along the slope:

$$a_2 = g\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

0.5

The time obeys

$$\sqrt{r^2+h^2} = \frac{1}{2}a_2\left(\frac{T_2}{4}\right)^2.$$

0.5

We therefore find

$$T_2 = 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{gh}}.$$

The time fraction is thus

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T_2} &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}}\\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{H}{R}\right)^2}}.\end{aligned}$$

As we see, only the slope (the fraction $\frac{h}{r}$) plays a role, not the actual values of h and r, we can therefore replace them by H and R.
Inverting for H we find

$$H = R\sqrt{\frac{\pi^2}{8\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} - 1}.$$

1

Numerically,

$$H \approx 2.038\,\mathrm{m}.$$

SOLUTION

0.5

Alternativlösung: ***(4)***

We can use the angle $\alpha = \arctan(H/R)$*:*

For the circular motion, we get

$$a_1 = \omega^2 r,$$

where

$$\omega = \frac{2\pi}{T_1}$$

(0.5)

and

$$a_1 = g\tan(\alpha)\,,$$

(0.25)

which gives

$$g\tan(\alpha) = r\frac{4\pi^2}{T_1^2}$$

and solving for r*:*

$$r = g\tan(\alpha)\,\frac{T_1^2}{4\pi^2}.$$

(0.5)

For the linear motion, we again (as in the other solution) use only the first quarter. Since the acceleration is constant, we can use

$$x = \frac{1}{2}a_2 t^2,$$

(0.25)

where

$$x = \frac{r}{\cos(\alpha)},$$

$$a_2 = g\sin(\alpha)\,,$$

$$t = \frac{T_2}{4}.$$

(0.5)

This gives

$$\frac{r}{\cos(\alpha)} = g\sin(\alpha)\,\frac{T_2^2}{32}$$

and solving again for r*:*

$$r = \cos(\alpha)\,g\sin(\alpha)\,\frac{T_2^2}{32}.$$

(0.5)

Putting the two equations for r *together, we get:*

$$g\tan(\alpha)\,\frac{T_1^2}{4\pi^2} = \cos(\alpha)\,g\sin(\alpha)\,\frac{T_2^2}{32}.$$

SOLUTION

Solving for $\cos(\alpha)$*:*

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{T_1}{T_2}.$$

Finally, we use $H = R\tan(\alpha)$ *to obtain*

$$H = R\tan\left(\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{T_1}{T_2}\right)\right).$$

(1)

Numerically,

$$H \approx 2.038\,\mathrm{m}.$$

(0.5)

SOLUTION