



**PHYSICS.
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olimpiadi di Fisica

Secondo turno

17 gennaio 2024

Parte 1 : 21 domande a scelta multipla

Durata : 60 minuti

Totale : 21 punti (21×1)

Materiale autorizzato : Calcolatrice semplice

Materiale per scrivere e disegnare

Buona fortuna!

Supported by :



Costanti fondamentali

Frequenza iperfina del cesio	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	s^{-1}
Velocità della luce nel vuoto	c	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Costante di Planck	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Carica elementare	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Costante di Boltzmann	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Costante di Avogadro	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficienza luminosa di una radiazione	K_{cd}	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Costante magnetica	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Costante elettrica	ϵ_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Costante dei gas	R	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Costante gravitazionale	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Massa dell'elettrone	m_e	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Massa del protone	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Massa del neutrone	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Accelerazione di gravità standard	g_{n}	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Multiple Choice

Durata: 60 minuti

Punteggio: 21 punti (1 punto per ogni risposta corretta)

- Le domande a risposta multipla (**MC**) hanno diverse possibilità di risposta, di cui **esattamente una** è corretta. Se croccate l'affermazione giusta (e solo quella) sul foglio risposte, otterrete un punto, altrimenti zero.

Domanda 1.1 (MC)

Qual è la massa approssimativa dell'acqua contenuta nel Lago Lemano (Lago di Ginevra)?

- A) 1×10^{12} kg B) 1×10^{14} kg
 C) 1×10^{16} kg D) 1×10^{18} kg

Domanda 1.2 (MC)

La formazione delle stelle avviene con il collasso gravitazionale di una nuvola di gas. La nuvola collassa se il suo raggio supera un limite chiamato la lunghezza di Jeans λ . Per una nuvola di temperatura T , densità ρ formata da molecole di massa m , come si può definire il valore di λ ?

- A) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B T m \rho}{4\pi G}}$ B) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B m \rho}{4\pi G T}}$
 C) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B T}{4\pi G m \rho}}$ D) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B}{4\pi G T m \rho}}$

Domanda 1.3 (MC)

Calcolate $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ per $r > 0$.

- A) 0 B) $\frac{\pi r^2}{2}$ C) $\frac{r^2}{2}$
 D) $\frac{\pi r^2}{4}$ E) $\frac{r^2}{\sin(1)}$ F) $2\pi r$

Domanda 1.4 (MC)

Consideriamo due vettori \vec{v} e $\vec{\omega}$. L'angolo fra questi vettori è θ , v e ω sono la norma di \vec{v} e $\vec{\omega}$, rispettivamente. Qual è la norma di $(\vec{v} + \vec{\omega}) \times (\vec{\omega} + \vec{v})$?

- A) 0 B) $v^2 + 2\omega v \sin(\theta) + \omega^2$
 C) $v^2 + 2\omega v + \omega^2$ D) $2\omega v \sin(\theta)$
 E) $2\omega v$ F) $\sin(\theta) (v^2 + 2\omega v + \omega^2)$

Domanda 1.5 (MC)

Due sfere di massa m_a e m_b rispettivamente si scontrano. Le sfere sono limitate a una dimensione (il che significa che continuano a muoversi lungo lo stesso asse dopo la collisione). Originariamente A si muoveva con velocità \vec{v} e B era a riposo. Dopo l'urto, A continua a muoversi con una velocità di circa $\|\vec{v}\|$. Quale delle seguenti affermazioni può essere vera? Si supponga che le sfere subiscano una collisione elastica senza forze esterne.

($p \ll q$ ($p \gg q$) vuol dire che p è molto più piccolo (più grande) di q)

I: $m_a = m_b$, II: $m_a \ll m_b$, III: $m_a \gg m_b$

- A) Nessuna B) Solo I
 C) Solo II D) Solo III
 E) Solo II e III F) I, II, e III

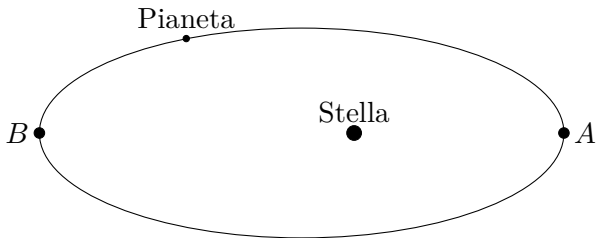
Domanda 1.6 (MC)

Un' orbita geostazionaria è un' orbita che ha lo stesso periodo della rotazione della Terra intorno al proprio asse. Qual è l'altezza h rispetto al suolo di un satellite su una tale orbita, supponendo che la massa della Terra sia $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg, che il suo raggio sia $R = 6370$ km, e che la massa del satellite sia 600 kg? Potete considerare l'orbita del satellite come circolare.

- A) 720 km B) 36 000 km
 C) 42 000 km D) 87 000 km

Domanda 1.7 (MC)

Consideriamo un pianeta di massa non trascurabile che orbita intorno a una stella con un'orbita ellittica, come mostrato nel diagramma. Supponiamo che questo sistema sia isolato e che l'unica interazione sia l'attrazione gravitazionale tra la stella e il pianeta.



Quale delle seguenti affermazioni descrive correttamente l'energia cinetica della stella e l'energia potenziale gravitazionale del sistema quando il pianeta si trova nel punto A (K_A, U_A) e nel punto B (K_B, U_B)?

- A) $K_A > K_B$ e $U_A > U_B$
- B) $K_A > K_B$ e $U_A < U_B$
- C) $K_A < K_B$ e $U_A > U_B$
- D) $K_A < K_B$ e $U_A < U_B$
- E) $K_A = K_B$ e $U_A < U_B$
- F) $K_A = K_B$ e $U_A = U_B$

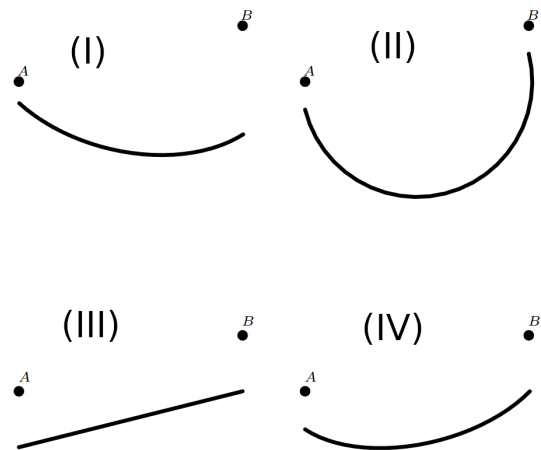
Domanda 1.8 (MC)

Bob è in un lago su una piccola barca. Ha preso con lui una palla da bowling di massa (6 kg) e raggio (10 cm). Che succederebbe al livello dell'acqua se lasciasse cadere la palla nel lago? Il volume dei buchi nella palla da bowling può essere ignorato.

- A) Il livello dell'acqua scenderebbe.
- B) Il livello dell'acqua resterebbe costante.
- C) Il livello dell'acqua aumenterebbe.
- D) Non abbiamo abbastanza informazioni.

Domanda 1.9 (MC)

Consideriamo una corda inelastica di lunghezza L attaccata a due punti fissi A e B separati da una distanza $D < L$. Su questa corda è attaccata una carrucola che può muoversi liberamente senza attrito lungo la corda e alla quale si lascia pendere una massa m (in modo simile a una collana con un ciوندolo). Si suppone che la corda rimanga sempre tesa. Quale delle seguenti traiettorie può seguire la massa attaccata alla carrucola?



- A) I
- B) II
- C) III
- D) IV

Domanda 1.10 (MC)

Abbiamo due lenti sottili con lunghezze focali di valore assoluto 40 mm e 60 mm rispettivamente. Vogliamo creare un sistema afocale, cioè che se dei raggi paralleli entrano nel sistema, ne escono sempre paralleli. A che distanza devono essere posizionate le due lenti per creare un sistema di questo tipo?

- A) 0 mm
- B) 20 mm
- C) 40 mm
- D) 50 mm
- E) 60 mm
- F) 100 mm
- G) Dipende dalle lenti che sono state usate.

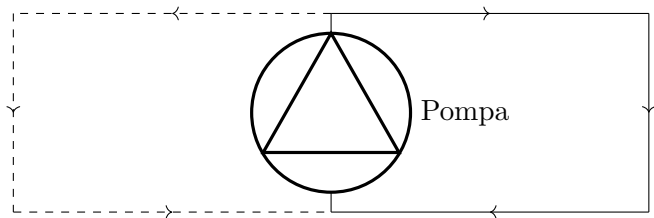
Domanda 1.11 (MC)

Parco quadrato è un'area ricreativa di 1000 m per 1000 m. La metà nord del parco è coperta dall'acqua, quella sud da un prato. Alice si trova nell'angolo sud-ovest dell'area. Vuole andare a trovare il suo amico Bob, che si trova nell'angolo nord-est. Lei corre con una velocità di $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e nuota con una velocità di $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Con quale angolo (in senso orario, dove lo zero è il nord) dovrebbe iniziare a correre, se vuole arrivare a destinazione il più velocemente possibile?

- A) 0° B) 10.10° C) 45°
 D) 61.24° E) 63.43°

Domanda 1.12 (MC)

Consideriamo un sistema di circolazione dell'acqua costituito da un tubo di lunghezza 10 m e da una pompa. Indichiamo la portata d'acqua di questo sistema con R_0 . Quando si aggiunge un secondo tubo di lunghezza 10 m in parallelo alla pompa (rappresentato dalla linea tratteggiata), la portata d'acqua attraverso la pompa cambia in R_1 . Qual è il rapporto $\frac{R_1}{R_0}$, assumendo che la potenza di pompaggio rimanga costante? La perdita di pressione lungo il tubo può essere approssimata come proporzionale alla lunghezza del tubo e alla velocità dell'acqua.



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2}$ D) 2

Domanda 1.13 (MC)

Qual è la media del valore assoluto della velocità lungo la direzione x di particelle di massa m in un gas ideale con temperatura T ?

- A) $\frac{3}{2}k_B T$ B) $\frac{1}{2}k_B T$ C) $\frac{3k_B T}{m}$
 D) $\frac{k_B T}{m}$ E) $\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ F) $\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

Domanda 1.14 (MC)

Quale dei diagrammi seguenti non può rappresentare un ciclo di Carnot?

- A) B)
 C) D)

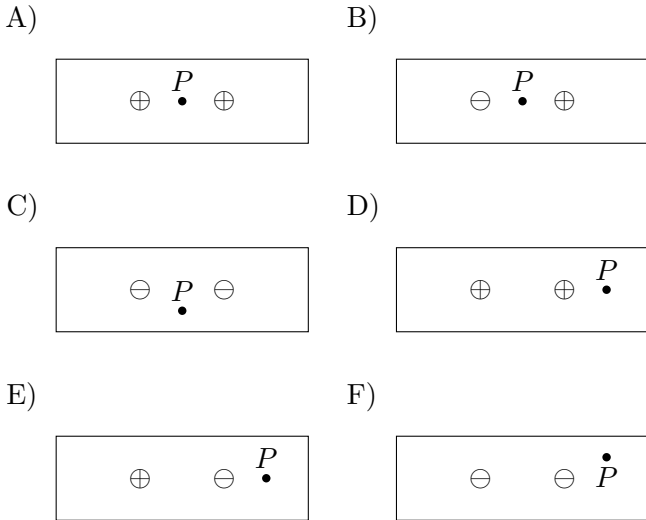
Domanda 1.15 (MC)

Si consideri una sfera cava di rame con raggio $R > 0$ e spessore finito $0 < d < R$ immersa nell'acqua. Inizialmente non vi sono forze risultanti che agiscono su di essa. La sfera viene riscaldata, senza modificare la temperatura dell'acqua circostante. Quale delle seguenti frasi descrive in modo corretto ciò che accadrà (e perché ciò accade)?

- A) La palla comincerà a muoversi verso l'alto visto che la sua massa diminuisce.
 B) La palla comincerà a salire visto che il suo volume aumenta.
 C) La palla comincerà a scendere visto che la sua massa aumenta.
 D) La palla comincerà a scendere visto che il suo volume diminuisce.
 E) Non succede niente, la temperatura della palla non cambia le forze che agiscono sulla palla.
 F) La palla comincerà a oscillare intorno alla sua posizione iniziale.

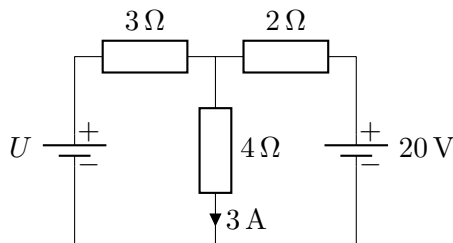
Domanda 1.16 (MC)

Fra le seguenti configurazioni, quale ha il valore maggiore dell'intensità del campo elettrico al punto P ? I simboli \oplus e \ominus rappresentano delle cariche puntiformi con carica $+|Q|$ e $-|Q|$ rispettivamente.



Domanda 1.17 (MC)

Qual è la tensione della batteria a sinistra nella figura?



- A) 0V B) 9V C) 12V D) 15V E) 30V
- F) Il circuito contiene un cortocircuito.

Domanda 1.18 (MC)

Consideriamo due lastre parallele infinitamente grandi, cariche positivamente e con la stessa densità di carica. Il centro M tra le due piastre è un punto di equilibrio? Se sì, di che tipo di equilibrio si tratta?

- A) M non è un punto di equilibrio.
- B) M è un punto di equilibrio stabile.
- C) M è un punto di equilibrio instabile.
- D) M è un punto di equilibrio neutro.

Domanda 1.19 (MC)

Una particella carica di massa m e carica q si muove con velocità \vec{v} , parallelamente a un campo magnetico d'intensità B . Qual è l'accelerazione (modulo e direzione) della particella?

- A) 0
- B) Bqv , perpendicolare alla velocità
- C) Bqv , parallelo alla velocità
- D) $\frac{Bqv}{m}$, perpendicolare alla velocità
- E) $\frac{Bqv}{m}$, parallelo alla velocità
- F) $\frac{Bqv}{m}$, parallelo al campo magnetico

Domanda 1.20 (MC)

Una massa è attaccata a una molla orizzontale su una superficie priva di attrito. Viene spostata di una distanza 1 m dalla sua posizione di equilibrio. Dopo essere stata rilasciata, la massa ritorna alla sua posizione di equilibrio per la prima volta dopo $t = 1$ s. La resistenza dell'aria è trascurabile. Qual era la norma dell'accelerazione della massa quando è stata rilasciata?

- A) $a = 2\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- B) $a = 2\pi\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- C) $a = \frac{1}{16}\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- D) $a = \frac{\pi^2}{4}\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- E) $a = \frac{\pi}{2}\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- F) $a = 4\pi^2\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Domanda 1.21 (MC)

Siete in una stanza illuminata dal sole e state osservando una piccolissima particella di polvere sospesa a mezz'aria davanti a un altoparlante che diffonde musica ad alto volume. L'altoparlante è puntato in direzione orizzontale. In che modo vedete muoversi la particella di polvere?



- A) Oscilla verticalmente.
- B) Oscilla orizzontalmente
- C) Allontanandosi continuamente dall'altoparlante.
- D) La particella non si muove.

Multiple Choice: foglio risposte

Riportate le vostre risposte nelle caselle previste su questa pagina.

Cognome:	Nome:	Totale:
-----------------	--------------	----------------

	A	B	C	D	E	F	G
Domanda 1.1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Domanda 1.11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
Domanda 1.12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			

Multiple Choice: soluzioni

	A	B	C	D	E	F	G
Domanda 1.1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.6	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.7	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.8	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			
Domanda 1.10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Domanda 1.11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
Domanda 1.12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
Domanda 1.14	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Domanda 1.15	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.16	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.17	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			
Domanda 1.19	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Domanda 1.21	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			



**PHYSICS.
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olimpiadi di Fisica

Secondo turno

17 gennaio 2024

Parte 2 : 3 problemi lunghi

Durata : 120 minuti



Totale : 48 punti (3×16)

Materiale autorizzato : Calcolatrice semplice

Materiale per scrivere e disegnare

Buona fortuna!

Supported by :

-  Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
-  Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
-  EMPA - Materials Science & Technology
-  Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
-  ETH Zurich Department of Physics
-  Fondation Claude & Giuliana
- ERNST GÖHNER STIFTUNG** Ernst Göhner Stiftung, Zug
- HASLERSTIFTUNG** Hasler Stiftung, Bern
-  Metrohm Stiftung, Herisau
-  Neue Kantonsschule Aarau
-  Novartis
- SATW** Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
-  Swiss Academy of Sciences
-  Swiss Physical Society
-  Università della Svizzera italiana
-  Universität Bern FB Physik/Astronomie
-  Universität Zürich FB Physik Mathematik

Costanti fondamentali

Frequenza iperfina del cesio	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	s^{-1}
Velocità della luce nel vuoto	c	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Costante di Planck	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Carica elementare	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Costante di Boltzmann	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Costante di Avogadro	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficienza luminosa di una radiazione	K_{cd}	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Costante magnetica	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Costante elettrica	ϵ_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Costante dei gas	R	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Costante gravitazionale	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Massa dell'elettrone	m_e	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Massa del protone	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Massa del neutrone	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Accelerazione di gravità standard	g_{n}	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Problemi lunghi

Durata: 120 minuti

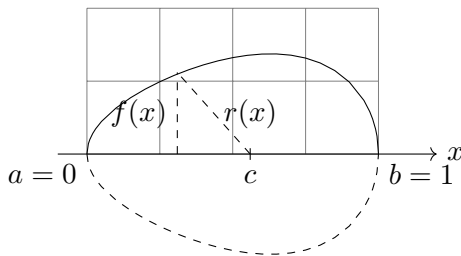
Punteggio: 48 punti (3 × 16)

Cominciate ogni problema su un nuovo foglio, al fine di facilitarne la correzione.

Indicazione generale: i problemi sono composti da parti parzialmente indipendenti. In caso di blocco, si consiglia di continuare a leggere e di fare le parti più facili.

Problema lungo 2.1: Stabilità di un uovo (16 punti)

Consideriamo un uovo rappresentato da un solido omogeneo di rivoluzione con profilo $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - x^4}$ sul dominio $x \in [a = 0, b = 1]$. Le unità di lunghezza sono arbitrarie.



Parte A. Centro di gravità e raggio (4.5 punti)

Il baricentro c di un solido di rivoluzione si trova sul suo asse e può essere calcolato dividendolo in dischi di spessore infinitesimale dx e volume $\pi f^2(x) dx$:

$$c = \frac{1}{V} \int_a^b x \pi f^2(x) dx,$$

dove V è il volume del solido.

- i. (3 pt)** Calcolare c per l'uovo.
- ii. (0.5 pt)** Se fosse stato scelto un fattore diverso da $\frac{1}{2}$ nel profilo $f(x)$ dell'uovo, quale sarebbe stato l'impatto sul valore di c ? Giustificare.
- iii. (1 pt)** Trovare un'espressione per il «raggio» $r(x)$ dell'uovo, cioè la distanza tra il baricentro e un punto $(x, f(x))$ sulla superficie dell'uovo. Il risultato deve essere della forma $\sqrt{P(x)}$, dove $P(x)$ è un polinomio.

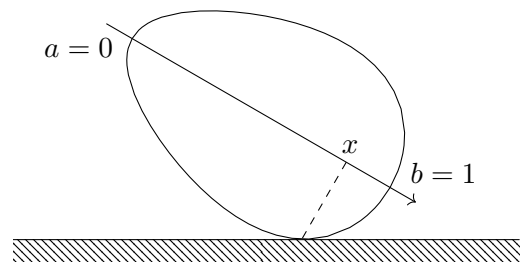
Parte B. Intermezzo analitico (3 punti)

Sia $g(x) > 0$ una funzione differenziabile strettamente positiva.

- i. (2 pt)** Espandere $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$, la derivata della radice quadrata di $g(x)$.
- ii. (1 pt)** Dimostrare che il segno di $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$ è sempre uguale a quello di $\frac{dg(x)}{dx}$.

Parte C. Stabilità dell'uovo depresso (8.5 punti)

Poniamo ora l'uovo su una superficie orizzontale e identifichiamo il punto in cui l'uovo è a contatto con la superficie con la sua coordinata x .



- i. (2 pt)** Le posizioni $a = 0$ e $b = 1$ sono posizioni di equilibrio, a causa della simmetria di rivoluzione. Determinare la stabilità di queste due posizioni dall'espressione $r(x)$ trovata in A.iii. e utilizzando il risultato mostrato in B.ii.
- Esiste una posizione $a < s < b$ in cui l'uovo disteso su un fianco è in equilibrio stabile.
- ii. (1 pt)** Qual è la particolarità di $r(s)$?
- iii. (1.5 pt)** Trovare un'equazione polinomiale per s .
- Purtroppo, questa equazione polinomiale non è (facilmente) risolvibile. Cercheremo quindi un'approssimazione utilizzando un'espansione di Taylor.
- iv. (1 pt)** Scegliere un buon punto di partenza t per lo sviluppo. Giustificate la vostra scelta.
- v. (2 pt)** Espandere l'equazione polinomiale intorno alla t scelta al primo ordine per ottenere un'equazione affine.
- vi. (1 pt)** Trovare la soluzione \tilde{s} di questa nuova equazione e calcolare anche $r(\tilde{s})$.

Problema lungo 2.2: Esperienza di Clément-Desormes (16 punti)

L'esperimento di Clément-Desormes è un esperimento di termodinamica utilizzato per determinare l'indice adiabatico $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ di un gas ideale, dove C_P e C_V sono rispettivamente le capacità termiche a pressione costante e a volume costante. L'esperimento consiste in un contenitore riempito con il gas studiato, collegato a una valvola, a un manometro (ad esempio, un manometro a mercurio) e a una pompa (vedi figura). Le tre fasi dell'esperimento consistono prima nell'aumentare la pressione del gas con la pompa, poi nel rilasciare la pressione in eccesso attraverso la valvola e infine nell'attendere che il gas si termalizzi. Di seguito, considereremo il sistema che contiene le n moli di gas che rimangono nel contenitore dopo il rilascio della pressione (inizialmente nel contenitore ci stanno più di n moli di gas).

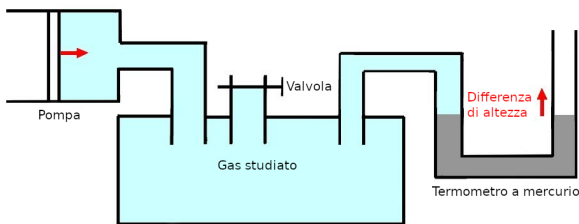


Figura 1: Rappresentazione schematica dell'esperimento Clément-Desormes.

Parte A. Manometri a mercurio (2.25 punti)

Un manometro a mercurio utilizza le variazioni di altezza di una colonna di mercurio per determinare la pressione di un gas, vedi figura. Di conseguenza, il millimetro di mercurio, indicato con mmHg, è diventato un'unità di pressione. È definito come la pressione idrostatica generata da una colonna di mercurio alta un millimetro alla temperatura di 0°C.

- i. (0.5 pt)** Qual è la pressione idrostatica di una colonna di fluido di densità ρ e altezza h ?
- ii. (0.75 pt)** Come si esprime 1 bar in mmHg? La densità del mercurio a pressione e temperatura ambiente $T = 0^\circ\text{C}$ è $13.595 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.
- iii. (1 pt)** Perché il mercurio è particolarmente conveniente per costruire questi manometri rispetto ad altri liquidi?

Parte B. Pompaggio e rilascio (2 punti)

Per prima cosa si usa la pompa per aumentare la pressione del gas e passare da (P_0, V_0) a (P_A, V_{tot}) in modo isotermico, dove $P_A = P_0 + h_A = 780.31 \text{ mmHg}$ e V_{tot} è il volume totale del contenitore di gas che si presume rimanga fisso per il resto dell'esperimento. Il volume (parziale) delle n moli in questa fase è $V_A < V_{\text{tot}}$. Quindi, a questo punto abbiamo pressione e volume (P_A, V_A) per le n moli di gas considerate. Si apre quindi rapidamente la valvola per far uscire una parte del gas e annullare la sovrappressione, e si chiude la valvola subito dopo. Il tubo del manometro è arbitrariamente sottile, quindi la variazione di volume necessaria per modificare l'altezza del mercurio è trascurabile. Rimangono solo le moli di gas con pressione e volume $(P_B, V_B) = (P_0, V_{\text{tot}})$. La temperatura ambiente è $T_0 = 12.5^\circ\text{C}$ e la pressione ambiente è $P_0 = 766.50 \text{ mmHg}$.

- i. (0.5 pt)** Che tipo di processo termodinamico avviene tra le situazioni $A = (P_A, V_A)$ e $B = (P_B, V_B)$? Perché?
- ii. (1.5 pt)** Per questo processo, quale equazione mette in relazione la pressione e il volume nelle situazioni A e B ?

Parte C. Ritorno all'equilibrio termico (2.5 punti)

Dopo un po', il sistema raggiunge nuovamente l'equilibrio termico rispetto all'esterno. Si ottengono pressione e volume $(P_C, V_C) = (P_0 + h_C, V_{\text{tot}})$, con $h_C = 3.61 \text{ mmHg}$.

- i. (0.5 pt)** Che tipo di processo termodinamico avviene tra le situazioni B e $C = (P_C, V_C)$? Perché?
- ii. (0.5 pt)** Qual è la temperatura T_C nella situazione C ?
- iii. (1.5 pt)** Con quale equazione si possono mettere in relazione la pressione e il volume nelle situazioni A e C ?

Parte D. Trovare l'indice adiabatico (9.25 punti)

Possiamo ora considerare il processo complessivo per determinare l'indice adiabatico γ dalle misure e dai risultati precedenti.

i. (1.25 pt) Disegnare schematicamente in un diagramma $P - V$ i processi termodinamici che agiscono sul nostro sistema di moli n dal passo A a C .

ii. (2 pt) Usate le equazioni delle parti precedenti per esprimere $\frac{P_0+h_A}{P_0}$ in funzione di (e includendo tutti) P_0 , h_A , h_C e γ .

iii. (2.5 pt) Notando che $h_A \ll P_0$ e $h_C \ll P_0$ (\ll significa «molto più piccolo di»), semplificate l'espressione per $\frac{P_0+h_A}{P_0}$.

Suggerimento: per $x \ll 1$, si può approssimare $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$.

Suggerimento: si possono trascurare $\left(\frac{h_A}{P_0}\right)^2$, $\left(\frac{h_C}{P_0}\right)^2$, $\frac{h_A h_C}{P_0^2}$ e i termini di ordine superiore.

iv. (1 pt) Utilizzando i risultati precedenti, esprimere l'indice adiabatico γ in funzione di h_A e

h_C .

v. (1 pt) Calcolare numericamente l'indice adiabatico γ a partire dalle misure fornite.

vi. (1 pt) Dal teorema di equipartizione, è possibile ricavare che $C_V = \frac{f}{2}R$ e $C_P = \frac{f+2}{2}R$, dove f è il numero di gradi di libertà consentiti per le molecole del gas. Il gas qui studiato ha $f = 5$ gradi di libertà. Qual è la differenza relativa tra i valori teorici e quelli sperimentali dell'indice adiabatico γ ?

vii. (0.5 pt) Quali potrebbero essere le ragioni di questa differenza?

Problema lungo 2.3: Carica immagine (16 punti)

Un problema molto comune in elettrostatica è quello di determinare il potenziale elettrico di un sistema composto da cariche puntiformi e conduttori di varia forma. In questo esercizio svilupperemo un metodo, il cosiddetto metodo della carica immagine, per semplificare notevolmente tali problemi nei casi con una simmetria appropriata. In questo esercizio consideriamo il sistema di unità SI.

Parte A. Potenziale elettrico e conduttori (2.25 punti)

In questa prima parte parleremo delle gabbie di Faraday.

- i. (0.25 pt)** Scrivere il potenziale elettrico V dovuto a una carica puntiforme q in funzione della distanza r dalla carica.
- ii. (0.5 pt)** Scrivere il potenziale elettrico V dovuto a N cariche puntiformi q_i , $i \in 1, 2, \dots, N$, in funzione delle distanze r_i da ciascuna carica q_i .
- iii. (0.5 pt)** Considerate la situazione mostrata in Fig. B.1. Che cosa si può dire del potenziale elettrico sulla superficie del materiale conduttore collegato a terra?
- iv. (1 pt)** Durante un temporale, è più sicuro rimanere in auto o stare all'aperto? Perché? Argomentate utilizzando la risposta alla domanda precedente.

Parte B. Carica immagine con un conduttore piano (4.25 punti)

Consideriamo nuovamente la situazione illustrata nella Fig. B.1. L'obiettivo di questa parte è determinare il potenziale elettrico in qualsiasi punto al di sopra del piano. A tale scopo, è possibile utilizzare un trucco che semplifica notevolmente la situazione. L'idea è quella di introdurre una carica immaginaria «specchio» per riprodurre le condizioni al contorno poste dal materiale conduttore.

In elettrostatica, se due sistemi fisici hanno potenziali con le stesse condizioni al contorno, le due situazioni sono fisicamente equivalenti.

Quindi, per determinare il potenziale elettrico di questo sistema, vorremmo trovare un altro sistema più semplice per descrivere il suo potenziale.

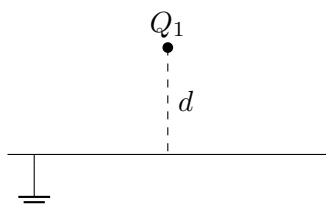


Figura B.1: Conduttore piano a massa infinitamente lungo con una carica Q_1 in una posizione $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, d)$.

- i. (0.25 pt)** Quali sono le condizioni al contorno per il potenziale elettrostatico V di questo sistema?
- ii. (1.5 pt)** Immaginiamo un secondo sistema fisico con la stessa carica Q_1 nella stessa posizione \vec{r}_1 della Fig. B.1 ma senza il piano conduttore. Il nostro obiettivo è trovare una configurazione con una seconda carica Q_2 nella posizione \vec{r}_2 che abbia le stesse condizioni al contorno della Fig. B.1. Quali dovrebbero essere i valori di Q_2 e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ perché ciò avvenga? Perché?
- iii. (1 pt)** Utilizzando i risultati precedenti, calcolare il potenziale elettrico $V(x, y, z)$ al di sopra del suolo nel sistema di Fig. B.1 in funzione delle coordinate (x, y, z) , della distanza d e della carica Q_1 . L'espressione può essere lasciata come somma di due termini, non è necessario semplificarla completamente.
- iv. (1.5 pt)** Disegnare schematicamente il sistema di conduttori di Fig. B.1 con le linee di campo corrispondenti, assumendo che $Q_1 > 0$ (in uno schizzo separato, non sul foglio del problema).

Parte C. Carica immagine ad angolo retto (5.5 punti)

Considereremo ora geometrie di conduttori più complesse.

- i. (2.5 pt)** Consideriamo il sistema mostrato in Fig. C.1. Qual è il numero N di cariche speculari necessarie per riprodurre le condizioni limite del conduttore? Quali sono i loro valori Q_i e le loro posizioni $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2, \dots, N$? Perché?

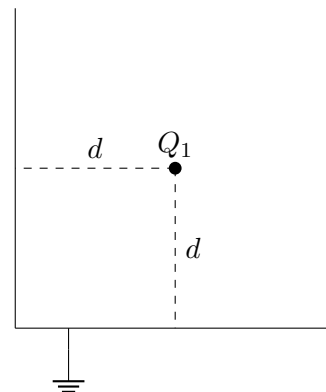


Figura C.1: Due semipiani conduttori infinitamente lunghi messi a terra ad angolo retto con una carica Q_1 nella posizione $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (d, 0, d)$.

ii. (1 pt) Qual è il potenziale corrispondente $V(x, y, z)$ in funzione delle coordinate (x, y, z) , della distanza d e della carica Q_1 ? L'espressione può essere lasciata come somma di termini N , non è necessario semplificarla completamente.

iii. (2 pt) Disegnare schematicamente il sistema carica-mezzo piano-conduttore con le linee di campo corrispondenti, assumendo che $Q_1 < 0$ (in uno schizzo separato, non sul foglio del problema).

Parte D. Cariche dello specchio circolare (4 punti)

i. (2.5 pt) Consideriamo ora il sistema mostrato in Fig. D.1. Si scopre che è necessaria una sola carica speculare per riprodurre le condizioni al contorno corrispondenti. Qual è il suo valore Q_2 e la sua posizione $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$?

Suggerimento: si può usare senza prova che un potenziale che soddisfa le condizioni al contorno appropriate nelle posizioni $(r, 0, 0)$ e $(-r, 0, 0)$ soddisfa le condizioni al contorno sull'intera sfera.

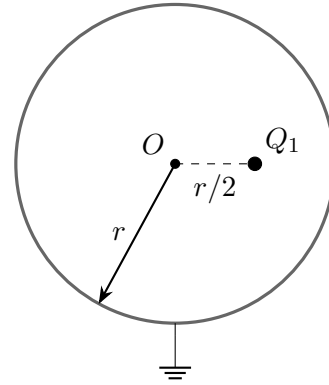


Figura D.1: Conduttore sferico a massa di raggio r con centro O in posizione $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ e carica Q_1 in posizione $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (r/2, 0, 0)$. Qui vediamo una fetta a $y = 0$ della sfera nel piano xz .

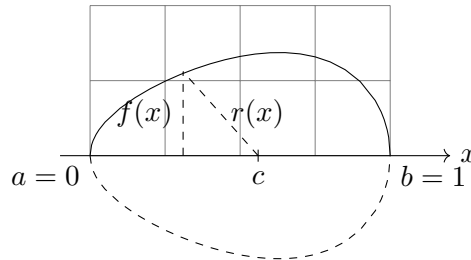
ii. (1.5 pt) Qual è il potenziale corrispondente $V(x, y, z)$ in funzione delle coordinate (x, y, z) , del raggio r e della carica Q_1 ? L'espressione può essere lasciata come somma di due termini, non è necessario semplificarla completamente.

Problemi lunghi: soluzioni

Problema lungo 2.1: Stabilità di un uovo

16

Consideriamo un uovo rappresentato da un solido omogeneo di rivoluzione con profilo $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-x^4}$ sul dominio $x \in [a=0, b=1]$. Le unità di lunghezza sono arbitrarie.



Parte A. Centro di gravità e raggio

4.5

Il baricentro c di un solido di rivoluzione si trova sul suo asse e può essere calcolato dividendolo in dischi di spessore infinitesimale dx e volume $\pi f^2(x) dx$:

$$c = \frac{1}{V} \int_a^b x \pi f^2(x) dx,$$

dove V è il volume del solido.

i. Calcolare c per l'uovo.

3

Following the idea of splitting the egg into disk-shaped infinitely thin slices, the volume is given by:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Thus for the egg, we have

$$c = \frac{\int_0^1 x \frac{1}{4} (x - x^4) dx}{\int_0^1 \frac{1}{4} (x - x^4) dx} = \frac{\int_0^1 (x^2 - x^5) dx}{\int_0^1 (x - x^4) dx} = \frac{[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6]_0^1}{[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5]_0^1},$$

And finally

$$c = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}.$$

ii. Se fosse stato scelto un fattore diverso da $\frac{1}{2}$ nel profilo $f(x)$ dell'uovo, quale sarebbe stato l'impatto sul valore di c ? Giustificare.

0.5

c wouldn't change, because the factor (squared) appears both in the numerator and in the denominator of c .

0.5

This is the same reason why the egg's density doesn't play a role, nor does π .

iii. Trovare un'espressione per il «raggio» $r(x)$ dell'uovo, cioè la distanza tra il baricentro e un punto $(x, f(x))$ sulla superficie dell'uovo. Il risultato deve essere della forma $\sqrt{P(x)}$, dove $P(x)$ è un polinomio.

1

We can use the Pythagorean theorem:

$$r(x) = \sqrt{f^2(x) + (x - c)^2},$$

0.5

and we get

$$r(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^4 + x^2 + c^2 - 2xc} = \sqrt{-\frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{31}{36}x + \frac{25}{81}}.$$

0.5

Parte B. Intermezzo analitico

3

Sia $g(x) > 0$ una funzione differenziabile strettamente positiva.

i. Espandere $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$, la derivata della radice quadrata di $g(x)$.

2

We can use the generic formula

$$\frac{dg^n(x)}{dx} = ng^{n-1}(x) \frac{dg(x)}{dx}.$$

1

Here we have the case $n = \frac{1}{2}$, so

$$\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \frac{dg(x)}{dx}.$$

1

Full points are given as long as the answer is of the desired final form, even if the generic formula is not explicitly stated.

ii. Dimostrare che il segno di $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$ è sempre uguale a quello di $\frac{dg(x)}{dx}$.

1

$$g(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{g(x)} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} > 0.$$

0.5

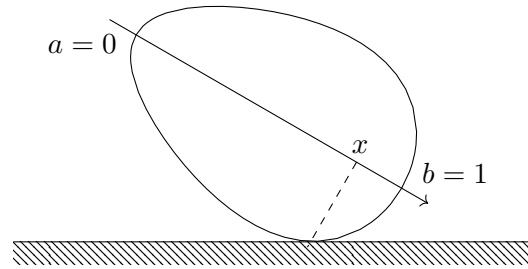
Thus the factor in front of the derivative does not change the sign, so both will always be equal. This is in particular valid for the case 0: if the derivative of $g(x)$ is null, so is the derivative of $\sqrt{g(x)}$.

0.5

Parte C. Stabilità dell'uovo deposto

8.5

Poniamo ora l'uovo su una superficie orizzontale e identifichiamo il punto in cui l'uovo è a contatto con la superficie con la sua coordinata x .



i. Le posizioni $a = 0$ e $b = 1$ sono posizioni di equilibrio, a causa della simmetria di rivoluzione. Determinare la stabilità di queste due posizioni dall'espressione $r(x)$ trovata in A.iii. e utilizzando il risultato mostrato in B.ii.

2

To study the stability, we need to compute the derivative of the radius found in A.iii. But we are only interested in its sign, so instead, and according to B.ii., we can compute the derivative of its square, $P(x)$.

0.5

$$\frac{dP(x)}{dx} = -x^3 + 2x - \frac{31}{36}.$$

0.5

For $x = a = 0$, $\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_a = -\frac{31}{36} < 0$.

This means that all values slightly larger than a lead to a smaller r^2 , thus also to a smaller r . Because a is at the end of the domain, it corresponds to a local maximum of the radius, and therefore a is an instable equilibrium.

0.5

For $x = b = 1$, $\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_b = -1 + 2 - \frac{31}{36} = \frac{5}{36} > 0$.

This means that all values slightly smaller than b lead again to a smaller r^2 , thus also to a smaller r . Because b is at the other end of the domain, it corresponds to a local maximum of the radius, and therefore b is an instable equilibrium as well.

0.5

Esiste una posizione $a < s < b$ in cui l'uovo disteso su un fianco è in equilibrio stabile.

ii. Qual è la particolarità di $r(s)$?

1

It is a local minimum of $r(x)$, and in fact its only minimum.

1

Give 0.5 point if it is only mentioned that the segment of $r(s)$ is perpendicular to the egg's surface.

iii. Trovare un'equazione polinomiale per s .

1.5

The condition for s is that the derivative of the radius is zero.

0.5

Again we can use B.ii. and only consider the derivative of $P(x)$.

0.5

Thus the equation is

$$-s^3 + 2s - \frac{31}{36} = 0.$$

0.5

Purtroppo, questa equazione polinomiale non è (facilmente) risolvibile. Cercheremo quindi un'approssimazione utilizzando un'espansione di Taylor.

iv. Scegliere un buon punto di partenza t per lo sviluppo. Giustificate la vostra scelta. **1**

If the egg was symmetric, that is an ellipse, s would be in the center ($\frac{1}{2}$). 0.5

The egg is not very dissymmetric, so $t = \frac{1}{2}$ is a good starting point, and easy to compute with. 0.5

Valid but less justifiable points include $t = c$ (but due to the slope of $f(x)$ in the middle portion of the egg, it should be clear that $t < c$) and $t = 1 - c$. Those are awarded 0.5 points and no double penalty in the subsequent questions.

v. Espandere l'equazione polinomiale intorno alla t scelta al primo ordine per ottenere un'equazione affine. **2**

At order zero, we have (remember that we are working with the derivative of $P(x)$)

$$\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_t = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\frac{1}{2} - \frac{31}{36} = -\frac{1}{8} + 1 - \frac{31}{36} = \frac{1}{72}.$$

0.5

At order one, we have

$$\left. \frac{d^2P(x)}{dx^2} \right|_t = -3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}.$$

0.5

Therefore the equation becomes

$$\frac{1}{72} + \frac{5}{4}(x - t) = 0.$$

0.5

And finally

$$\frac{5}{4}x - \frac{11}{18} = 0.$$

0.5

For $t = c$, this gives $\frac{87}{81}x - \frac{1511}{2916} = 0$.

For $t = 1 - c$, this gives $\frac{114}{81}x - \frac{1999}{2916} = 0$.

The equation's factors are not required to be fully simplified.

vi. Trovare la soluzione \tilde{s} di questa nuova equazione e calcolare anche $r(\tilde{s})$. **1**

Solving the equation, we get

$$\tilde{s} = \frac{4}{5} \frac{11}{18} = \frac{22}{45} \approx 0.489.$$

0.5

For $t = c$, this gives $\frac{1511}{3132} \approx 0.482$.

For $t = 1 - c$, this gives $\frac{1999}{4104} \approx 0.487$.

This shows that our preferred choice of t was good (the exact value is ≈ 0.489).

Therefore the minimal radius is approximately

$$r(s) \approx r(\tilde{s}) = \sqrt{-\frac{1}{4}\left(\frac{22}{45}\right)^4 + \left(\frac{22}{45}\right)^2 - \frac{31}{36}\frac{22}{45} + \frac{25}{81}} = \sqrt{\frac{921697}{8201250}} \approx 0.335.$$

0.5

For $t = c$ and $t = 1 - c$, this gives the same result to three figures.

Problema lungo 2.2: Esperienza di Clément-Desormes

16

L'esperienza di Clément-Desormes è un esperimento di termodinamica utilizzato per determinare l'indice adiabatico $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ di un gas ideale, dove C_P e C_V sono rispettivamente le capacità termiche a pressione costante e a volume costante. L'esperimento consiste in un contenitore riempito con il gas studiato, collegato a una valvola, a un manometro (ad esempio, un manometro a mercurio) e a una pompa (vedi figura). Le tre fasi dell'esperimento consistono prima nell'aumentare la pressione del gas con la pompa, poi nel rilasciare la pressione in eccesso attraverso la valvola e infine nell'attendere che il gas si termalizzi. Di seguito, considereremo il sistema che contiene le n moli di gas che rimangono nel contenitore dopo il rilascio della pressione (inizialmente nel contenitore ci stanno più di n moli di gas).

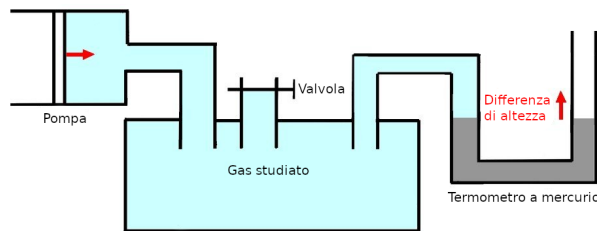


Figura 1: Rappresentazione schematica dell'esperimento Clément-Desormes.

Parte A. Manometri a mercurio

2.25

Un manometro a mercurio utilizza le variazioni di altezza di una colonna di mercurio per determinare la pressione di un gas, vedi figura. Di conseguenza, il millimetro di mercurio, indicato con mmHg, è diventato un'unità di pressione. È definito come la pressione idrostatica generata da una colonna di mercurio alta un millimetro alla temperatura di 0°C.

i. Qual è la pressione idrostatica di una colonna di fluido di densità ρ e altezza h ?

0.5

The hydrostatic pressure is given by $p = \rho gh$.

0.5

ii. Come si esprime 1 bar in mmHg? La densità del mercurio a pressione e temperatura ambiente $T = 0^\circ\text{C}$ è $13.595 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

0.75

A bar is defined as $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$, so $h = \frac{1 \times 10^5 \text{ Pa}}{\rho g} = \frac{1 \times 10^5 \text{ Pa}}{13.595 \text{ g/cm}^3 \cdot 9.80665 \text{ m/s}^2} = 750 \text{ mm}$. So, $1 \text{ bar} = 750 \text{ mmHg}$.

0.75

iii. Perché il mercurio è particolarmente conveniente per costruire questi manometri rispetto ad altri liquidi?

1

The high density of mercury as compared to e.g. water (about 13.6 times higher) is convenient because the corresponding height change between two different pressures is significantly lower than with less dense liquids.

1

Parte B. Pompaggio e rilascio

2

Per prima cosa si usa la pompa per aumentare la pressione del gas e passare da (P_0, V_0) a (P_A, V_{tot}) in modo isoteramico, dove $P_A = P_0 + h_A = 780.31 \text{ mmHg}$ e V_{tot} è il volume totale

del contenitore di gas che si presume rimanga fisso per il resto dell'esperimento. Il volume (parziale) delle n moli in questa fase è $V_A < V_{\text{tot}}$. Quindi, a questo punto abbiamo pressione e volume (P_A, V_A) per le n moli di gas considerate. Si apre quindi rapidamente la valvola per far uscire una parte del gas e annullare la sovrappressione, e si chiude la valvola subito dopo. Il tubo del manometro è arbitrariamente sottile, quindi la variazione di volume necessaria per modificare l'altezza del mercurio è trascurabile. Rimangono solo le moli di gas con pressione e volume $(P_B, V_B) = (P_0, V_{\text{tot}})$. La temperatura ambiente è $T_0 = 12.5^\circ\text{C}$ e la pressione ambiente è $P_0 = 766.50\text{ mmHg}$.

i. Che tipo di processo termodinamico avviene tra le situazioni $A = (P_A, V_A)$ e $B = (P_B, V_B)$? Perché? **0.5**

The process is adiabatic. 0.25

The reason is that we are considering a fast process such that no heat exchange occurs. 0.25

ii. Per questo processo, quale equazione mette in relazione la pressione e il volume nelle situazioni A e B ? **1.5**

For an adiabatic process we have $PV^\gamma = \text{constant}$. 1

So, one finds $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$. 0.5

As long as the latter is given, full points are awarded.

Parte C. Ritorno all'equilibrio termico **2.5**

Dopo un po', il sistema raggiunge nuovamente l'equilibrio termico rispetto all'esterno. Si ottengono pressione e volume $(P_C, V_C) = (P_0 + h_C, V_{\text{tot}})$, con $h_C = 3.61\text{ mmHg}$.

i. Che tipo di processo termodinamico avviene tra le situazioni B e $C = (P_C, V_C)$? Perché? **0.5**

The process is isochoric. 0.25

The reason is that the volume does not change between situations B and C . 0.25

ii. Qual è la temperatura T_C nella situazione C ? **0.5**

As the system has thermalized with the exterior, the temperature is the ambient temperature, namely $T_C = 12.5^\circ\text{C}$. 0.5

iii. Con quale equazione si possono mettere in relazione la pressione e il volume nelle situazioni A e C ? **1.5**

We note that the temperature in case A is the same as the temperature in case C , since the initial pumping is an isothermic process. 0.5

With this, we can use the ideal gas law to write $P_A V_A = P_C V_C$. 1

Parte D. Trovare l'indice adiabatico **9.25**

Possiamo ora considerare il processo complessivo per determinare l'indice adiabatico γ dalle misure e dai risultati precedenti.

i. Disegnare schematicamente in un diagramma $P - V$ i processi termodinamici che agiscono sul nostro sistema di moli n dal passo A a C . **1.25**

The diagram should schematically look like this:

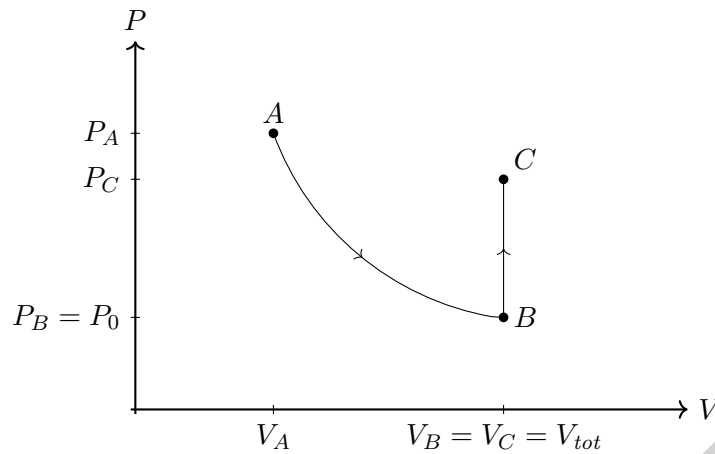


Figura D.1: P - V diagram of the experiment

The diagram axes are properly named as V and P (or p), respectively. 0.25

The ordering $P_A > P_C > P_B$ is respected. 0.25

The ordering $V_A < V_B = V_C$ is respected. 0.25

The adiabatic expansion has qualitatively the correct shape (a curved convex line). 0.25

The direction of the processes is shown and correct. 0.25

Remove 0.5 points if a line connects C and A (with a minimum of 0 points for the question).

ii. Usate le equazioni delle parti precedenti per esprimere $\frac{P_0+h_A}{P_0}$ in funzione di (e includendo tutti) P_0, h_A, h_C e γ . 2

We recall from the previous parts that $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ and $P_A V_A = P_C V_C$.

From $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ we find

$$(P_0 + h_A) V_A^\gamma = P_0 V_{\text{tot}}^\gamma$$

which gives

$$\frac{P_0 + h_A}{P_0} = \left(\frac{V_{\text{tot}}}{V_A} \right)^\gamma.$$

1

From $P_A V_A = P_C V_C$ we get

$$\frac{V_{\text{tot}}}{V_A} = \frac{P_0 + h_A}{P_0 + h_C}$$

0.5

Combining both equations gives

$$\frac{P_0 + h_A}{P_0} = \left(\frac{P_0 + h_A}{P_0 + h_C} \right)^\gamma$$

.

iii. Notando che $h_A \ll P_0$ e $h_C \ll P_0$ (\ll significa «molto più piccolo di»), semplificate l'espressione per $\frac{P_0+h_A}{P_0}$.

Suggerimento: per $x \ll 1$, si può approssimare $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$.

Suggerimento: si possono trascurare $\left(\frac{h_A}{P_0}\right)^2$, $\left(\frac{h_C}{P_0}\right)^2$, $\frac{h_A h_C}{P_0^2}$ e i termini di ordine superiore.

We can start by rewriting the right-hand side of the previous answer in a way that we can use the given Taylor expansion:

$$\left(\frac{P_0+h_A}{P_0+h_C}\right)^\gamma = \left(1+\frac{h_A}{P_0}\right)^\gamma \left(1+\frac{h_C}{P_0}\right)^{-\gamma}$$

Applying the Taylor's expansion then gives (keeping only terms linear in $\frac{h_A}{P_0}$ and $\frac{h_C}{P_0}$)

$$\left(\frac{P_0+h_A}{P_0+h_C}\right)^\gamma \approx \left(1+\gamma\frac{h_A}{P_0}\right)\left(1-\gamma\frac{h_C}{P_0}\right) \approx 1+\gamma\frac{h_A-h_C}{P_0}.$$

We end up with

$$\frac{P_0+h_A}{P_0} = 1+\gamma\frac{h_A-h_C}{P_0}.$$

iv. Utilizzando i risultati precedenti, esprimere l'indice adiabatico γ in funzione di h_A e h_C .

Isolating γ we find

$$\gamma = \frac{h_A}{h_A-h_C}.$$

v. Calcolare numericamente l'indice adiabatico γ a partire dalle misure fornite.

Using the given numerical values for P_0 , P_0+h_A and h_C , one finds

$$\gamma = \frac{780.31 - 766.50}{780.31 - 766.50 - 3.61} \approx 1.35.$$

vi. Dal teorema di equipartizione, è possibile ricavare che $C_V = \frac{f}{2}R$ e $C_P = \frac{f+2}{2}R$, dove f è il numero di gradi di libertà consentiti per le molecole del gas. Il gas qui studiato ha $f = 5$ gradi di libertà. Qual è la differenza relativa tra i valori teorici e quelli sperimentali dell'indice adiabatico γ ?

Using the definition of γ we find $\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1.4$. This gives a relative difference $\frac{\gamma_{th}-\gamma_{exp}}{\gamma_{th}} = 3.6\%$.

vii. Quali potrebbero essere le ragioni di questa differenza?

If at least two of the following reasons is mentioned, or any other meaningful potential reason is mentioned, then the full points are obtained.

The discrepancy could come from: the statistical uncertainty in the measurements, a systematic uncertainty due to a wrong assumption (the process $A \rightarrow B$ might not be fully adiabatic, the change of volume due to the pressure changes in the manometer might not be negligible, the initial compression might not be fully isothermic, ...), etc.

Problema lungo 2.3: Carica immagine

16

Un problema molto comune in elettrostatica è quello di determinare il potenziale elettrico di un sistema composto da cariche puntiformi e conduttori di varia forma. In questo esercizio svilupperemo un metodo, il cosiddetto metodo della carica immagine, per semplificare notevolmente tali problemi nei casi con una simmetria appropriata. In questo esercizio consideriamo il sistema di unità SI.

Parte A. Potenziale elettrico e conduttori

2.25

In questa prima parte parleremo delle gabbie di Faraday.

i. Scrivere il potenziale elettrico V dovuto a una carica puntiforme q in funzione della distanza r dalla carica.

0.25

The potential is given by $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$.

0.25

ii. Scrivere il potenziale elettrico V dovuto a N cariche puntiformi q_i , i in $1, 2, \dots, N$, in funzione delle distanze r_i da ciascuna carica q_i .

0.5

The total potential is given by the sum of the individual potentials: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$.

0.5

iii. Considerate la situazione mostrata in Fig. B.1. Che cosa si può dire del potenziale elettrico sulla superficie del materiale conduttore collegato a terra?

As we have a grounded conductor, the potential on the surface must vanish, so $V = 0$ on the conductor.

0.5

iv. Durante un temporale, è più sicuro rimanere in auto o stare all'aperto? Perché? Argomentate utilizzando la risposta alla domanda precedente.

1

It is safer to stay in one's car, because the metallic hull of the car is a grounding conducting surface for which $V = 0$ holds such that its inside is protected against lightning.

1

Parte B. Carica immagine con un conduttore piano

4.25

Consideriamo nuovamente la situazione illustrata nella Fig. B.1. L'obiettivo di questa parte è determinare il potenziale elettrico in qualsiasi punto al di sopra del piano. A tale scopo, è possibile utilizzare un trucco che semplifica notevolmente la situazione. L'idea è quella di introdurre una carica immaginaria «specchio» per riprodurre le condizioni al contorno poste dal materiale conduttore.

In elettrostatica, se due sistemi fisici hanno potenziali con le stesse condizioni al contorno, le due situazioni sono fisicamente equivalenti.

Quindi, per determinare il potenziale elettrico di questo sistema, vorremmo trovare un altro sistema più semplice per descrivere il suo potenziale.

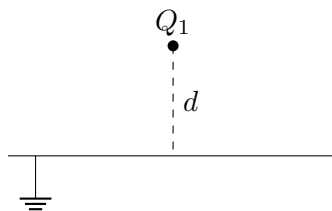


Figura B.1: Conduttore piano a massa infinitamente lungo con una carica Q_1 in una posizione $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, d)$.

i. Quali sono le condizioni al contorno per il potenziale elettrostatico V di questo sistema? **0.25**

As seen in the previous part, the potential must satisfy $V = 0$ on the grounded conducting surface. 0.25

ii. Immaginiamo un secondo sistema fisico con la stessa carica Q_1 nella stessa posizione \vec{r}_1 della Fig. B.1 ma senza il piano conduttore. Il nostro obiettivo è trovare una configurazione con una seconda carica Q_2 nella posizione \vec{r}_2 che abbia le stesse condizioni al contorno della Fig. B.1. Quali dovrebbero essere i valori di Q_2 e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ perché ciò avvenga? Perché? **1.5**

By symmetry, we can expect the mirror charge to lie at position $\vec{r}_2 = (0, 0, -d)$. 0.5

If the mirror charge lies at $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, -d)$ we can check that picking $Q_2 = -Q_1$ indeed satisfies the boundary conditions. 0.5

Indeed, this must be the case by symmetry. One could also check it explicitly using the result from Aii. 0.5

iii. Utilizzando i risultati precedenti, calcolare il potenziale elettrico $V(x, y, z)$ al di sopra del suolo nel sistema di Fig. B.1 in funzione delle coordinate (x, y, z) , della distanza d e della carica Q_1 . L'espressione può essere lasciata come somma di due termini, non è necessario semplificarla completamente. **1**

The resulting potential in the charge-plane conductor system must be the same as the charge-mirror charge system, so we obtain for $\vec{r} = (x, y, z)$

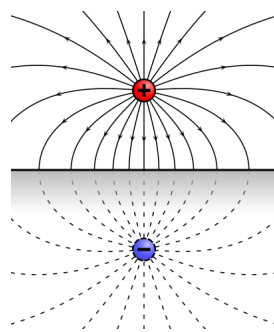
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{Q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right].$$

1

The solution could be written in a different form as long as the potential is written explicitly as a function of the required quantities.

iv. Disegnare schematicamente il sistema di conduttori di Fig. B.1 con le linee di campo corrispondenti, assumendo che $Q_1 > 0$ (in uno schizzo separato, non sul foglio del problema). **1.5**

The drawing should qualitatively look like the upper half of the following image. The lower half should contain no field lines.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFpt_imagecharge_plane_horizontal_plusminus.svg

The field lines should flow from the positive charge to the conductor. 0.5

The field lines should stop at the level of the conductor. 0.5

The field lines at the level of the conductor should be perpendicular to its surface. 0.5

Parte C. Carica immagine ad angolo retto 5.5

Considereremo ora geometrie di conduttori più complesse.

i. Consideriamo il sistema mostrato in Fig. C.1. Qual è il numero N di cariche speculari necessarie per riprodurre le condizioni limite del conduttore? Quali sono i loro valori Q_i e le loro posizioni $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2, \dots, N$? Perché?

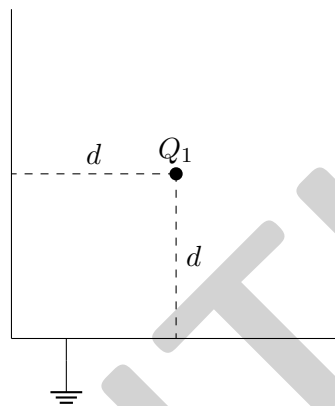


Figura C.1: Due semipiani conduttori infinitamente lunghi messi a terra ad angolo retto con una carica Q_1 nella posizione $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (d, 0, d)$.

2.5

We want the potential to vanish on the conductor plates.

By symmetry considerations, we can convince ourselves that the mirror charges should lie at the positions $\vec{r}_2 = (-d, 0, d)$, $\vec{r}_3 = (-d, 0, -d)$ and $\vec{r}_4 = (d, 0, -d)$. 0.5

Similarly, we can expect to have $Q_2=Q_4$. 0.5

After some trial and error, one can notice that the choice $Q_2 = Q_4 = -Q_1$ and $Q_3 = Q_1$ leads to a vanishing potential on the conducting plates. 0.5

Indeed, by saying that r_i is the distance from the position \vec{r} to the charge i , we have

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_1}{r_2} + \frac{Q_1}{r_3} - \frac{Q_1}{r_4} \right].$$

On the vertical plate, we have $r_1 = r_2$ and $r_3 = r_4$ such that indeed $V = 0$. On the horizontal plate we have $r_1 = r_4$ and $r_2 = r_3$ so we also have a vanishing potential. 1

A more explicit computation making less explicit use of symmetries, or a more implicit reasoning with the symmetries is fine as long as the reasoning is correct and indeed shows that the choice is the correct one.

ii. Qual è il potenziale corrispondente $V(x, y, z)$ in funzione delle coordinate (x, y, z) , della distanza d e della carica Q_1 ? L'espressione può essere lasciata come somma di termini N , non è necessario semplificarla completamente.

1

With the charges and positions from the previous question, we find the potential

$$V(x, y, z) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + (z+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]. \tag{C.2}$$

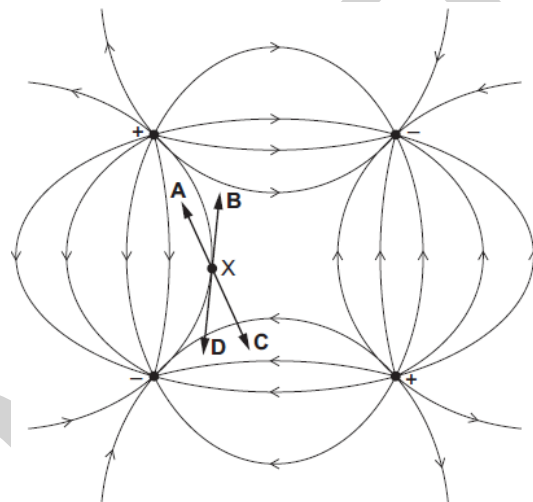
1

The solution could be written in a different form as long as the potential is written explicitly as a function of the required quantities.

iii. Disegnare schematicamente il sistema carica-mezzo piano-conduttore con le linee di campo corrispondenti, assumendo che $Q_1 < 0$ (in uno schizzo separato, non sul foglio del problema).

2

The drawing should qualitatively look like the following image (do not consider the A, B, C, D arrows and the point X), but with the field lines stopping at the level of the two half-plane conductors.



<https://physics-ref.blogspot.com/2019/01/the-diagram-shows-electric-field.html>

The field lines flow from positive to negative charges. 0.5

There is no straight line between the charge Q_1 and the charges Q_2 and Q_4 . 0.5

The field lines stop at the level of the conductors. 0.5

The overall shape is qualitatively similar to the picture above. 0.5

Parte D. Cariche dello specchio circolare

4

i. Consideriamo ora il sistema mostrato in Fig. D.1. Si scopre che è necessaria una sola carica speculare per riprodurre le condizioni al contorno corrispondenti. Qual è il suo valore Q_2 e la sua posizione $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$?

Suggerimento: si può usare senza prova che un potenziale che soddisfa le condizioni al contorno appropriate nelle posizioni $(r, 0, 0)$ e $(-r, 0, 0)$ soddisfa le condizioni al contorno sull'intera sfera.

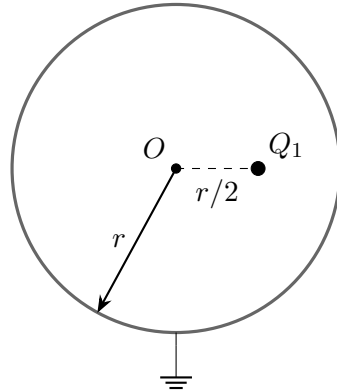


Figura D.1: Conduttore sferico a massa di raggio r con centro O in posizione $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ e carica Q_1 in posizione $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (r/2, 0, 0)$. Qui vediamo una fetta a $y = 0$ della sfera nel piano xz .

2.5

By symmetry considerations, we expect the mirror charge to lie on the x -axis.

0.5

Using the hint, we consider the position $(r, 0, 0)$ where the potential should vanish. This gives us the condition

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{r/2} + \frac{Q_2}{|x_2 - r|} \right] = 0.$$

One can convince oneself qualitatively that having $x_2 - r < 0$ cannot lead to the appropriate boundary conditions on the full sphere. We then get

$$\frac{Q_2}{x_2 - r} = -\frac{2Q_1}{r}.$$

0.5

Considering now the position $(-r, 0, 0)$ we obtain the condition

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{3r/2} + \frac{Q_2}{x_2 + r} \right] = 0,$$

which gives

$$\frac{Q_2}{x_2 + r} = -\frac{2Q_1}{3r}.$$

0.5

With the first condition we have $Q_2 = -2Q_1 \frac{x_2 - r}{r}$, which we can insert in the second condition to obtain

$$\frac{2Q_1}{r} \frac{x_2 - r}{x_2 + r} = \frac{2Q_1}{3r}$$

and thus

$$x_2 - r = \frac{x_2 + r}{3},$$

which finally gives

$$x_2 = 2r.$$

The position of the mirror charge is thus $(x_2, y_2, z_2) = (2r, 0, 0)$. Inserting this back in the first conditions we also get $Q_2 = -2Q_1$.

1

A more explicit computation making less explicit use of symmetries, or a more implicit reasoning with the symmetries is fine as long as the reasoning is correct and indeed shows that the choice is the correct one.

ii. Qual è il potenziale corrispondente $V(x, y, z)$ in funzione delle coordinate (x, y, z) , del raggio r e della carica Q_1 ? L'espressione può essere lasciata come somma di due termini, non è necessario semplificarla completamente.

1.5

Using our previous results, we find

$$V(x, y, z) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - r/2)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x - 2r)^2 + y^2 + z^2}} \right].$$

1.5

The solution could be written in a different form as long as the potential is written explicitly as a function of the required quantities.