

Quanten-Elektrodynamik

Auf vier Schwierigkeitsstufen

Luc Schnell

November 2020

Vorwort

In der Folge werde ich mich daran versuchen, eine interessante Theorie aus der modernen Physik auf vier unterschiedlichen Komplexitätsstufen zu erklären. Die erste Stufe sollte für jede und jeden verständlich sein und also nur allgemeines Wissen voraussetzen. Damit möchte ich aufzeigen, dass man auch ohne komplizierte Formeln interessante Konzepte erklären kann. Die zweite Stufe setzt dann Grundkenntnisse in der Physik und Mathematik voraus, wie sie etwa von Teilnehmenden der Physikolympiade erwartet werden. Die dritte Stufe baut auf Konzepten auf, die im Bachelorstudium der Physik erarbeitet werden. Dies soll jüngeren Lesenden einen Eindruck geben, wie ein Physikstudium aussieht. Auf der letzten Stufe versuche ich schliesslich, mit dem Wissen, das ich aktuell habe, den vollen Umfang der Theorie zu skizzieren.

Damit ist die Serie natürlich in keinster Weise abgeschlossen. Personen mit mehr Wissen und Erfahrung als ich könnten sie ohne Zweifel fortführen. Aber das zeigt ja gerade die Schönheit der Physik auf: egal auf welcher Stufe man sich befindet, kann man immer noch neue spannende Konzepte entdecken.

Das hier gezeigte stufenweise Herangehen an eine Theorie soll Schülerinnen und Schülern Konzepte der modernen Physik vermitteln und ihnen aufzeigen, woran Physikerinnen und Physiker heutzutage arbeiten. Dabei sollen sie nicht von der vollen Komplexität der Thematik erschlagen werden. Ob mir das damit gelungen ist, sei dahin gestellt. Ich möchte aber lesende Lehrpersonen oder auch Schülerinnen und Schüler dazu ermutigen, es mir gleich zu tun und selbst ein spannendes Thema an andere auf vier unterschiedlichen Stufen zu erklären. Man lernt nämlich auch selbst sehr viel dabei, wie ich festgestellt habe.

Nun aber genug der Vorrede, ich wünsche viel Spass mit der Quanten-Elektrodynamik auf vier Schwierigkeitsstufen.

Erste Stufe: das Photon

Die Elektrizität und der Magnetismus sind zwei Phänomene, welche die Menschheit schon seit sehr langem faszinieren. Heute sind sie sehr gut verstanden und sind aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken: jedes Mobiltelefon hat elektrische Schaltkreise in sich und kommuniziert über elektromagnetische Signale, der Zug wird mit einem Elektromotor betrieben und Geräte mit starken Magneten machen im Spital Bilder von unseren Geweben.

Maxwell geht ein Licht auf

Theorien über die Natur des Lichts gibt es schon so lange, wie es die Physik gibt. Isaac Newton (wer sonst?) lieferte einen ersten Erklärungsversuch: seine Korpuskeltheorie. Laut ihm besteht Licht aus kleinen Teilchen, was erklärt weshalb sich Licht in unserem Alltag gradlinig ausbreitet. Wie kleine Kanonenkugeln schiessen die Lichtteilchen durch den Raum. Diese Theorie wurde aber im 19. Jahrhundert durch die Wellentheorie des schottischen Physikers James Maxwell abgelöst, ein Grundpfeiler unseres heutigen Verständnis der Elektrizität und des Magnetismus. Maxwell schrieb vier Formeln nieder, welche alle Phänomene der Elektrizität und des Magnetismus beschreiben. Sie zeigen, dass die Elektrizität und der Magnetismus im Grunde sehr ähnlich sind, weshalb sie seither unter dem Begriff *Elektromagnetismus* zusammengefasst werden.

Aus seinen Formeln konnte Maxwell herleiten, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Das war revolutionär. Das Licht, für uns Menschen von so riesiger Bedeutung, ist nichts anderes als eine sich ausbreitende Störung, die Ladungen und Magnete in Schwingung versetzen kann. Maxwells Theorie war ein riesiger Erfolg und wurde von vielen Experimenten bestätigt.

Einsteins zweiter Streich

Mehr als hundert Jahre vergingen, bis schliesslich ein Patentamt-Angestellter in Bern in seiner Freizeit nichts besseres zu tun hatte, als die gesamte Physik über den Haufen zu werfen. In einem Jahr. Die Rede ist natürlich von Albert Einstein. In seinem berühmten Wunderjahr 1905 veröffentlichte er nicht nur seine Spezielle Relativitätstheorie, sondern lieferte auch eine Erklärung zum sogenannten Photoelektrischen Effekt. Die Relativitätstheorie ist heute weltbekannt und auch in Bezug auf den Elektromagnetismus spannend, da sie zeigte, dass die Elektrizität und der Magnetismus im Grunde ein und derselbe Effekt sind. Einfach sozusagen aus anderen Blickwinkeln. Dieses Kapitel möchte ich aber hier nicht auf tun und mich stattdessen auf sein weniger bekanntes zweites Meisterwerk fokussieren – die Erklärung des Photoelektrischen Effekts. Diese begründete den Anfang der Quantenmechanik und sie war es, die Einstein 1921 den Nobelpreis einbrachte. Was hatte es damit auf sich?

Der Photoelektrische Effekt

Wenn man eine negativ geladene Metallplatte mit Licht bestrahlt, so beginnt sich diese langsam zu entladen. Bei einer positiv geladenen Metallplatte ist dies nicht zu beobachten. Der Grund dafür ist schnell erklärt: das Licht kann den negativ geladenen Elektronen im Metall genügend Energie geben, um sich vom Metall loszumachen und wegzufiegen. Bei einer negativ geladenen Metallplatte stösst das Licht Elektronen weg, die Platte entlädt sich langsam. Bei einer positiv geladenen Platte fehlen Elektronen und das Licht kann höchstens noch die vorhandenen Elektronen wegstossen, aber nicht die fehlenden ersetzen. Deshalb findet bei einer positiv geladenen Metallplatte keine Entladung statt.

Richtig spannend wird es, wenn man bei gleichbleibender Lichtstärke die Farbe des Lichts verändert. Also beispielsweise von einer blauen Lampe zu einer roten wechselt. Nach Maxwells Theorie sollte sich dabei nichts verändern, laut seiner Wellentheorie hängt nämlich die Energie einer Welle nur von der Stärke (Amplitude) des Lichtes ab. Unabhängig von der Farbe sollte Licht bei gleicher Stärke also gleich viele Elektronen aus dem Metall stossen. In Experimenten mass man aber etwas anderes. Wenn man von blau immer mehr in Richtung rot wechselt, so stoppt die Entladung der Platte irgendwann.

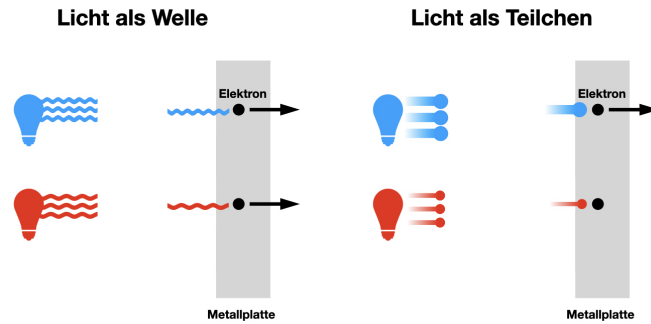


Abb. 1: Grafische Darstellung des Photoelektrischen Effekts. Nach Maxwells Wellentheorie (links) sollte die Farbe des Lichts beim Herauslösen von Elektronen keine Rolle spielen, nur die Lichtstärke (Amplitude der Welle) ist relevant. Bei Einsteins Teilchentheorie (rechts) kommt es sehr wohl auf die Farbe und damit die Energie pro Lichtteilchen an.

Das Licht hat also plötzlich nicht mehr genügend Energie, um Elektronen aus der Platte zu stossen. Wie kann das sein?

Das Licht als Teilchen

Einstein hatte die Antwort parat: das Licht ist nicht eine Welle, sondern besteht aus einzelnen Lichtteilchen. Heute werden diese Teilchen Lichtquanten oder Photonen genannt. Die Farbe des Lichts bestimmt die Energie pro Photon. Dies kann mit der einfachen Formel

$$E = hf \quad (1)$$

ausgedrückt werden, wobei h eine Konstante ist und f die Frequenz (Farbe) des Lichtteilchens. Je höher die Frequenz (je blauer die Farbe des Lichtteilchens), desto höher ist seine Energie. Die Stärke des Lichts dagegen wird über die Anzahl der Photonen bestimmt. Wenn man also die Stärke des Lichts gleich belässt und bloss seine Farbe ändert, so trifft zwar immer noch die gleiche Anzahl an Photonen auf die Metallplatte, aber jedes einzelne Photon hat weniger Energie. Irgendwann reicht diese nicht mehr aus, um ein Elektron aus dem Metall zu stossen.

Diese Erklärung warf alles über den Haufen, hatte man doch über ein Jahrhundert lang geglaubt, Licht sei eine Welle. Aber der Photoelektrische Effekt liess sich nicht wegdiskutieren und Einsteins Erklärung machte Sinn. Deshalb musste eine neue Theorie der elektromagnetischen Interaktionen auf kleinen Längenskalen her. Eine solche lieferte die Quantenmechanik, später zur Quanten-Elektrodynamik erweitert. Letztere ist unsere aktuell beste Theorie, die alle bekannten elektromagnetischen Phänomene korrekt beschreibt. Sie kombiniert die Quantenmechanik mit Einsteins Spezieller Relativitätstheorie. Das Kernstück der Quanten-Elektrodynamik ist das Photon. Es ist sozusagen der Bote aller elektromagnetischen Wechselwirkungen. Mehr dazu in den folgenden Kapiteln.

Zweite Stufe: Von Teilchen zu Wellen zu ... beidem?

Laut dem ersten Kapitel besitzt Licht sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter. Ist das nicht ein Widerspruch? Wie kann etwas ein Teilchen und gleichzeitig eine Welle sein?

Die Antwort auf diese Frage liefert die Quantenmechanik, genauer die Quanten-Elektrodynamik. Um sie zu verstehen müssen wir noch einmal bei Newtons Korpuskeltheorie anfangen und sie mithilfe von Maxwells Wellentheorie neu interpretieren. Dann werden wir den Sprung in die Tiefen der Quantenmechanik wagen.

Gebrochene Strahlen

Basierend auf unseren Alltagserfahrungen liegt es nahe, Licht als ein Teilchen zu beschreiben. Wir sind es uns gewöhnt, dass sich Licht gradlinig ausbreitet. Das kann man im Kino gut beobachten: wenn direkt vor uns eine grosse Person sitzt, können wir zwar den Ton des Films weiterhin gut wahrnehmen (Schallwellen können in unseren Alltagsdimensionen "um die Ecke" fliegen), wir sehen das Bild aber nicht mehr. Der Schluss liegt nahe, dass sich Licht in Form von kleinen Lichtteilchen (Korpuskeln) ausbreitet, die wie Kanonenkugeln durch den Raum schiessen.

Diese Theorie kommt allerdings an ihre Grenzen, wenn wir uns einen Strohhalm in einem Wasserglas anschauen. Es sieht so aus, als hätte dieser beim Übergang vom Wasser zur Luft einen Knick. Das Stichwort hier ist Brechung – beim Übergang von einem Material zu einem anderen mit einer unterschiedlichen optischen Dichte werden Lichtstrahlen geknickt. Wollen wir an der Theorie der Lichtkorpuskeln festhalten, so müssen wir irgendwie erklären können, weshalb Lichtteilchen nicht gerade durch einen Materialübergang fliegen, sondern ihre Ausbreitungsrichtung ändern.

Das Fermat'sche Prinzip mit Lichtteilchen

Eine mögliche Antwort dazu liefert das Fermat'sche Prinzip. Es besagt, dass sich Lichtteilchen stets so zwischen zwei Punkten bewegen, dass die dafür benötigte Zeit minimal¹ ist. Das Prinzip lässt sich am besten anhand eines Beispiels erklären: Wir betrachten einen Lichtstrahl, der sich von einem Startpunkt (x_S, y_S) in einem Medium mit optischer Dichte n_0 zu einem Zielpunkt (x_Z, y_Z) in einem Medium mit optischer Dichte n_1 bewegt (siehe Abb. 2a).

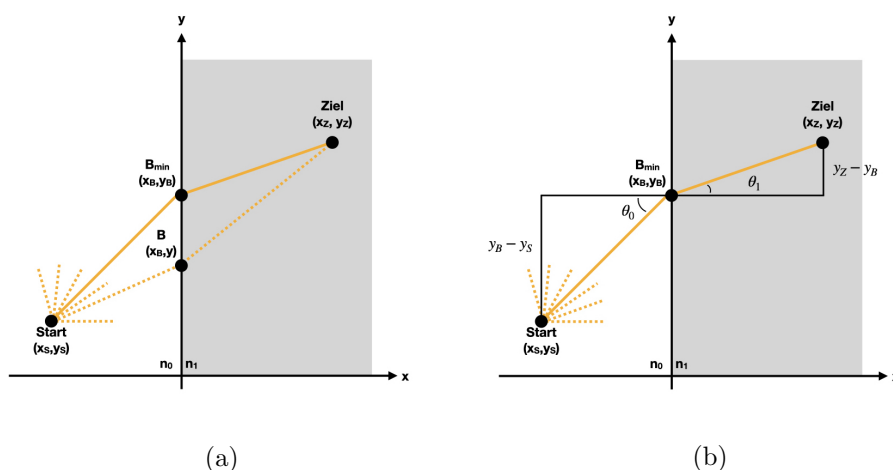


Abb. 2: Grafische Darstellung für das Beispiel des Fermat'schen Prinzips. Ein Lichtstrahl (Lichtkorpuskel) bewegt sich vom Punkt S (Start) zum Punkt Z (Ziel). Dabei passiert es den Materialübergang im Punkt B , wo es seine Fortbewegungsrichtung ändert.

¹streng genommen "extremal", mehr dazu später

Wir wollen nun herausfinden, wie der Lichtstrahl geknickt wird (bzw. wie die Lichtkorpuskel ihre Fortbewegungsrichtung ändern). Innerhalb der Materialien n_0, n_1 wird die Ausbreitung als gradlinig angenommen, wie wir das von unserer Alltagserfahrung kennen. Die y -Koordinate y_B des Punktes B_{\min} (die x -Koordinate nehmen wir als x_B an) lässt sich leicht mithilfe des Fermat'schen Prinzips finden: wir müssen nur denjenigen Punkt wählen, für welchen die benötigte Zeit von S (Start) zu Z (Ziel) minimal wird. In den jeweiligen Materialien hat das Korpuskel die Geschwindigkeit

$$v_i = \frac{c}{n_i}, \quad (2)$$

dabei ist $i \in \{0, 1\}$ und c die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum. Also benötigt das Licht insgesamt die Zeit

$$T(y) = \frac{\overline{SB}(y)}{v_0} + \frac{\overline{BZ}(y)}{v_1} = \frac{n_0}{c} \sqrt{(x_B - x_S)^2 + (y - y_S)^2} + \frac{n_1}{c} \sqrt{(x_Z - x_B)^2 + (y_Z - y)^2}. \quad (3)$$

Wir können nun das Minimum finden, indem wir die erste Ableitung von T in Bezug auf die y -Koordinate des Punktes B , $\frac{dT(y=y_B)}{dy}$, gleich Null setzen. Wir finden

$$\frac{dT(y=y_B)}{dy} = \frac{n_0}{c} \frac{2(y_B - y_S)}{2\sqrt{(x_B - x_S)^2 + (y_B - y_S)^2}} - \frac{n_1}{c} \frac{2(y_Z - y_B)}{2\sqrt{(x_Z - x_B)^2 + (y_Z - y_B)^2}} \stackrel{!}{=} 0, \quad (4)$$

was schliesslich zu

$$\frac{n_0(y_B - y_S)}{\sqrt{(x_B - x_S)^2 + (y_B - y_S)^2}} = \frac{n_1(y_Z - y_B)}{\sqrt{(x_Z - x_B)^2 + (y_Z - y_B)^2}} \quad (5)$$

führt. Diese Ausdrücke sehen auf den ersten Blick kompliziert aus, beschreiben aber nichts weiter als die Verhältnisse der Dreiecks-Seitenlängen, die in Abb. 2b gezeigt sind. Wir finden

$$\frac{n_0(y_B - y_S)}{\sqrt{(x_B - x_S)^2 + (y_B - y_S)^2}} = \frac{n_0(y_B - y_S)}{\overline{SB}_{\min}} = n_0 \sin \theta_0 \quad (6)$$

und

$$\frac{n_1(y_Z - y_B)}{\sqrt{(x_Z - x_B)^2 + (y_Z - y_B)^2}} = \frac{n_1(y_Z - y_B)}{\overline{B_{\min}Z}} = n_1 \sin \theta_1, \quad (7)$$

also insgesamt

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1. \quad (8)$$

Dieses Ergebnis ist seit dem 17. Jahrhundert² als das Snell'sche Gesetz bekannt. Es beschreibt, wie Lichtstrahlen beim Übergang von einem Material in ein anderes gebrochen werden. Zu dessen Herleitung mussten wir nur annehmen, dass Lichtkorpuskel stets den Weg wählen, der ihre Reisezeit minimiert. Schon ist die Korpuskeltheorie gerettet: das Licht besteht aus kleinen, reisezeitminimierenden Kanonenkugeln. Einfach, danke, nächstes Problem. Nicht?

Nun ja, das Fermat'sche Prinzip ist zwar schön und gut, aber zufriedenstellend ist es nicht wirklich. Wie in Newtons Namen können denn die Lichtteilchen wissen, welcher Weg am wenigsten Zeit benötigt? Das klingt fast so, als würden wir ihnen ein Bewusstsein zusprechen. Schauen sie vorher auf einer Karte nach?

²in Europa, den Persern war es seit dem 10. Jahrhundert bekannt.

Das Fermat'sche Prinzip mit Lichtwellen

Natürlich nicht. Wie Maxwell im 19. Jahrhundert gezeigt hat, ist Licht nämlich nicht ein Teilchen, sondern eine Welle. Das Fermat'sche Prinzip ist eine direkte Konsequenz davon. Die Lichtquelle im Punkt S (Start) sendet nicht einzelne Lichtteilchen in eine bestimmte Richtung aus, sondern eine Lichtwelle in alle Richtungen (in Abb. 3 angedeutet). Im Grunde müsste ein Beobachter im Punkt Z (Ziel) also auch Lichtwellen wahrnehmen können, die einen (zeitlich längeren) Weg über $B \neq B_{\min}$ genommen haben. Dies können wir aber im Alltag nicht beobachten, sonst wäre die grössere Person im Kino vor uns ja kein Problem. Wieso ist das so?

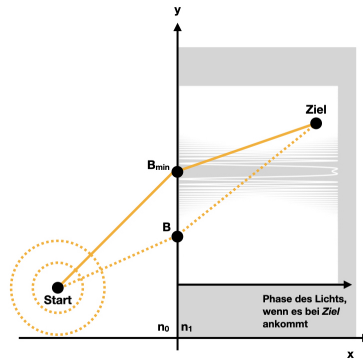


Abb. 3: Begründung des Fermat'schen Prinzips über Lichtwellen mit kleiner Wellenlänge.

Das liegt an der Interferenz von Lichtwellen. Falls die Wellentäler einer Lichtwelle auf die Wellenberge einer anderen Lichtwelle treffen, Physiker*innen sprechen dann von einer Phasendifferenz π , so heben sich die beiden Wellen gegenseitig auf. Genau das geschieht für Lichtwellen, die nicht durch den optimalen Punkt B_{\min} gehen. Da die Wellenlänge des Lichtes viel kleiner als die Längendimensionen in unserem Alltag ist, ändert sich die im Punkt Z empfangene Phase des Lichts sehr schnell, wenn man den Punkt B entlang der y -Achse verschiebt. In einer Formel ausgedrückt ist die im Punkt Z empfangene Phase

$$\sin(2\pi f \cdot T(y)) = \sin\left(2\pi \frac{T(y)}{T_0}\right). \quad (9)$$

Dabei sind f die Frequenz und T_0 die Periodendauer des Lichts in Vakuum. Der Ausdruck für $T(y)$ steht in (3). Die Phase oszilliert sehr schnell, da im Allgemeinen die Änderung $T(y) - T(y')$ für $y - y'$ in Alltagsdimensionen (z.B. Millimeter) viel grösser als T_0 ist. Dies ist in Abb. 3 in weiss angedeutet. Die Beiträge der Lichtwellen, welche durch unterschiedliche Punkte B gereist sind, haben willkürlich unterschiedliche Phasen. In der Summe heben sie sich gegenseitig auf. Kommen wir aber auf der y -Achse näher zum Punkt B_{\min} , so beginnt sich $T(y)$ mit y langsamer zu ändern. Dies ist in Abb. 3 gut zu sehen. Dies liegt daran, dass der Weg durch B_{\min} *extremal* ist, sich also die Phase (Reisezeit) für kleine Abweichungen $y + dy$ nicht ändert. Genau so hatten wir den Punkt B_{\min} in (4) ja bestimmt. Wellen, die durch Punkte B sehr nahe an B_{\min} gereist sind, haben in Z ähnliche Phasen. Dadurch interferieren sie positiv und bleiben bestehen.

Das Licht wählt also nicht den schnellsten Weg, sondern denjenigen, bei dem sich die Reisezeit bei kleinen Weg-Abweichungen am wenigsten verändert. Physiker*innen sprechen vom Weg, für den die Reisezeit extremal wird. In vielen Alltagssituationen handelt es sich bei der Extremalstelle um ein Minimum, dann gilt die ursprünglich genannte Version des Fermat'schen Prinzips. Der Umstand, dass Lichtstrahlen geknickt werden, lässt sich also auf eine natürliche Art und Weise über den Wellencharakter des Lichts begründen. Es gibt zahlreiche weitere Experimente, bei denen dies ebenfalls zutrifft. Wie konnte dann Albert Einstein im Jahre 1905 den Photoelektrischen Effekt (siehe erstes Kapitel) damit erklären, dass das Licht aus Teilchen besteht? Sind wir damit nicht wieder zurück auf Feld eins bei Newtons Korpuskeltheorie? Wie können die Teilchen wissen, welcher der extremale Weg ist?

Teilchen in der Quantenmechanik

Die Antwort gibt die Quantenmechanik. Unser Bild eines Teilchens, das wie eine Kanonenkugel geradlinig durch den Raum fliegt, ist in kleinen Dimensionen genauso falsch wie das Bild des geraden Lichtstrahls. Die deterministischen Regeln der Mechanik gelten in kleinen Dimensionen schlicht nicht mehr. Ein quantenmechanisches Teilchen kann sich in mehreren Zuständen gleichzeitig sein und wir können nur noch Wahrscheinlichkeiten angeben, wo es sich befindet. Diese werden durch die sogenannte Wellenfunktion $\Psi(x, y)$ beschrieben. Der Ausdruck

$$|\Psi(x, y)|^2 dx dy \quad (10)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit³ an, mit der sich ein Teilchen im Punkt (x, y) befindet. Erst wenn wir Positionsmessungen am Teilchen durchführen muss es sich für eine Position entscheiden, dies geschieht genau nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\Psi(x, y)|^2$. Die Wellenfunktion enthält daher alle Informationen, die wir über ein Teilchen haben können. Wir können sie bestimmen, indem wir alle möglichen Zustände eines Teilchens aufsummieren. Das lässt sich am besten anhand eines Beispiels erläutern.

Kommen wir also noch einmal auf das ursprüngliche Problem (Abb. 2a) zurück: welchen Weg wählt ein Lichtteilchen zwischen den Punkten S (Start) und Z (Ziel)? Um die Wellenfunktion $\Psi(x_Z, y_Z)$ im Punkt Z zu finden, müssen wir die Beiträge von allen möglichen Wegen aufsummieren, die das Teilchen nehmen kann. Dies entspricht den unterschiedlichen Zuständen. Eine vollständige quantenmechanische Herleitung⁴ ergibt, dass sich die Wellenfunktion freier Teilchen wie eine Welle verhält (daher der Name). Die Wellenfunktion des Weges über $B = (x_B, y)$ ist daher im Punkt Z

$$\Psi_y(x_Z, y_Z) \sim \sin\left(\frac{2\pi E}{h} \cdot T(y)\right). \quad (11)$$

Die Reisezeit $T(y)$ haben wir in (3) definiert, E ist die Energie des Teilchens und h das sogenannte Planck'sche Wirkungsquantum, die Konstante, die bereits in (1) aufgetaucht ist. In (1) hatten wir die Relation zwischen der Energie und der Frequenz eines Lichtteilchens niedergeschrieben. Das tritt hier wieder auf: die Wellenfunktion des Lichtteilchens schwingt mit der Frequenz $\frac{E}{h}$. Diese Formel sieht doch sehr ähnlich aus wie (9), nicht?

Genau darin liegt der Grund, dass Lichtteilchen sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter haben. Im Grunde sind es Teilchen. Diese verhalten sich aber nicht wie Kanonenkugeln aus der klassischen Physik, sondern befinden sich in mehreren Zuständen gleichzeitig, die sich gegenseitig beeinflussen. Eine quantenmechanische Herleitung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten im Raum die Form einer Welle annehmen. Summieren wir die Wahrscheinlichkeiten (Wellenfunktionen) mehrerer Zustände (Wege) auf, so gibt es wie bei klassischen Wellen Interferenzen. Die Zustände verstärken sich oder heben sich gegenseitig auf. Dadurch entsteht ein typisches Wellenmuster in der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Messen wir nur ein einziges Lichtteilchen, so ist dieses Muster nicht zu sehen. Das Teilchen befindet sich einfach entsprechend der Verteilung $|\Psi(x, y)|^2$ an einem Ort. Messen wir aber viele Teilchen (eine alltägliche Lichtquelle liefert Abertausende von ihnen), so verteilen sich die Teilchen anhand der unterliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das Wellenmuster wird sichtbar. Dies führt dazu, dass wir das Licht als eine Welle interpretierten.

In Alltagsdimensionen landen wir schliesslich wieder bei Newtons Kanonenkugelteilchen. Dann ist nämlich h klein und $\frac{E \cdot T(y)}{h}$ gross. Wie zuvor für die klassischen Wellen heben sich dann die Quantenzustände gegenseitig auf, die den nicht-extremalen Reisewegen über $B \neq B_{\min}$ entsprechen. Der einzig mögliche Zustand ist der extremale Weg, dieser entspricht den Vorhersagen der klassischen Physik.

³streng genommen die Wahrscheinlichkeitsdichte, sprich die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen in $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ befindet.

⁴für Interessierte: mithilfe der sogenannten Schrödingergleichung

Dritte Stufe: Maxwells Gesetze quantisiert

Maxwell sprach

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (12)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{B} - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \qquad (13)$$

und es wurde Licht. Wie genau wurde es Licht? Man nehme den Fall eines leeren Raumes ohne Ladungen an ($\rho = \vec{J} = 0$). Dann folgt über

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \qquad (14)$$

$$= -\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (15)$$

und

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{E}) = -\nabla \cdot (\nabla \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} \qquad (16)$$

die Gleichung

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad (17)$$

Dies ist eine dreidimensionale Wellengleichung für eine Störung, die sich mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ ausbreitet. Diese Geschwindigkeit ist erstaunlicherweise gleich der Geschwindigkeit des Lichts in Vakuum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \qquad (18)$$

Dies legt die Schlussfolgerung nahe, dass Licht nichts weiter als eine elektromagnetische Welle ist, die sich mit c ausbreitet. Allerdings wirft das die Frage auf, bezüglich welchem Bezugssystem c zu wählen ist. In der klassischen Physik lautet die Koordinatentransformation (Galilei-Transformation) von einem Bezugssystem zu einem anderen

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \\ t' = t + c \end{cases}, \qquad (19)$$

wobei $R \in O(3)$, $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Die Geschwindigkeit ist folglich abhängig vom Bezugssystem

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = R \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{v}, \qquad (20)$$

daher ist die Gleichung in (17) mit einer absoluten Geschwindigkeit c nicht Galilei-invariant. Die Maxwell-Gleichungen sind nicht mit der klassischen Mechanik vereinbar.

Diesen Misstand behob Albert Einstein 1905 mit seiner Speziellen Relativitätstheorie. Er postulierte, dass die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum c die höchste erreichbare Geschwindigkeit ist und für alle Bezugssysteme gleich sein muss. Das ist nur möglich, wenn die Konzepte Raum und Zeit zu einem Ganzen verschmelzen, der Raumzeit. Ereignisse in der vierdimensionalen Raumzeit werden über Vektoren mit vier Komponenten beschrieben

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Die dazugehörige Koordinatentransformation (Lorentz-Transformation) vermischt die Zeit- und Raumkomponenten

$$x'^\mu = \Lambda x^\mu + a^\mu, \quad (22)$$

wobei $\Lambda \in O(3, 1)$ und $a^\mu \in \mathbb{R}^{3+1}$. Allgemeine physikalische Grössen, die von der Raumzeit abhängen, lassen sich am besten durch Tensoren darstellen. Es handelt sich dabei um Darstellungen der Lorentzgruppe $O(3, 1)$. Meist genügt es zu wissen, wie sie sich unter Lorentz-Transformationen verhalten

$$s'(x') = s(x), \quad (23)$$

$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\alpha V^\alpha(x), \quad (24)$$

$$T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}(x). \quad (25)$$

Maxwells Gleichungen können kompakt mithilfe von Tensoren ausgedrückt werden. Die Ladungen ρ, \vec{J} werden zum Viererstrom

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix} \quad (26)$$

zusammengefasst. Die elektromagnetischen Felder dagegen transformieren tensoriell. Sie werden zum elektromagnetischen Feldtensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

kombiniert, wobei $E_i (B_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ die Komponenten des elektrischen (magnetischen) Feldes sind. Die Maxwellgleichungen lauten dann

$$(dF)_{\mu\nu\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\rho} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\rho\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\rho} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} J^\nu. \quad (29)$$

Die Gleichung (28) entspricht den zwei Gleichungen in (12), analog entspricht (29) den Gleichungen in (13). Dies können wir kontrollieren, indem wir in (28) und (29) Indizes einsetzen

$$(dF)_{123} \equiv \frac{\partial}{\partial x^3} F_{12} + \frac{\partial}{\partial x^2} F_{31} + \frac{\partial}{\partial x^1} F_{23} = -\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{vergl. (12) links})$$

$$(dF)_{012} \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} F_{01} + \frac{\partial}{\partial x^1} F_{20} + \frac{\partial}{\partial x^0} F_{12} = -(\nabla \times \vec{E})_3 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_3 = 0 \quad (\text{vergl. (12) rechts})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 0} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c} J^0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{vergl. (13) links})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^1 + (\nabla \times \vec{B})^1 = \frac{1}{\epsilon_0 c} J^1 \quad (\text{vergl. (13) rechts})$$

Wir konnten folglich die vier Maxwellgleichungen auf zwei tensorielle Gleichungen reduzieren. Aber es geht noch besser. Die Gleichung (28) sagt aus, dass $F_{\mu\nu}$ geschlossen ist, da $dF = 0$. Daraus folgt hier, dass F auch exakt sein muss. Exaktheit bedeutet, dass $F_{\mu\nu}$ mithilfe eines Vektorfeldes A_μ beschrieben werden kann, so dass

$$F_{\mu\nu} = (dA)_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu. \quad (30)$$

Dieses A_μ ist nichts weiter als ein Vierervektor, der die elektromagnetischen Potentiale enthält

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ -\vec{A} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

wobei Φ das elektrische Potential und \vec{A} das Vektorpotential des Magnetismus ist. Verwenden wir A_μ anstatt $F_{\mu\nu}$ als das fundamentale Feld des Elektromagnetismus, dann kriegen wir die Gleichung (28) "geschenkt". Es folgt nämlich

$$\begin{aligned} (dF)_{\mu\nu\rho} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\rho} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\rho\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\rho} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu \right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} A_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\rho \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\rho - \frac{\partial}{\partial x^\rho} A_\nu \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Maxwellgleichungen können deshalb auf eine einzige Gleichung reduziert werden. Diese folgt aus (29) und lautet

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c} J^\nu. \quad (32)$$

Wir haben nun schon viel erreicht. Die vier Maxwell-Gleichungen in (12), (13) konnten wir auf eine einzige Gleichung für das Viererpotential A_μ reduzieren, die alle Informationen enthält⁵. In der klassischen Physik folgt jedes elektromagnetische Phänomen (und es gibt viele davon, wie auf der ersten Stufe erläutert) aus der Gleichung (32). Aber noch sind wir nicht ganz am Ziel. Bisher haben wir nämlich die Quantenmechanik ausser Acht gelassen. Auf kleinen Längen- und Energiedimensionen verhalten sich die elektromagnetischen Felder nicht mehr wie kontinuierliche Funktionen, sondern bestehen aus einzelnen Feldquanten. Um diese Effekte einbeziehen zu können müssen wir analog wie in der nicht-relativistischen Quantenmechanik die Felder als Operatoren beschreiben. Dazu betrachten wir erst einmal die einzelnen Frequenzkomponenten des Viererpotentials A^μ

$$A_\mu(x) = \int \frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3 e(k)} \left(e^{ix_\nu k^\nu} a_\mu(k) + e^{-ix_\nu k^\nu} a_\mu^*(k) \right). \quad (33)$$

Der Koeffizient $a_\mu(k)$ beschreibt, wie stark der Anteil des Viererpotentials mit dem Wellenvektor k_μ ausgeprägt ist. Die Funktion $e(k)$ beschreibt die Energie eines Feldquants mit dem Wellenvektor k_μ . Wir können nun aus dem Viererpotential A_μ den quantenmechanischen Operator \hat{A}_μ definieren, indem wir a_μ^*, a_μ zu Operatoren $\hat{a}_\mu^\dagger, \hat{a}_\mu$ befördern. Es handelt sich dabei um Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

⁵Mithilfe der Eichfreiheit könnte man sie natürlich noch vereinfachen. Auf diesen Punkt möchte ich aber hier nicht weiter eingehen.

Mithilfe von $\hat{a}_\mu^\dagger(k), \hat{a}_\mu(k)$ können wir nun einzelne Feldquanten mit dem Wellenvektor k_μ erzeugen oder vernichten. So beschreibt beispielsweise

$$|k_\mu\rangle = \hat{a}_\mu^\dagger(k) |0\rangle \quad (34)$$

ein Feldquantum der Energie $e(k)$. Dieses wurde von $\hat{a}_\mu^\dagger(k)$ aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ erzeugt. Umgekehrt vernichtet $\hat{a}_\mu(k)$ dieses wieder

$$\hat{a}_\mu(k) |k_\mu\rangle = |0\rangle . \quad (35)$$

Diese erzeugten Feldquanten sind nichts anderes als Lichtteilchen, die Photonen, die auf der ersten Stufe eingeführt wurden. Die ganze Theorie des Elektromagnetismus geht also auf eine einzige Gleichung für das Viererpotential zurück, das in der Quantenmechanik als ein Operator beschrieben werden kann. Die Frequenz-Komponenten dieses Operators erzeugen und vernichten einzelne Feldquanten, die Photonen. Damit konnten wir die Theorie der Photonen mit Formeln greifbar machen. Faszinierend, nicht?

Vierte Stufe: Die Quantenelektronik als $U(1)$ -Eichtheorie

Wir betrachten zu Beginn ein freies Spinorfeld mit der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi. \quad (36)$$

Wir nehmen nun an, dass die lokale Redefinition der komplexen Phasen des Feldes ψ

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad (37)$$

eine Symmetrie der Lagrange-Funktion darstellt. Dies wird eine lokale $U(1)$ -Symmetrie genannt. Dazu müssen wir allerdings die Lagrange-Funktion in (36) anpassen, da

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi(x)) = e^{i\alpha(x)} (i\partial_\mu \alpha + \partial_\mu) \psi(x) \neq e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x)$$

nicht invariant ist. Dies kann erreicht werden, indem ein Vektorfeld A_μ eingeführt und die normale Ableitung ∂_μ durch die sogenannte kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (38)$$

ersetzt wird. Es wird angenommen, dass das Vektorfeld A_μ unter der lokalen Redefinition der komplexen Phasen des Feldes ψ wie folgt transformiert

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\ A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \end{cases}. \quad (39)$$

Unter Berücksichtigung des kinetischen Terms für A_μ lautet die Lagrange-Funktion dann

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu + m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (40)$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dieser Ausdruck ist nun invariant unter der Redefinition in (39), da

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)} \\ D_\mu \psi(x) &\rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu \alpha) e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha + ieA_\mu - i\partial_\mu \alpha) \psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

und folglich

$$\bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu + m) \psi \rightarrow \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu + m) \psi.$$

Auch der Tensor $F_{\mu\nu}$ ist invariant, da

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu (A_\nu - \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \underbrace{\frac{1}{e} \partial_\mu \partial_\nu \alpha + \frac{1}{e} \partial_\nu \partial_\mu \alpha}_{=0} = F_{\mu\nu}. \quad (41)$$

Eine zentrale Rolle in der Theorie der Quanten-Elektrodynamik spielt der Interaktionsterm in der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} \supset i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi = i\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \underbrace{ie\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu}_{\text{Interaktionsterm}}. \quad (42)$$

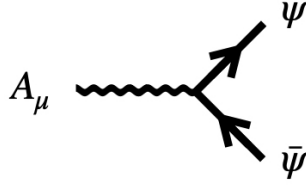


Abb. 4: Interaktionsterm aus der Quanten-Elektrodynamik. Das elektromagnetische Feld A_μ interagiert mit einem geladenen Teilchen ψ . Durch solche Interaktionen werden elektromagnetische Kräfte ausgeübt.

Er kann mithilfe eines Feynman-Diagramms dargestellt werden, das auf der Abbildung 4 zu sehen ist. Das elektromagnetische Feld A_μ interagiert mit dem geladenen Teilchen ψ . Dabei hat diese Wechselwirkung die Stärke e , was der Ladung des Teilchens entspricht. Die gesamten Auswirkungen solcher Wechselwirkungen können über die Partitionsfunktion

$$W[\eta_\mu, \bar{\eta}_\mu, Z_\mu] = N \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu e^{\frac{i}{\hbar} \int dx^4 (\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \int dx^4 (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + Z_\mu A^\mu)} \quad (43)$$

berechnet werden. Im klassischen Limit $\hbar \rightarrow 0$ trägt nur die extremale Feldkonfiguration zur Partitionsfunktion bei, analog zum klassischen Limit der nicht-relativistischen Quantenmechanik, der auf Stufe 2 diskutiert wurde. Dann erfüllt das elektromagnetische Feld die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0, \quad (44)$$

woraus die auf Stufe 3 hergeleitete Maxwell-Gleichung (32) folgt. Für ein nicht-vernachlässigbares \hbar enthält die Partitionsfunktion quantenmechanische Interaktionen, die mithilfe von Feynman-Diagrammen dargestellt werden können. Beispiele solcher Diagramme sind in der Abbildung 5 zu sehen.

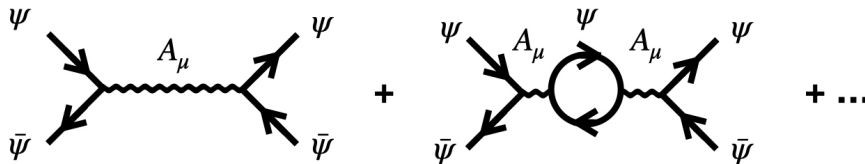


Abb. 5: Komplexere Interaktions-Diagramme aus der Quanten-Elektronik. Gewellte Linien entsprechen Photonen, die ausgetauscht werden. Der Grundbaustein dieser Diagramme ist der oben gezeigte Interaktionsterm.

Im linken Feynman-Diagramm interagieren zwei geladene Teilchen, indem sie ein Photon austauschen. Dies ist eine stereotypische elektromagnetische Interaktion. Das rechte Diagramm ist etwas komplexer. Es wird ein Photon ausgesendet, das sich spontan wieder in geladene Teilchen umwandelt, die in ein Photon zerfallen, welches schlussendlich von einem anderen geladenen Teilchen aufgenommen wird. Um quantenmechanische Interaktionen zu berechnen müssen viele solcher Diagramme berücksichtigt werden. Glücklicherweise werden die Beiträge der Diagramme aber immer kleiner, je komplizierter sie werden (bzw. je öfter der Interaktionsterm in Abbildung im Diagramm auftritt). Deshalb müssen in Berechnungen in der Praxis nur endlich viele Diagramme berücksichtigt werden, um hinreichend präzise Aussagen treffen zu können.

Damit wären wir bei der vollständigen Theorie der Quanten-Elektronik angelangt. Es gäbe natürlich noch viele weitere Punkte zu diskutieren (z.B. die Renormalisierung, die elektroschwache Vereinheitlichung, das Berechnen von Amplituden). Aber ich hoffe, dass die hier auf vier Schwierigkeitsstufen diskutierten Punkte der Theorie einen Einblick in die moderne Physik geben konnten und dass das Lesen Spass gemacht hat!

Literatur

- [1] Feynman, Richard P.: *The Feynman Lectures on Physics. Quantum Mechanics*. Online verfügbar. <https://www.feynmanlectures.caltech.edu>, zugegriffen am 23.1.2021.
- [2] Gaberdiel, Matthias R.: *Klassische Elektrodynamik*. Vorlesungsskript ETH Zürich. <https://people.phys.ethz.ch/~mrg/Lectures/ED.pdf>, zugegriffen am 23.1.2021.
- [3] Beisert, Niklas: *Quantum Field Theory I*. Vorlesungsskript ETH Zürich. <https://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/QFT1-19HS-Notes.pdf>, zugegriffen am 23.1.2021.
- [4] Isidori, Gino: *Quantum Field Theory II*. Vorlesungsskript UZH. <https://www.physik.uzh.ch/en/teaching/PHY552/FS2020.html>, zugegriffen am 23.1.2021.