Licht auf Abwegen

Im Alltag finden sich viele Beispiele, bei denen das Licht mit einem optischen System abgebildet wird. So projiziert zum Beispiel der Beamer ein Bild auf die Leinwand oder eine Kamera bildet eine schöne Blume auf den Sensorchip ab. Aber was steckt genau hinter einer scharfen Abbildung? Und wie können wir eine erzeugen? Diesen Fragen wollen wir mit einem etwas speziellen Ansatz auf den Grund gehen. Dabei werden wir grundlegende Fragen zur Ausbreitung des Lichtes diskutieren und erstaunliche Phänomene sehen.

Material:	Lupe[1] Lampe (am besten eine Glühbirne oder eine Kerze, eine Leuchtstoffröhre oder LED ist je nach je schwieriger scharf abzubilden.)

1 Einen Gegenstand abbilden

Einen Gegenstand scharf abzubilden tönt eher abstrakt und kompliziert. In der Praxis ist dies aber erstaunlich einfach: Dazu nehmen wir ein helles Objekt (am Besten eine Glühlampe bei der man die Glühfäden sieht oder eine Kerze) und platzieren dieses in einiger Entfernung vor einer weissen Wand. Zwischen die Wand und die Lampe halten wir eine Lupe, siehe auch Abbildung 1.

Aufgabe 1: Bilde eine Kerze oder eine Glühbirne (oder eine ähnliche Lampe) auf einer weissen Fläche ab.
Um eine scharfe Abbildung zu erreichen, muss der Abstand zwischen der weissen Wand und der Lampe (oder der Kerze) genügend gross sein. Zudem sollte der Raum ziemlich dunkel sein, damit man die Abbildung gut erkennt. Platziere die Lupe zwischen die Lampe und die Wand und bewege sie zwischen der Wand und der Lampe hin und her, bis Du eine scharfe Abbildung erreicht hast. Findest Du auch noch eine zweite Position, welche das Objekt scharf abbildet?

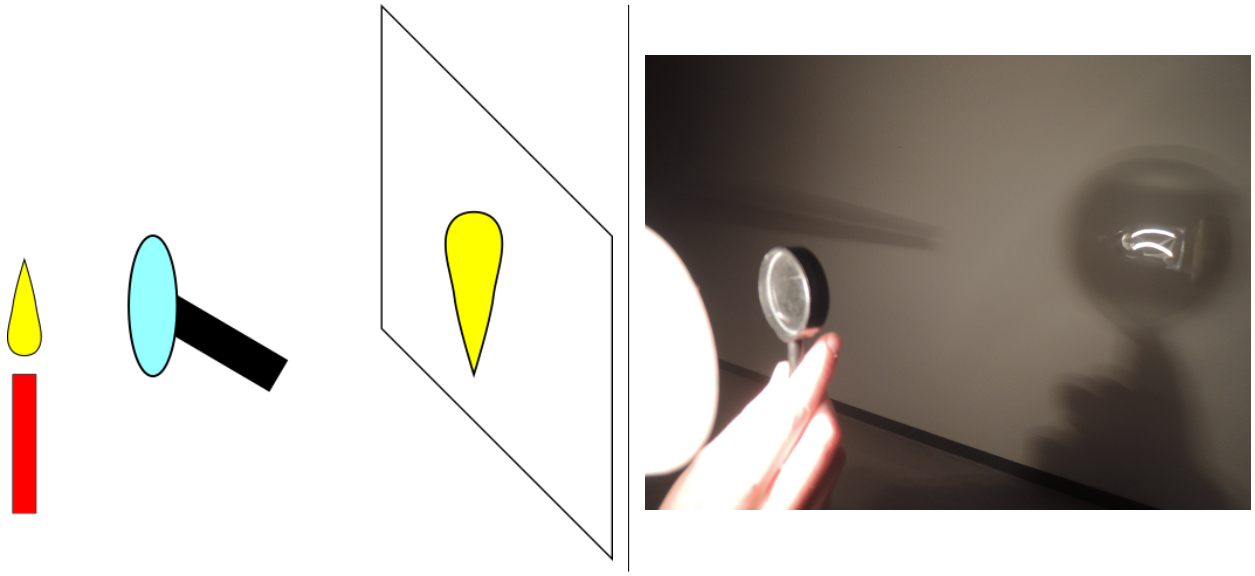


Abbildung 1: Links: Schematische Darstellung wie eine Abbildung erreicht werden kann. Rechts: Abbildung einer Lampe. Der weisse Fleck links ist der Lampenschirm, der zur Wand (nach rechts) gerichtet ist. Das Licht wird über zwei Glühfäden erzeugt, welche mit der Lupe auf die Wand abgebildet werden. Beim genauen Positionieren der Lupe kann man die Windungen der Glühfäden erkennen (auf dem Bild nicht erkennbar).

[1] Falls Du keine Lupe hast, lass Dich von Kapitel 5 inspirieren.

2 Der Strahlengang

Nachdem wir eine scharfe Abbildung erzeugt haben, stellt sich natürlich die Frage, was eine Abbildung ausmacht und weshalb es genau zwei Positionen gibt[2], welche ein Objekt scharf abbilden.
Um diese Frage zu beantworten, wollen wir zuerst eine andere Frage klären, nämlich welchen Weg das Licht wählt um, von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen. In der Luft ist dieser Weg eine Gerade. Im Allgemeinen ist dies etwas komplizierter[3]: Das Licht nimmt nämlich den Weg, für den es ein Minimum an Zeit braucht. In der Luft ist der schnellste Weg auch der kürzeste, eben die Gerade. Um ein Gefühl für dieses Gesetz zu bekommen, wollen wir zwei Beispiele anschauen: Zuerst den Spiegel und für Fortgeschrittener Physiker*Innen noch die Brechung von Licht an einer Glasfläche.

Aufgabe 2: Das Licht wird an einem Spiegel reflektiert. Zeige, dass die Bedingung des kürzesten Weges zur Folge hat, dass der Einfallswinkel gleich dem Ausfallwinkel ist.
Um dies zu zeigen, gibt es 2 Möglichkeiten, siehe auch Abbildung 2 links: Eine geometrische und eine analytische, wobei die analytische Kenntnisse der Ableitung voraussetzt. Für die geometrische spiegle die Lichtquelle L oder das Auge A und nutze die Bedingung (kürzester Weg). Für die analytische Rechnung nimm an, dass wir nicht wissen, an welchem Ort (P) auf dem Spiegel das Licht reflektiert wird. Was wir jedoch wissen: In der Luft bewegt sich das Licht auf einer Geraden. Nun berechnen wir die Länge des Weges als Funktion des Ortes auf dem Spiegel, an dem das Licht reflektiert wird und suchen die kürzeste Länge.

Herausforderung Aufgabe 2: Benutze die Tatsche, dass das Licht immer den schnellsten Weg wählt, um das Gesetz von Snellius herzuleiten.
Das Gesetz von Snellius besagt, dass wenn das Licht schräg von einem Medium mit Brechungsindex n_1 in ein anderes Medium mit Brechungsindex n_2 eintritt, einen Knick erfährt. Wenn das Licht unter dem Winkel α auf die Grenzschicht trifft und unter dem Winkel β in das zweite Medium eintritt, so gilt $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$. Gehe bei dieser Aufgabe vor wie bei Aufgabe 2 mit dem analytischen Ansatz, beachte aber, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit um den Brechungsindex n kleiner ist, also c/n_1 und c/n_2. Zudem lautet die Bedingung, dass das Licht den schnellsten Weg (in der Zeit) nimmt und nicht den kürzesten Weg (bei konstantem Brechungsindex n ist dies das gleiche, dies gilt jedoch nicht wenn n ändert).

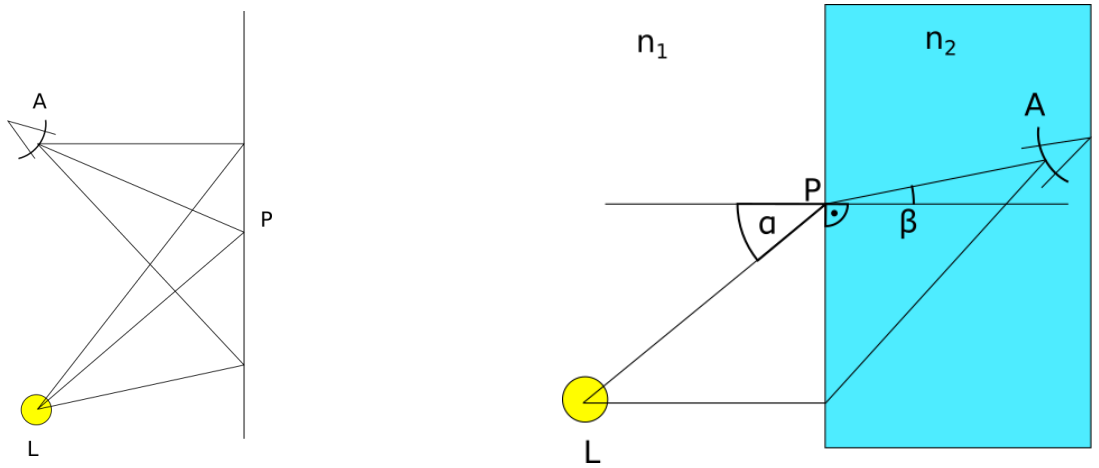


Abbildung 2: Links: Situation mit dem Spiegel (vertikale Linie). Das Licht wird von der Lichtquelle L ausgesendet und beim Auge A "gemessen". Eingezeichnet sind verschiedene mögliche Wege mit dem Ort der Reflektion P. Rechts die Brechung an einer Glasfläche. Auch hier ist von vornherein nicht klar, an welcher Stelle (P) das Licht in das Glas eintritt. Es sind zwei mögliche Wege eingezeichnet.

[2] Im Grenzfall können diese beiden Positionen auch zusammenfallen
[3] Dieses Gesetz nennt sich das Prinzip von Fermat, siehe auch A im Anhang.

3 Die Abbildung

Da wir nun verstehen wie sich Licht ausbreitet, können wir uns der scharfen Abbildung eines Gegenstandes widmen. Dazu wollen wir uns zuerst überlegen, was passiert, wenn wir keine Lupe benutzen. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir den Kerzenschein auf einer weissen Wand, siehe Abbildung 3 links. Von jedem Punkt der Flamme gehen Lichtstrahlen in alle Richtungen geradlinig weg. An jedem Punkt auf der Wand treffen sich dann die Strahlen von allen Orten der Flamme und überlagern sich zu einem hellen Schein. Deshalb sehen wir einfach eine helle Wand und keine Kontur der Flamme. Bei einer scharfen Abbildung hingegen sehen wir nicht einen verschwommenen hellen Schein, sondern die konkrete Form der Flamme. Das heisst jeder Punkt auf der Flamme wird auf genau einen Punkt auf der Wand projiziert: zu jedem Punkt auf der Wand gehört genau ein Punkt auf der Flamme und umgekehrt. Dies können wir erreichen, wenn wir eine Lupe verwenden und diese an den richtigen Ort zwischen Wand und Flamme stellen. Der Grund dafür ist, dass die Lupe eine spezielle Form hat: In der Mitte ist sie dicker als am Rand. Da sich das Licht im Glas langsamer bewegt als in der Luft braucht ein Lichtstrahl durch die Mitte etwas länger als wie wenn er durch den Rand der Lupe geht. Die Form des Glases wurde folgendermassen gebaut: Alle Lichtstrahlen, die auf die Mitte der Lupe treffen, gehen geradlinig hindurch[4]. Jedoch brauchen diese Strahlen auf diesem Weg etwas länger, da das Glas in der Mitte am dicksten ist. Ein Strahl, der auf den Rand der Lupe trifft bewegt sich weniger lang durch das Glas, kann also etwas Zeit aufholen. Dadurch brauchen alle Lichtstrahlen, die von einem Punkt auf der Flamme ausgesendet werden und auf die Lupe treffen, gleich lang wie der Strahl durch die Mitte, um den einen Abbildungspunkt auf der Wand zu treffen, siehe auch Abbildung 3 rechts. Die Zeit, die nun all diese Lichtstrahlen brauchen, um von einem Punkt der Flamme zu dem einen Punkt auf der Wand zu gelangen, ist minimal. Das heisst das Licht nimmt all diese Wege, da alle gleich kurz sind. Da nun alle Strahlen, die von einem Punkt auf der Flamme ausgehen bereits auf den einen Bildpunkt abgebildet werden, erreichen sie auch keine andere Stelle auf der Wand und überlagern sich also auch mit keinen anderen Strahlen von anderen Orten der Flamme zu unscharfen Konturen.
Was nun abstrakt und vielleicht auch wenig intuitiv tönt, kann mit einem Experiment gezeigt werden:

Aufgabe 3: Erzeuge mit der Lupe wieder eine Abbildung eines hellen Objektes (Kerze oder Lampe). Bedecke nun mit einem Blatt Papier oder einem Finger einen Teil der Lupe. Bewege die Abdeckung (Papier/Finger) auf die Abbildung zu, beobachte und interpretiere.

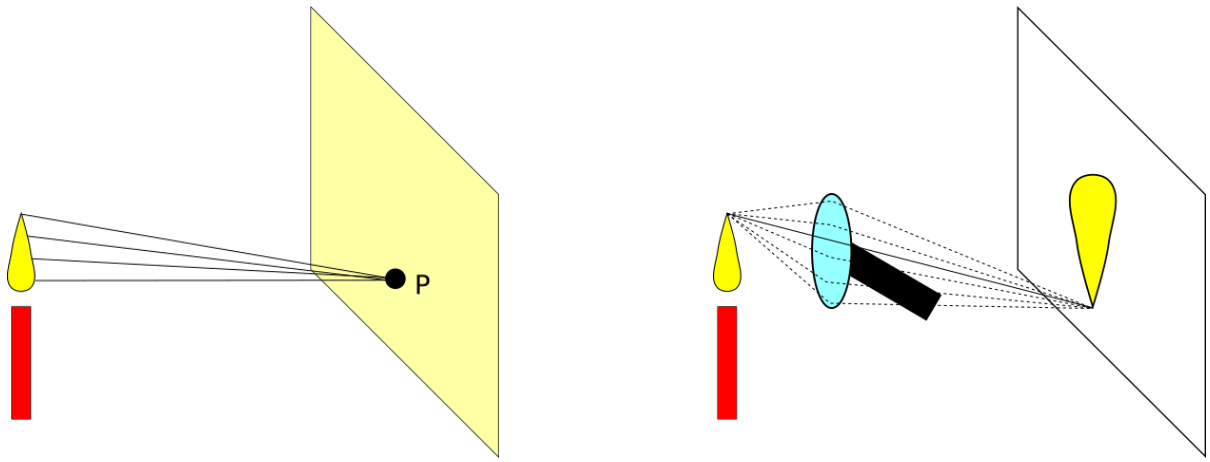


Abbildung 3: Links: die Situation ohne Lupe: an jedem Punkt auf der Wand überlagert sich das Licht ausgehend von allen Punkten der Flame zu einem hellen Fleck. Rechts: Abbildung der Flammenspitze: Alle Strahlen, welche von der Flammenspitze ausgesendet werden und auf die Lupe treffen, brauchen gleich lang, um an die eine Stelle auf die Wand zu treffen, wo der Bildpunkt ist. In der Abbildung braucht das Licht auf allen gestrichelten Wegen gleich lang wie auf dem durchgezogenen Weg.

[4]Dies gilt nur, wenn der Lichtstrahl einigermassen senkrecht auf die Mitte trifft.

4 Die Linsengleichung

Nachdem wir verstehen, wie eine Abbildung entsteht, wollen wir uns ein paar Gedanken machen, wie wir die verschiedenen Grössen berechnen können, die wir bei unseren Versuchen antreffen. Dazu müssen wir ein Model für unsere Lupe finden. Wir nehmen der Einfachheitshalber an, die Lupe sei unendlich dünn. Dies widerspricht zwar der Funktionsweise der Linse, jedoch brauchen wir uns dann keine Gedanken zu machen, wie das Licht bei der Lupe genau an den beiden Glas-Luft Flächen gebrochen wird. Zudem charakterisieren wir die Lupe mit der Brennweite: Lichtstrahlen, welche senkrecht auf die flache Lupe[5] treffen, bündeln sich in einem Punkt. Die Distanz zwischen diesem Punkt und der Lupe ist die Brennweite f.
Um nun zu konstruieren, wo die Abbildung eines Punktes zu liegen kommt, können wir folgendermassen vorgehen, siehe auch Abbildung 4 links:

1. Der Strahl durch die Mitte der Lupe wird nicht abgelenkt.
2. Strahlen die senkrecht auf die Lupe treffen verlaufen nach der Lupe durch den Brennpunkt.
3. Der Strahl, der durch den Brennpunkt geht, verläuft nach der Lupe senkrecht zur Lupe.

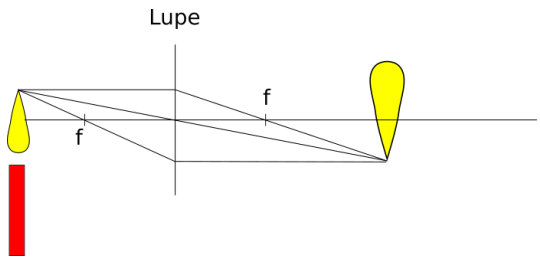
Diese 3 Strahlen treffen sich dann wieder in einem Punkt nach der Lupe, was dann die Abbildung ist. Das heisst, wir müssen an die Stelle, wo die Abbildung ist, ein weisses Blatt Papier oder eine weisse Wand hinstellen, um das Bild zu sehen. Dabei ist es auch völlig gleichgültig ob die Lupe genügend gross ist, dass all diese 3 Strahlen, die wir zur Konstruktion der Abbildung eingezeichnet haben, auf die Lupe treffen. Denn wir haben nun den Abbildungspunkt gefunden und alle Strahlen, die auf die Lupe treffen, gehen durch den Abbildungspunkt.
Mit diesem Modell können wir auch eine Formel hinschreiben für die Distanz zwischen dem Gegenstand und der Lupe g, der Distanz zwischen der Lupe und der scharfen Abbildung b und der Brennweite, siehe auch Abbildung 4 rechts.

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Diese Formel heisst Linsengleichung oder Abbildungsgleichung.

Aufgabe 4: Berechne die Brennweite Deiner Lupe und die Vergrösserung M.
Miss g und b und rechne. Die Vergrösserung ist definiert als $M = B/G$, wobei B die Grösse der Abbildung und G die Grösse des Gegenstandes ist. Zur Berechnung von M lohnt es sich, zuerst ein paar geometrische Überlegungen zu machen, damit man nicht B und G messen muss.

Herausforderung Aufgabe 4: Leite die Abbildungsgleichung her.
Diese Gleichung kann rein geometrisch hergeleitet werden.



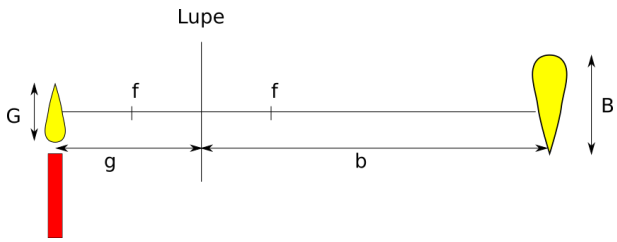


Abbildung 4: Links: Die Konstruktion der Abbildung der Flammenspitze. Rechts: Skizze des Aufbaus mit den eingezeichneten Grössen. Achtung, die Skizze ist keine Konstruktion, die Grössenverhältnisse sind falsch!

[5] In unserem Modell ist die Lupe flach, da sie ja ganz dünn ist. Das heisst alle Strahlen, die senkrecht auf die Lupe treffen, sind parallel zueinander.

5 Limitierungen einer Abbildung mit einer Lupe

Wahrscheinlich sind Dir beim Lesen und Lösen vom Bisherigen verschiedene Fragen aufgetaucht. Wir wollen nun zwei Aspekte noch etwas genauer anschauen.
Vielleicht hast Du Dich gefragt, warum wir immer eine Lichtquelle, also eine Kerze oder eine Lampe abgebildet haben. Nun im Prinzip funktioniert dies auch mit einem normalen Gegenstand (wie zum Beispiel einem Apfel) und Du bist herzlich eingeladen dies auch zu versuchen. Jedoch geht von einem normalen Gegenstand zu wenig Licht aus, als dass man dies noch einigermassen sinnvoll auf eine weisse Wand abbilden kann. Vor allem da die Wand das Licht von der Abbildung nicht besonders effizient reflektiert. Was jedoch sicherlich ein Versuch wert ist: einen Computer- oder Laptopbildschirm abzubilden, also sozusagen einen Beamer zu bauen.
Eine andere äusserst berechtigte Frage ist folgende: Wir habe argumentiert, dass alle Lichtstrahlen von einem Punkt der Lichtquelle zum Abbild durch die Lupe den gleich langen Weg brauchen. Nun kann man mit voller Berechtigung einwenden, dass dann die Lupe extrem genau geschliffen sein müsste und bereits kleinste Fehler alles zunichte machen könnten. Dem ist natürlich nicht so, ansonsten hätten wir auch nicht mit einer billigen Lupe eine Abbildung produzieren können. Dafür gibt es zwei Gründe: zum einen nimmt das Licht nicht nur exakt den kürzesten Weg, sondern auch Wege, die ganz wenig länger sind[6]. Dies wird dann deutlich, wenn man sich mit der Grenze der Gültigkeit von Strahlenoptik beschäftigt, auf was wir hier jedoch nicht weiter eingehen wollen. Zum anderen ist es auch nicht schlimm, wenn nicht alle Strahlen, die auf die Lupe treffen, den genau gleich langen Weg haben. Wie wir festgestellt haben, kann man auch eine Abbildung erzeugen, wenn man einen Teil der Lupe abdeckt. In diesem Sinne ist es auch nicht schlimm, wenn nicht die ganze Lupe ganz genau geschliffen ist sondern nur gewisse Bereiche. All die ungenauen Bereiche reduzieren dann einfach die Qualität der Abbildung, sie wirkt weniger scharf. Denn anstatt einer genauen Abbildung auf einen Punkt wird das Licht nun auch einen etwas grösseren Bereich abgebildet, das Bild verschmiert.

Aufgabe 5: Versuche verschiedene Sachen abzubilden und erprobe auch verschiedene Lupen und lupenartige Gegenstände
Versuche Deinen Bildschirm abzubilden. Als lupenartige Gegenstände kannst Du Gläser, Flaschen, Brillengläser, und Weiteres ausprobieren. Meistens ist die Qualität der Abbildung deutlich schlechter als mit einer Lupe.

[6] Siehe dazu auch A im Anhang.

A Prinzip von Fermat

Wir wollen kurz eine intuitive Begründung für das Prinzip von Fermat geben. Dazu betrachten wir eine punktförmige Lichtquelle und nehmen auch das Auge punktförmig an. Wir wollen zeigen, dass das Licht tatsächlich den kürzesten Weg nimmt. Dazu betrachten wir wieder den Spiegel, siehe Abbildung 5 links. Wir nehmen nun an, das Licht breite sich als Welle kugelförmig von der Lichtquelle aus, und werde an dem Spiegel in alle Richtungen reflektiert. Dadurch nimmt es alle möglichen Wege. Wir wollen nun zeigen, dass es vollkommen ausreicht, wenn wir nur den kürzesten Weg betrachten und alle anderen Wege vernachlässigen. Am Auge sehen wir also die Summe von all den Strahlen, welche all diese Wege genommen haben. Wenn sich 2 Weglängen um die halbe Wellenlänge unterscheiden, so löschen sie sich gegenseitig aus. Denn dann trifft der Wellenberg der einen Weglänge mit dem Wellental der anderen Weglänge zusammen, wir nennen dies destruktive Interferenz. Wenn wir nun die Weglänge als Funktion vom Ort auf dem Spiegel ($y_p = y_1, y_2, y_3$ usw) skizzieren erhalten wir den Graphen aus Abbildung A rechts. Wir sehen, dass um den kürzeste Weg viele Weglängen etwa gleich lang sind, sich also nicht auslöschen sondern gegenseitig verstärken, da jeweils Wellenberge auf Wellenberge zu liegen kommen. Man nennt dies konstruktive Interferenz. Sobald wir vom Minimum weggehen wechseln sich rote (= destruktive) und blaue (= konstruktive) Weglängen ab und löschen sich aus. Das heisst der grösste Teil des Lichtes, den wir sehen, stammt vom blauen Teil am Minimum der Kurve, was dem kürzesten Weglänge entspricht. Wir sehen zudem, dass das Prinzip von Fermat von de Wellenlänge abhängt: Je kürzer die Wellenlänge desto kleiner ist der blaue Bereich um das Minimum der Kurve herum. Das heisst nichts anderes, als dass die geometrische Optik nur gültig ist, wenn die Wellenlängen viel kleiner als die Weglängen sind denn ansonsten müsste man auch noch andere Wege mitberücksichtigen.

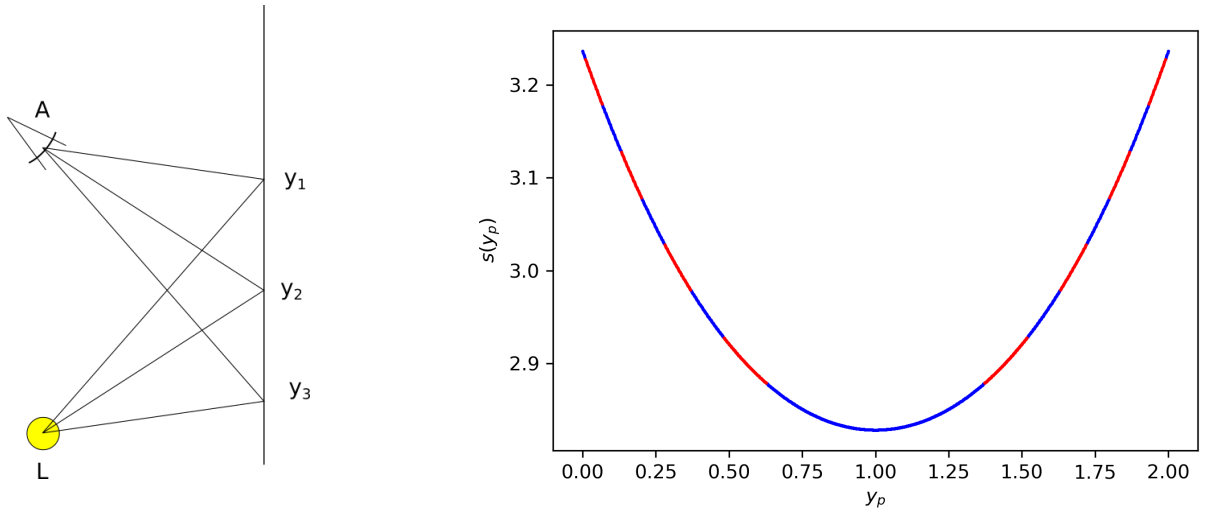


Abbildung 5: Links: Beim Auge A werden alle möglichen Wege aufsummiert. Eingezeichnet sind einige mögliche Wege. Rechts: Weglänge als Funktion vom Reflektionsort P auf dem Spiegel (für Wellenlänge 0.1). Rot sind alle Weglängen, welche destruktiv mit den blauen Weglängen interferieren, sich also um etwa eine halbe Weglänge unterscheiden. Das heisst die roten Stücke löschen die jeweils benachbarten blauen Stücke aus.