



**PHYSICS.
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Deuxième tour

17 janvier 2024

Partie 1 : 21 questions à choix multiple

Durée : 60 minutes

Total : 21 points (21×1)

Moyens autorisés : Calculatrice simple

Matériel pour écrire et dessiner

Bonne chance !

Supported by :



Constantes fondamentales

Fréquence hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse d'un rayonnement	K_{cd}	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Constante magnétique	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Constante des gaz	R	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Multiple Choice

Durée : 60 minutes

Cotation : 21 points (1 point par réponse correcte)

- Les questions à choix multiple (**MC**) comportent plusieurs réponses, dont **une seule** est correcte. Si vous sélectionnez la bonne réponse (et seulement celle-là) sur la feuille-réponse, vous obtenez un point, sinon zéro.

Question 1.1 (MC)

Quelle est approximativement la masse de l'eau contenue dans le Léman ?

- A) 1×10^{12} kg B) 1×10^{14} kg
C) 1×10^{16} kg D) 1×10^{18} kg

Question 1.2 (MC)

Les étoiles se forment par l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz. Le nuage s'effondre si son rayon dépasse une limite appelée longueur de Jeans λ . Pour un nuage de température T , de masse volumique ρ et constitué de molécules de masse m , comment λ est-elle définie ?

- A) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B T m \rho}{4\pi G}}$ B) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B m \rho}{4\pi G T}}$
C) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B T}{4\pi G m \rho}}$ D) $\lambda = \sqrt{\frac{15k_B}{4\pi G T m \rho}}$

Question 1.3 (MC)

Calculez $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ pour $r > 0$.

- A) 0 B) $\frac{\pi r^2}{2}$ C) $\frac{r^2}{2}$
D) $\frac{\pi r^2}{4}$ E) $\frac{r^2}{\sin(1)}$ F) $2\pi r$

Question 1.4 (MC)

Considérons deux vecteurs \vec{v} et $\vec{\omega}$. L'angle entre les deux vecteurs est θ , et v et ω sont les normes de \vec{v} et $\vec{\omega}$, respectivement. Quelle est la norme de $(\vec{v} + \vec{\omega}) \times (\vec{\omega} + \vec{v})$?

- A) 0 B) $v^2 + 2\omega v \sin(\theta) + \omega^2$
C) $v^2 + 2\omega v + \omega^2$ D) $2\omega v \sin(\theta)$
E) $2\omega v$ F) $\sin(\theta) (v^2 + 2\omega v + \omega^2)$

Question 1.5 (MC)

Deux boules de masses respectives m_a et m_b entrent en collision. Les boules sont restreintes à une dimension (ce qui signifie qu'elles continuent de se déplacer le long du même axe après la collision). À l'origine, A se déplaçait à la vitesse \vec{v} et B était au repos. Après la collision, A continue de se déplacer à une vitesse d'environ $\|\vec{v}\|$. Laquelle (lesquelles) des affirmations suivantes peut (peuvent) être vraie(s) ? Supposez que les boules subissent une collision élastique sans force extérieure.

($p \ll q$ ($p \gg q$) signifie que p est beaucoup plus petit (plus grand) que q)

I: $m_a = m_b$, II: $m_a \ll m_b$, III: $m_a \gg m_b$

- A) Aucune d'elles B) Uniquement I
C) Uniquement II D) Uniquement III
E) Uniquement II et III F) I, II et III

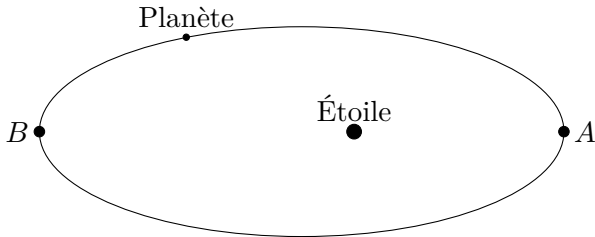
Question 1.6 (MC)

Une orbite géostationnaire est une orbite de même période que la rotation de la Terre sur son propre axe. Quelle est l'altitude h depuis le sol d'un satellite sur une telle orbite, en supposant que la masse de la Terre est $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg, que son rayon est $R = 6370$ km et que le satellite a une masse de 600 kg ? Vous pouvez supposer que l'orbite est circulaire.

- A) 720 km B) 36 000 km
C) 42 000 km D) 87 000 km

Question 1.7 (MC)

Considérez une planète massive orbitant autour d'une étoile selon une orbite elliptique telle que montrée sur le diagramme. Supposez que ce système est isolé et que la seule interaction est l'attraction gravitationnelle entre l'étoile et la planète.



Laquelle des propositions suivantes décrit correctement l'énergie cinétique de l'étoile et l'énergie potentielle gravitationnelle du système lorsque la planète est au point A (K_A, U_A) et au point B (K_B, U_B) ?

- A) $K_A > K_B$ et $U_A > U_B$
- B) $K_A > K_B$ et $U_A < U_B$
- C) $K_A < K_B$ et $U_A > U_B$
- D) $K_A < K_B$ et $U_A < U_B$
- E) $K_A = K_B$ et $U_A < U_B$
- F) $K_A = K_B$ et $U_A = U_B$

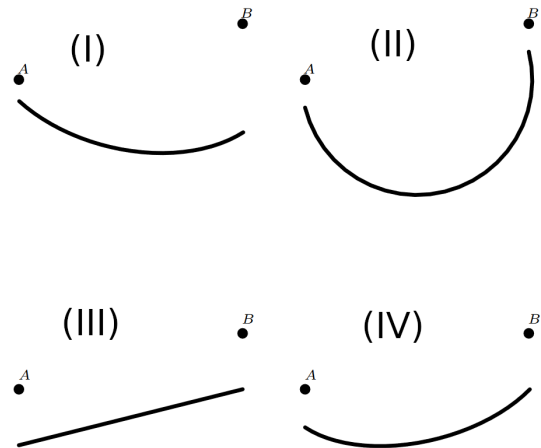
Question 1.8 (MC)

Bob est parti sur un lac dans un petit bateau. Pour une certaine raison, il a emporté une boule de bowling de masse 6 kg et rayon 10 cm avec lui. Il se demande maintenant ce qui arriverait au niveau de l'eau s'il venait à laisser tomber la boule dans l'eau. Le volume des trous de la boule de bowling peut être négligé.

- A) Le niveau de l'eau baisserait.
- B) Le niveau de l'eau resterait identique.
- C) Le niveau de l'eau monterait.
- D) Les informations données ne sont pas suffisantes.

Question 1.9 (MC)

On considère une corde inélastique de longueur L attachée à deux points A et B immobiles séparés d'une distance $D < L$. Sur cette corde on place une poulie qui peut se déplacer librement sans frottement le long de la corde et à laquelle laisse pendre une masse m (similairement à un collier muni d'un pendentif). On suppose que la corde reste tendue. Laquelle des trajectoires suivantes le point matériel peut-il suivre ?



- A) I B) II C) III D) IV

Question 1.10 (MC)

On dispose de deux lentilles minces de focales de valeur absolue 40 mm et 60 mm, respectivement. On souhaite créer un système afocal, c'est-à-dire que les rayons parallèles entrant dans le système ressortent également parallèles. À quelle distance l'une de l'autre doit-on placer les deux lentilles pour réaliser un tel système ?

- A) 0 mm B) 20 mm C) 40 mm
- D) 50 mm E) 60 mm F) 100 mm
- G) Cela dépend des lentilles.

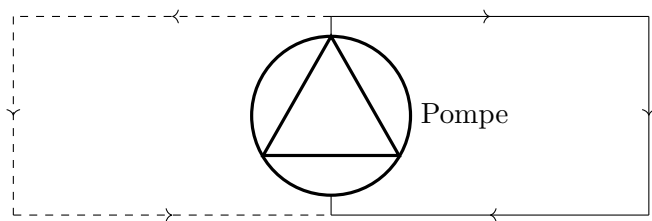
Question 1.11 (MC)

Le parc carré est une zone de loisirs de 1000 m par 1000 m. La moitié nord est couverte d'eau, la moitié sud est une pelouse. Alice se trouve dans le coin sud-ouest de la zone. Elle souhaite aller rencontrer son ami Bob, qui se trouve au coin nord-est. Elle court à une vitesse de $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et nage à une vitesse de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Selon quel angle (dans le sens horaire, zéro pointant vers le nord) devrait-elle commencer de courir, si elle veut y arriver le plus rapidement possible ?

- A) 0° B) 10.10° C) 45°
- D) 61.24° E) 63.43°

Question 1.12 (MC)

Considérez un système de circulation d'eau constitué d'un tuyau de 10 m de long et d'une pompe. On note le débit de l'eau dans le système R_0 . Lorsqu'un second tuyau de 10 m est ajouté à la pompe en parallèle (ligne traitillée), le débit de l'eau à travers la pompe passe à R_1 . Quel est le rapport $\frac{R_1}{R_0}$, en supposant que la puissance de pompage reste constante ? La perte de pression le long du tuyau peut être approximée comme proportionnelle à la longueur du tuyau et à la vitesse de l'eau.



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2}$ D) 2

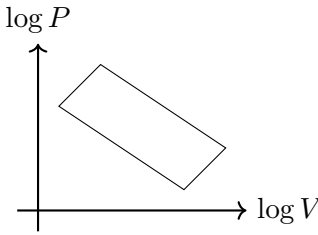
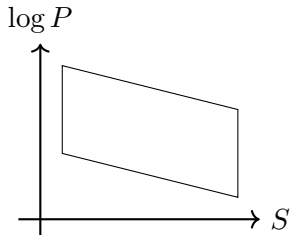
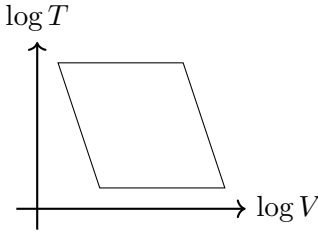
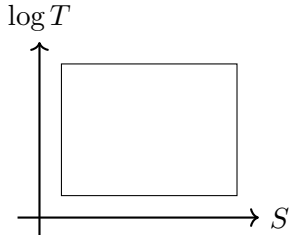
Question 1.13 (MC)

Quelle est la moyenne de la valeur absolue de la vitesse le long de l'axe x des particules de masse m d'un gaz parfait de température T ?

- A) $\frac{3}{2}k_B T$ B) $\frac{1}{2}k_B T$ C) $\frac{3k_B T}{m}$
- D) $\frac{k_B T}{m}$ E) $\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ F) $\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

Question 1.14 (MC)

Lequel de ces diagrammes ne peut pas représenter un cycle de Carnot ?

- A) 
- B) 
- C) 
- D) 

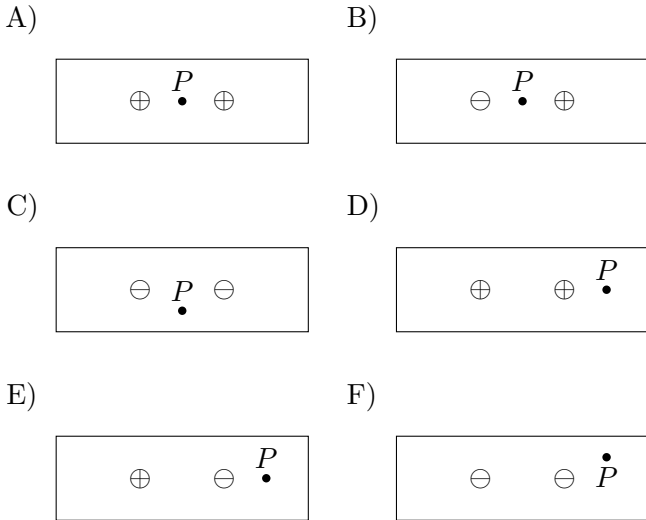
Question 1.15 (MC)

Considérons une boule creuse de cuivre de rayon $R > 0$ et d'épaisseur finie $0 < d < R$ immergée dans l'eau. Initialement, aucune force résultante n'agit sur elle. La boule est chauffée, sans que la température de l'eau environnante ne change. Qu'est-ce qui décrit exactement ce qui se passera (et pourquoi) ?

- A) La boule commencera à se déplacer vers le haut car sa masse diminue.
- B) La boule commencera à se déplacer vers le haut car son volume augmente.
- C) La boule commencera à se déplacer vers le bas car sa masse augmente.
- D) La boule commencera à se déplacer vers le bas car son volume diminue.
- E) Il ne se passera rien, la température de la boule ne change pas les forces qui agissent sur elle.
- F) La boule commencera à osciller autour de sa position initiale.

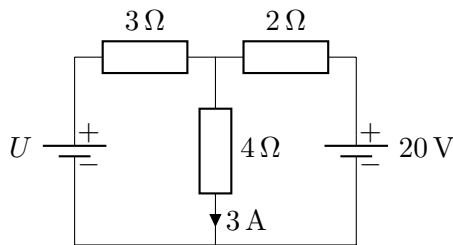
Question 1.16 (MC)

Parmi les configurations suivantes, laquelle a la plus grande valeur de champ électrique au point P ? Ici, les symboles \oplus et \ominus représentent des charges ponctuelles de valeur $+|Q|$ et $-|Q|$, respectivement.



Question 1.17 (MC)

Quelle est la tension de la pile à gauche du diagramme ?



- A) 0 V B) 9 V C) 12 V D) 15 V E) 30 V
- F) Ce circuit contient un court-circuit.

Question 1.18 (MC)

Considérez deux plaques parallèles infinies, chargées positivement et de densité de charge égale. Le point central M entre les deux plaques est-il un point d'équilibre? Si oui, de quel type d'équilibre s'agit-il ?

- A) M n'est pas un point d'équilibre.
- B) M est un point d'équilibre stable.
- C) M est un point d'équilibre instable.
- D) M est un point d'équilibre neutre.

Question 1.19 (MC)

Une particule chargée de masse m et de charge q se déplace à la vitesse \vec{v} , parallèlement à un champ magnétique d'intensité B . Quelle est l'accélération (module et direction) de la particule ?

- A) 0
- B) Bqv , perpendiculaire à la vitesse
- C) Bqv , parallèle à la vitesse
- D) $\frac{Bqv}{m}$, perpendiculaire à la vitesse
- E) $\frac{Bqv}{m}$, parallèle à la vitesse
- F) $\frac{Bq}{m}$, parallèle au champ magnétique

Question 1.20 (MC)

Une masse est attachée à un ressort horizontal sur une surface sans frottement. Elle est déplacée d'une distance de 1 m par rapport à sa position d'équilibre. Après avoir été relâchée, elle revient à sa position d'équilibre pour la première fois après $t = 1$ s. La résistance de l'air est négligeable. Quelle était la norme de son accélération lorsqu'elle a été relâchée ?

- A) $a = 2\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ B) $a = 2\pi\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- C) $a = \frac{1}{16}\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ D) $a = \frac{\pi^2}{4}\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- E) $a = \frac{\pi}{2}\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ F) $a = 4\pi^2\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Question 1.21 (MC)

Vous vous trouvez dans une pièce ensoleillée et vous observez une très petite particule de poussière suspendue dans l'air, juste devant un haut-parleur qui diffuse de la musique très forte. Le haut-parleur est orienté horizontalement. De quelle manière voyez-vous la particule de poussière se déplacer ?



- A) Vers le haut et le bas.
- B) Vers la gauche et la droite.
- C) S'éloignant continuellement du haut-parleur.
- D) Pas de déplacement.

Multiple Choice : feuille-réponse

Donnez vos réponses dans les cases prévues à cet effet sur cette page.

Nom :	Prénom :	Total :
--------------	-----------------	----------------

	A	B	C	D	E	F	G
Question 1.1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 1.11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
Question 1.12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			

Multiple Choice : solutions

	A	B	C	D	E	F	G
Question 1.1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.6	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.7	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.8	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			
Question 1.10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Question 1.11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
Question 1.12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
Question 1.14	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
Question 1.15	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.16	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.17	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			
Question 1.19	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Question 1.21	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			



**PHYSICS.
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Deuxième tour

17 janvier 2024

Partie 2 : 3 problèmes longs

Durée : 120 minutes

Total : 48 points (3×16)

Moyens autorisés : Calculatrice simple

Matériel pour écrire et dessiner

Bonne chance !

Supported by :



Constantes fondamentales

Fréquence hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse d'un rayonnement	K_{cd}	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Constante magnétique	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Constante des gaz	R	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Problèmes longs

Durée : 120 minutes

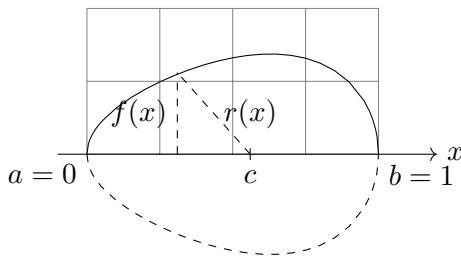
Cotation : 48 points (3 × 16)

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.

Problème long 2.1: Stabilité d'un œuf (16 points)

On considère un œuf représenté par un solide de révolution homogène de profil $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - x^4}$ sur le domaine $x \in [a = 0, b = 1]$. Les unités de longueur sont arbitraires.



Partie A. Centre de gravité et rayon (4.5 points)

Le centre de gravité c d'un solide de révolution se trouve sur son axe et peut être calculé en le découpant en disques d'épaisseur infinitésimale dx et de volume $\pi f^2(x) dx$:

$$c = \frac{1}{V} \int_a^b x \pi f^2(x) dx,$$

où V est le volume du solide.

- i. (3 pt)** Calculez c pour l'œuf.
- ii. (0.5 pt)** Si l'on avait choisi un autre facteur que $\frac{1}{2}$ dans le profil $f(x)$ de l'œuf, quel aurait été l'impact sur la valeur de c ? Justifiez.
- iii. (1 pt)** Trouvez une expression pour le « rayon » $r(x)$ de l'œuf, c'est-à-dire la distance entre le centre de gravité et un point $(x, f(x))$ à la surface de l'œuf. Le résultat devrait être de la forme $\sqrt{P(x)}$, où $P(x)$ est un polynôme.

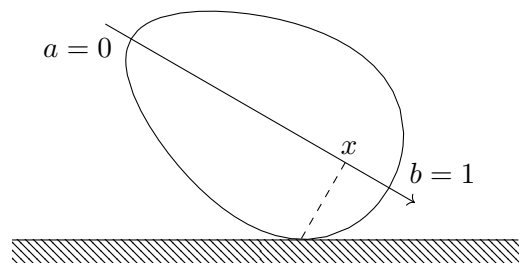
Partie B. Intermède analytique (3 points)

Soit une fonction dérivable strictement positive $g(x) > 0$.

- i. (2 pt)** Développez $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$, la dérivée de la racine carrée de $g(x)$.
- ii. (1 pt)** Montrez que le signe de $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$ est toujours égal à celui de $\frac{dg(x)}{dx}$.

Partie C. Stabilité de l'œuf posé (8.5 points)

On va maintenant poser l'œuf sur une surface horizontale et l'on repère l'endroit de l'œuf en contact avec la surface par sa coordonnée x .



- i. (2 pt)** Les positions $a = 0$ et $b = 1$ sont des positions d'équilibre, du fait de la symétrie de révolution. Déterminez la stabilité de ces deux positions à partir de l'expression $r(x)$ trouvée en A.iii. et en vous aidant du résultat montré en B.ii.
- Il existe une position $a < s < b$ où l'œuf couché sur son flanc est en équilibre stable.
- ii. (1 pt)** Quelle est la particularité de $r(s)$?
- iii. (1.5 pt)** Trouvez une équation polynomiale pour s .
- Malheureusement, cette équation polynomiale n'est pas (facilement) résoluble. On va donc en chercher une approximation par développement de Taylor.
- iv. (1 pt)** Choisissez un bon point de départ t pour le développement. Justifiez votre choix.
- v. (2 pt)** Développez l'équation polynomiale autour du t choisi jusqu'au premier ordre pour obtenir une équation affine.
- vi. (1 pt)** Trouvez la solution \tilde{s} de cette nouvelle équation et calculez également $r(\tilde{s})$.

Problème long 2.2 : Expérience de Clément-Desormes (16 points)

L'expérience de Clément-Desormes est une expérience thermodynamique utilisée pour déterminer l'indice adiabatique $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ d'un gaz parfait, où C_P et C_V sont les capacités thermiques à pression constante et volume constant, respectivement. Elle se compose d'un récipient rempli du gaz étudié, coupé à une vanne, un manomètre (p.ex. à mercure) et une pompe, voir la figure. Les trois étapes de l'expérience consistent tout d'abord à augmenter la pression du gaz à l'aide de la pompe, puis d'évacuer l'excès de pression par la vanne et finalement d'attendre que le gaz thermalise. Dans ce qui suit, nous considérerons le système contenant les n moles de gaz restantes dans le récipient après l'évacuation de la pression (initialement, le récipient contient plus de n moles de gaz).

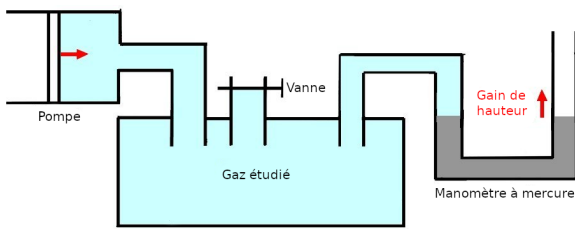


Figure 1 : Représentation schématique de l'expérience de Clément-Desormes.

Partie A. Manomètres à mercure (2.25 points)

Un manomètre à mercure utilise des changements dans la hauteur d'une colonne de mercure pour déterminer la pression d'un gaz, voir la figure. De par ce fait, le millimètre de mercure, noté mmHg, est devenu une unité de pression. Il est défini comme la pression hydrostatique générée par une colonne de mercure d'un millimètre de haut à une température de 0°C .

i. (0.5 pt) Quelle est la pression hydrostatique d'une colonne de fluide de masse volumique ρ et de hauteur h ?

ii. (0.75 pt) Que vaut 1 bar exprimé en mmHg ? La masse volumique du mercure à pression ambiante et température $T = 0^\circ\text{C}$ est de $13.595 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

iii. (1 pt) Pourquoi le mercure est-il particulièrement pratique pour construire de tels manomètres en comparaison d'autres liquides ?

Partie B. Pompage et évacuation (2 points)

On commence par utiliser la pompe pour augmenter la pression du gaz à partir de (P_0, V_0) jusqu'à (P_A, V_{tot}) de façon isotherme, où $P_A = P_0 + h_A = 780.31 \text{ mmHg}$ et V_{tot} est le volume total du récipient de gaz, dont on suppose qu'il va rester constant pour le restant de l'expérience. Le volume (partiel) des n moles à ce stade est $V_A < V_{\text{tot}}$. À ce stade, nous avons donc la pression et le volume (P_A, V_A) pour les n moles de gaz considérées. On ouvre alors rapidement la vanne pour laisser une partie du gaz s'échapper et annuler la surpression, et on referme la vanne tout de suite après. Le tube du manomètre est arbitrairement fin, ainsi le changement de volume nécessaire pour modifier la hauteur du mercure est négligeable. Il ne reste alors que nos n moles de gaz à la pression et au volume $(P_B, V_B) = (P_0, V_{\text{tot}})$. La température ambiante est $T_0 = 12.5^\circ\text{C}$ et la pression ambiante est $P_0 = 766.50 \text{ mmHg}$.

i. (0.5 pt) Quel est le type de processus thermodynamique à l'œuvre entre les situations $A = (P_A, V_A)$ et $B = (P_B, V_B)$? Pourquoi ?

ii. (1.5 pt) Pour un tel processus, quelle est l'équation qui relie la pression et le volume dans les situations A et B ?

Partie C. Retour à l'équilibre thermique (2.5 points)

Après un certain temps, le système retrouve l'équilibre thermique par rapport à l'extérieur. On a alors une pression et un volume $(P_C, V_C) = (P_0 + h_C, V_{\text{tot}})$, avec $h_C = 3.61 \text{ mmHg}$.

i. (0.5 pt) Quel est le type de processus thermodynamique à l'œuvre entre les situations B et $C = (P_C, V_C)$? Pourquoi ?

ii. (0.5 pt) Quelle est la température T_C dans la situation C ?

iii. (1.5 pt) Quelle équation permet de relier la pression et le volume dans les situations A et C ?

Partie D. Trouver l'indice adiabatique (9.25 points)

Nous considérons maintenant le processus dans son ensemble pour déterminer l'indice adiabatique γ à partir des mesures et résultats précédents.

i. (1.25 pt) Dessinez schématiquement dans un diagramme P - V les processus thermodynamiques agissant sur notre système de n moles de l'étape A à C .

ii. (2 pt) Utilisez vos équations des parties précédentes pour exprimer $\frac{P_0+h_A}{P_0}$ en fonction de P_0 , h_A , h_C et γ (et en les incluant tous).

iii. (2.5 pt) En remarquant que $h_A \ll P_0$ et $h_C \ll P_0$ (\ll signifie « beaucoup plus petit que »), simplifiez votre expression pour $\frac{P_0+h_A}{P_0}$.

Indice : pour $x \ll 1$, on peut approximer $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

Indice : vous pouvez négliger $\left(\frac{h_A}{P_0}\right)^2$, $\left(\frac{h_C}{P_0}\right)^2$, $\frac{h_A h_C}{P_0^2}$ et les termes d'ordre supérieur.

iv. (1 pt) Sur la base de vos résultats précédents,

exprimez l'indice adiabatique γ en fonction de h_A et h_C .

v. (1 pt) Calculez numériquement l'indice adiabatique γ pour les mesures données.

vi. (1 pt) En partant du théorème d'équipartition, il est possible de déduire que $C_V = \frac{f}{2}R$ et $C_P = \frac{f+2}{2}R$, où f est le nombre de degrés de liberté permis dans les molécules de gaz. Le gaz étudié ici a $f = 5$ degrés de liberté. Quelle est la différence relative entre les valeurs théoriques et expérimentales de l'indice adiabatique γ ?

vii. (0.5 pt) Quelles sont des raisons possibles pour cette différence ?

Problème long 2.3: Charges miroir (16 points)

Un problème très commun en électrostatique est la détermination du potentiel électrique d'un système composé de charges ponctuelles et de conducteurs de formes diverses. Dans cet exercice, nous allons développer une astuce, appelée méthode des charges miroir ou méthode des images, qui va nous permettre de grandement simplifier ce genre de problèmes dans certains cas où la géométrie s'y prête. Dans cet exercice, nous considérons le système d'unités SI.

Partie A. Potentiel électrique et conducteurs (2.25 points)

Dans cette première partie, nous allons discuter les cages de Faraday.

- i. (0.25 pt) Écrivez le potentiel électrique V dû à une charge ponctuelle q en fonction de la distance r à la charge.
- ii. (0.5 pt) Écrivez le potentiel électrique V dû à N charges ponctuelles q_i , $i \in 1, 2, \dots, N$, en fonction des distances r_i à chaque charge q_i .
- iii. (0.5 pt) Considérez la situation de la fig. B.1. Que pouvez-vous dire du potentiel électrique à la surface du matériau conducteur mis à la terre ?
- iv. (1 pt) Lors d'un orage, est-il plus sûr de rester dans sa voiture ou dehors ? Pourquoi ? Argumentez en utilisant la réponse à la question précédente.

Partie B. Charge miroir plane (4.25 points)

Considérez à nouveau la situation illustrée sur la fig. B.1. Le but de cette partie est de déterminer le potentiel électrique en chaque point au-dessus du plan. Pour ce faire, une astuce peut être utilisée pour simplifier grandement la situation. L'idée est d'introduire une charge « miroir » imaginaire de façon à reproduire les conditions aux limites données par le matériau conducteur.

En électrostatique, si deux systèmes physiques ont des potentiels avec des conditions aux limites identiques, alors les deux situations sont identiques physiquement.

Du coup, pour déterminer le potentiel électrique de ce système, nous souhaitons trouver un autre système permettant de décrire le potentiel plus facilement.

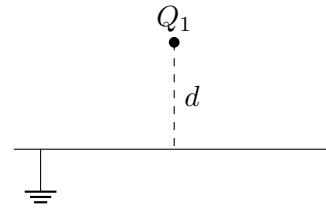


Figure B.1: Conducteur plan de longueur infinie mis à la terre et une charge Q_1 à la position $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, d)$.

- i. (0.25 pt) Quelles sont les conditions aux limites pour le potentiel électrostatique V de ce système ?
- ii. (1.5 pt) Imaginons un second système physique avec la même charge Q_1 à la même position \vec{r}_1 selon la fig. B.1, mais sans le conducteur plan. Notre but est de trouver une configuration avec une seconde charge Q_2 à la position \vec{r}_2 avec les mêmes conditions aux limites que dans la fig. B.1. Que devraient être Q_2 et $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pour que cela se vérifie ? Pourquoi ?
- iii. (1 pt) En utilisant vos résultats précédents, calculez le potentiel électrique $V(x, y, z)$ au-dessus du plan dans le système de la fig. B.1 en fonction des coordonnées (x, y, z) , de la distance d et de la charge Q_1 . L'expression peut être laissée comme somme de deux termes, elle n'a pas besoin d'être complètement simplifiée.
- iv. (1.5 pt) Dessinez schématiquement le système charge-conducteur plan de la fig. B.1 avec les lignes de champ correspondantes, en supposant que $Q_1 > 0$ (dans un croquis séparé, pas sur la feuille du problème).

Partie C. Charges miroir à angle droit (5.5 points)

Nous allons maintenant considérer des géométries de conducteur plus complexes.

- i. (2.5 pt) Considérons le système montré dans la fig. C.1. Quel est le nombre N de charges miroir nécessaires pour reproduire les conditions aux limites du conducteur ? Quelles sont leurs valeurs Q_i et leurs positions $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, N$? Pourquoi ?

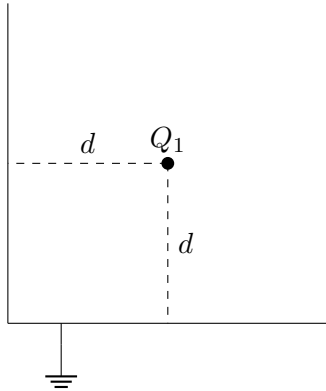


Figure C.1 : Deux conducteurs demi-plan de longueur infinie à angle droit mis à la terre et une charge Q_1 à la position $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (d, 0, d)$.

ii. (1 pt) Quel est le potentiel $V(x, y, z)$ correspondant en fonction des coordonnées (x, y, z) , de la distance d et de la charge Q_1 ? L'expression peut être laissée comme somme de N termes, elle n'a pas besoin d'être complètement simplifiée.

iii. (2 pt) Dessinez schématiquement le système charge-conducteurs demi-plan avec les lignes de champ correspondantes, en supposant que $Q_1 < 0$ (dans un croquis séparé, pas sur la feuille du problème).

Partie D. Charges miroir circulaires (4 points)

Il est également possible de définir des charges miroir pour des géométries incurvées.

i. (2.5 pt) Considérons maintenant le système montré dans la fig. D.1. Il s'avère qu'une seule charge

miroir est nécessaire pour reproduire les conditions aux limites correspondantes. Quelle est sa valeur Q_2 et sa position $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$?

Indice : vous pouvez utiliser sans preuve qu'un potentiel satisfaisant les conditions aux limites appropriées aux positions $(r, 0, 0)$ et $(-r, 0, 0)$ satisfait les conditions aux limites sur toute la sphère.

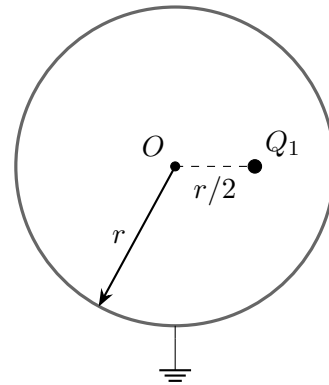


Figure D.1 : Conducteur sphérique de rayon r et centre O à la position $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ mis à la terre et une charge Q_1 à la position $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (r/2, 0, 0)$. Nous voyons ici une coupe à $y = 0$ de la sphère dans le plan xz .

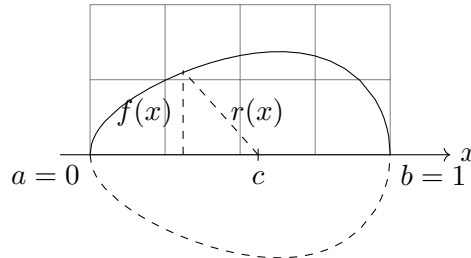
ii. (1.5 pt) Quel est le potentiel $V(x, y, z)$ correspondant en fonction des coordonnées (x, y, z) , du rayon r et de la charge Q_1 ? L'expression peut être laissée comme somme de deux termes, elle n'a pas besoin d'être complètement simplifiée.

Problèmes longs : solutions

Problème long 2.1 : Stabilité d'un œuf

16

On considère un œuf représenté par un solide de révolution homogène de profil $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - x^4}$ sur le domaine $x \in [a = 0, b = 1]$. Les unités de longueur sont arbitraires.



Partie A. Centre de gravité et rayon

4.5

Le centre de gravité c d'un solide de révolution se trouve sur son axe et peut être calculé en le découpant en disques d'épaisseur infinitésimale dx et de volume $\pi f^2(x) dx$:

$$c = \frac{1}{V} \int_a^b x \pi f^2(x) dx,$$

où V est le volume du solide.

i. Calculez c pour l'œuf.

3

Following the idea of splitting the egg into disk-shaped infinitely thin slices, the volume is given by:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Thus for the egg, we have

$$c = \frac{\int_0^1 x \frac{1}{4} (x - x^4) dx}{\int_0^1 \frac{1}{4} (x - x^4) dx} = \frac{\int_0^1 (x^2 - x^5) dx}{\int_0^1 (x - x^4) dx} = \frac{[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6]_0^1}{[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5]_0^1},$$

And finally

$$c = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}.$$

ii. Si l'on avait choisi un autre facteur que $\frac{1}{2}$ dans le profil $f(x)$ de l'œuf, quel aurait été l'impact sur la valeur de c ? Justifiez.

0.5

c wouldn't change, because the factor (squared) appears both in the numerator and in the denominator of c .

0.5

This is the same reason why the egg's density doesn't play a role, nor does π .

iii. Trouvez une expression pour le « rayon » $r(x)$ de l'œuf, c'est-à-dire la distance entre le centre de gravité et un point $(x, f(x))$ à la surface de l'œuf. Le résultat devrait être de la forme $\sqrt{P(x)}$, où $P(x)$ est un polynôme.

1

We can use the Pythagorean theorem:

$$r(x) = \sqrt{f^2(x) + (x - c)^2},$$

0.5

and we get

$$r(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^4 + x^2 + c^2 - 2xc} = \sqrt{-\frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{31}{36}x + \frac{25}{81}}.$$

0.5

Partie B. Intermède analytique

3

Soit une fonction dérivable strictement positive $g(x) > 0$.

i. Développez $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$, la dérivée de la racine carrée de $g(x)$.

2

We can use the generic formula

$$\frac{dg^n(x)}{dx} = ng^{n-1}(x) \frac{dg(x)}{dx}.$$

1

Here we have the case $n = \frac{1}{2}$, so

$$\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \frac{dg(x)}{dx}.$$

1

Full points are given as long as the answer is of the desired final form, even if the generic formula is not explicitly stated.

ii. Montrez que le signe de $\frac{d\sqrt{g(x)}}{dx}$ est toujours égal à celui de $\frac{dg(x)}{dx}$.

1

$$g(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{g(x)} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} > 0.$$

0.5

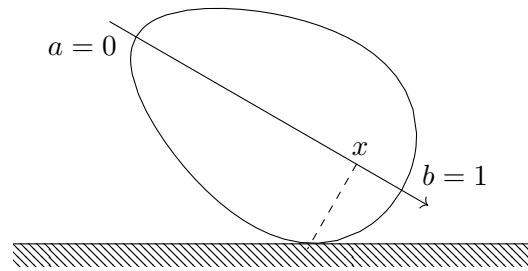
Thus the factor in front of the derivative does not change the sign, so both will always be equal. This is in particular valid for the case 0: if the derivative of $g(x)$ is null, so is the derivative of $\sqrt{g(x)}$.

0.5

Partie C. Stabilité de l'œuf posé

8.5

On va maintenant poser l'œuf sur une surface horizontale et l'on repère l'endroit de l'œuf en contact avec la surface par sa coordonnée x .



i. Les positions $a = 0$ et $b = 1$ sont des positions d'équilibre, du fait de la symétrie de révolution. Déterminez la stabilité de ces deux positions à partir de l'expression $r(x)$ trouvée en A.iii. et en vous aidant du résultat montré en B.ii.

2

To study the stability, we need to compute the derivative of the radius found in A.iii. But we are only interested in its sign, so instead, and according to B.ii., we can compute the derivative of its square, $P(x)$.

0.5

$$\frac{dP(x)}{dx} = -x^3 + 2x - \frac{31}{36}.$$

0.5

For $x = a = 0$, $\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_a = -\frac{31}{36} < 0$.

This means that all values slightly larger than a lead to a smaller r^2 , thus also to a smaller r . Because a is at the end of the domain, it corresponds to a local maximum of the radius, and therefore a is an instable equilibrium.

0.5

For $x = b = 1$, $\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_b = -1 + 2 - \frac{31}{36} = \frac{5}{36} > 0$.

This means that all values slightly smaller than b lead again to a smaller r^2 , thus also to a smaller r . Because b is at the other end of the domain, it corresponds to a local maximum of the radius, and therefore b is an instable equilibrium as well.

0.5

Il existe une position $a < s < b$ où l'œuf couché sur son flanc est en équilibre stable.

ii. Quelle est la particularité de $r(s)$?

1

It is a local minimum of $r(x)$, and in fact its only minimum.

1

Give 0.5 point if it is only mentioned that the segment of $r(s)$ is perpendicular to the egg's surface.

iii. Trouvez une équation polynomiale pour s .

1.5

The condition for s is that the derivative of the radius is zero.

0.5

Again we can use B.ii. and only consider the derivative of $P(x)$.

0.5

Thus the equation is

$$-s^3 + 2s - \frac{31}{36} = 0.$$

0.5

Malheureusement, cette équation polynomiale n'est pas (facilement) résolvable. On va donc en chercher une approximation par développement de Taylor.

iv. Choisissez un bon point de départ t pour le développement. Justifiez votre choix. **1**

If the egg was symmetric, that is an ellipse, s would be in the center ($\frac{1}{2}$). 0.5

The egg is not very dissymmetric, so $t = \frac{1}{2}$ is a good starting point, and easy to compute with. 0.5

Valid but less justifiable points include $t = c$ (but due to the slope of $f(x)$ in the middle portion of the egg, it should be clear that $t < c$) and $t = 1 - c$. Those are awarded 0.5 points and no double penalty in the subsequent questions.

v. Développez l'équation polynomiale autour du t choisi jusqu'au premier ordre pour obtenir une équation affine. **2**

At order zero, we have (remember that we are working with the derivative of $P(x)$)

$$\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_t = - \left(\frac{1}{2} \right)^3 + 2 \frac{1}{2} - \frac{31}{36} = -\frac{1}{8} + 1 - \frac{31}{36} = \frac{1}{72}.$$

0.5

At order one, we have

$$\left. \frac{d^2P(x)}{dx^2} \right|_t = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}.$$

0.5

Therefore the equation becomes

$$\frac{1}{72} + \frac{5}{4} (x - t) = 0.$$

0.5

And finally

$$\frac{5}{4} x - \frac{11}{18} = 0.$$

0.5

For $t = c$, this gives $\frac{87}{81} x - \frac{1511}{2916} = 0$.

For $t = 1 - c$, this gives $\frac{114}{81} x - \frac{1999}{2916} = 0$.

The equation's factors are not required to be fully simplified.

vi. Trouvez la solution \tilde{s} de cette nouvelle équation et calculez également $r(\tilde{s})$. **1**

Solving the equation, we get

$$\tilde{s} = \frac{4}{5} \frac{11}{18} = \frac{22}{45} \approx 0.489.$$

0.5

For $t = c$, this gives $\frac{1511}{3132} \approx 0.482$.

For $t = 1 - c$, this gives $\frac{1999}{4104} \approx 0.487$.

This shows that our preferred choice of t was good (the exact value is ≈ 0.489).

Therefore the minimal radius is approximately

$$r(s) \approx r(\tilde{s}) = \sqrt{-\frac{1}{4} \left(\frac{22}{45} \right)^4 + \left(\frac{22}{45} \right)^2 - \frac{31}{36} \frac{22}{45} + \frac{25}{81}} = \sqrt{\frac{921697}{8201250}} \approx 0.335.$$

0.5

For $t = c$ and $t = 1 - c$, this gives the same result to three figures.

Problème long 2.2 : Expérience de Clément-Desormes

16

L'expérience de Clément-Desormes est une expérience thermodynamique utilisée pour déterminer l'indice adiabatique $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ d'un gaz parfait, où C_P et C_V sont les capacités thermiques à pression constante et volume constant, respectivement. Elle se compose d'un récipient rempli du gaz étudié, couplé à une vanne, un manomètre (p.ex. à mercure) et une pompe, voir la figure. Les trois étapes de l'expérience consistent tout d'abord à augmenter la pression du gaz à l'aide de la pompe, puis d'évacuer l'excès de pression par la vanne et finalement d'attendre que le gaz thermalise. Dans ce qui suit, nous considérerons le système contenant les n moles de gaz restantes dans le récipient après l'évacuation de la pression (initialement, le récipient contient plus de n moles de gaz).

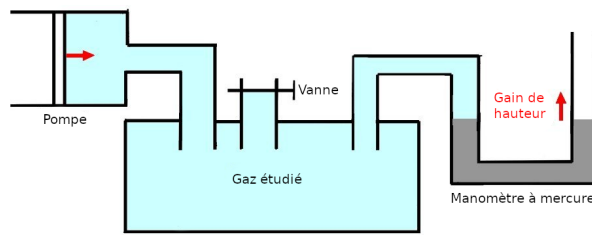


Figure 1 : Représentation schématique de l'expérience de Clément-Desormes.

Partie A. Manomètres à mercure

2.25

Un manomètre à mercure utilise des changements dans la hauteur d'une colonne de mercure pour déterminer la pression d'un gaz, voir la figure. De par ce fait, le millimètre de mercure, noté mmHg, est devenu une unité de pression. Il est défini comme la pression hydrostatique générée par une colonne de mercure d'un millimètre de haut à une température de 0°C.

i. Quelle est la pression hydrostatique d'une colonne de fluide de masse volumique ρ et de hauteur h ?

0.5

The hydrostatic pressure is given by $p = \rho gh$.

0.5

ii. Que vaut 1 bar exprimé en mmHg? La masse volumique du mercure à pression ambiante et température $T = 0^\circ\text{C}$ est de $13.595 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

0.75

A bar is defined as $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$, so $h = \frac{1 \times 10^5 \text{ Pa}}{\rho g} = \frac{1 \times 10^5 \text{ Pa}}{13.595 \text{ g/cm}^3 \cdot 9.80665 \text{ m/s}^2} = 750 \text{ mm}$. So, $1 \text{ bar} = 750 \text{ mmHg}$.

0.75

iii. Pourquoi le mercure est-il particulièrement pratique pour construire de tels manomètres en comparaison d'autres liquides ?

1

The high density of mercury as compared to e.g. water (about 13.6 times higher) is convenient because the corresponding height change between two different pressures is significantly lower than with less dense liquids.

1

Partie B. Pompage et évacuation

2

On commence par utiliser la pompe pour augmenter la pression du gaz à partir de (P_0, V_0) jusqu'à (P_A, V_{tot}) de façon isotherme, où $P_A = P_0 + h_A = 780.31 \text{ mmHg}$ et V_{tot} est le volume total

du récipient de gaz, dont on suppose qu'il va rester constant pour le restant de l'expérience. Le volume (partiel) des n moles à ce stade est $V_A < V_{\text{tot}}$. À ce stade, nous avons donc la pression et le volume (P_A, V_A) pour les n moles de gaz considérées. On ouvre alors rapidement la vanne pour laisser une partie du gaz s'échapper et annuler la surpression, et on referme la vanne tout de suite après. Le tube du manomètre est arbitrairement fin, ainsi le changement de volume nécessaire pour modifier la hauteur du mercure est négligeable. Il ne reste alors que nos n moles de gaz à la pression et au volume $(P_B, V_B) = (P_0, V_{\text{tot}})$. La température ambiante est $T_0 = 12.5^\circ\text{C}$ et la pression ambiante est $P_0 = 766.50 \text{ mmHg}$.

i. Quel est le type de processus thermodynamique à l'œuvre entre les situations $A = (P_A, V_A)$ et $B = (P_B, V_B)$? Pourquoi? **0.5**

The process is adiabatic. 0.25

The reason is that we are considering a fast process such that no heat exchange occurs. 0.25

ii. Pour un tel processus, quelle est l'équation qui relie la pression et le volume dans les situations A et B ? **1.5**

For an adiabatic process we have $PV^\gamma = \text{constant}$. 1

So, one finds $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$. 0.5

As long as the latter is given, full points are awarded.

Partie C. Retour à l'équilibre thermique 2.5

Après un certain temps, le système retrouve l'équilibre thermique par rapport à l'extérieur. On a alors une pression et un volume $(P_C, V_C) = (P_0 + h_C, V_{\text{tot}})$, avec $h_C = 3.61 \text{ mmHg}$.

i. Quel est le type de processus thermodynamique à l'œuvre entre les situations B et $C = (P_C, V_C)$? Pourquoi? **0.5**

The process is isochoric. 0.25

The reason is that the volume does not change between situations B and C . 0.25

ii. Quelle est la température T_C dans la situation C ? **0.5**

As the system has thermalized with the exterior, the temperature is the ambient temperature, namely $T_C = 12.5^\circ\text{C}$. 0.5

iii. Quelle équation permet de relier la pression et le volume dans les situations A et C ? **1.5**

We note that the temperature in case A is the same as the temperature in case C , since the initial pumping is an isothermic process. 0.5

With this, we can use the ideal gas law to write $P_A V_A = P_C V_C$. 1

Partie D. Trouver l'indice adiabatique 9.25

Nous considérons maintenant le processus dans son ensemble pour déterminer l'indice adiabatique γ à partir des mesures et résultats précédents.

i. Dessinez schématiquement dans un diagramme P - V les processus thermodynamiques agissant sur notre système de n moles de l'étape A à C . **1.25**

The diagram should schematically look like this:

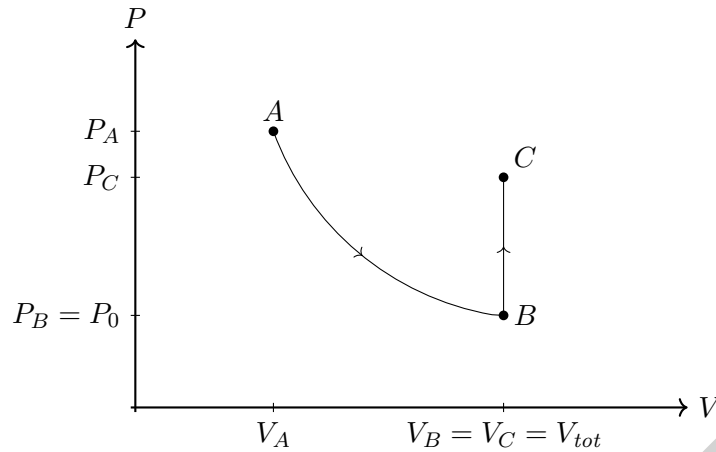


Figure D.1: P - V diagram of the experiment

The diagram axes are properly named as V and P (or p), respectively. 0.25

The ordering $P_A > P_C > P_B$ is respected. 0.25

The ordering $V_A < V_B = V_C$ is respected. 0.25

The adiabatic expansion has qualitatively the correct shape (a curved convex line). 0.25

The direction of the processes is shown and correct. 0.25

Remove 0.5 points if a line connects C and A (with a minimum of 0 points for the question).

ii. Utilisez vos équations des parties précédentes pour exprimer $\frac{P_0+h_A}{P_0}$ en fonction de P_0 , h_A , h_C et γ (et en les incluant tous). 2

We recall from the previous parts that $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ and $P_A V_A = P_C V_C$.

From $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ we find

$$(P_0 + h_A) V_A^\gamma = P_0 V_{\text{tot}}^\gamma$$

which gives

$$\frac{P_0 + h_A}{P_0} = \left(\frac{V_{\text{tot}}}{V_A} \right)^\gamma.$$

1

From $P_A V_A = P_C V_C$ we get

$$\frac{V_{\text{tot}}}{V_A} = \frac{P_0 + h_A}{P_0 + h_C}$$

0.5

Combining both equations gives

$$\frac{P_0 + h_A}{P_0} = \left(\frac{P_0 + h_A}{P_0 + h_C} \right)^\gamma$$

. 0.5

iii. En remarquant que $h_A \ll P_0$ et $h_C \ll P_0$ (\ll signifie « beaucoup plus petit que »), simplifiez votre expression pour $\frac{P_0+h_A}{P_0}$.

Indice : pour $x \ll 1$, on peut approximer $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$.

Indice : vous pouvez négliger $\left(\frac{h_A}{P_0}\right)^2$, $\left(\frac{h_C}{P_0}\right)^2$, $\frac{h_A h_C}{P_0^2}$ et les termes d'ordre supérieur. 2.5

We can start by rewriting the right-hand side of the previous answer in a way that we can use the given Taylor expansion:

$$\left(\frac{P_0+h_A}{P_0+h_C}\right)^\gamma = \left(1+\frac{h_A}{P_0}\right)^\gamma \left(1+\frac{h_C}{P_0}\right)^{-\gamma}$$

Applying the Taylor's expansion then gives (keeping only terms linear in $\frac{h_A}{P_0}$ and $\frac{h_C}{P_0}$)

$$\left(\frac{P_0+h_A}{P_0+h_C}\right)^\gamma \approx \left(1+\gamma\frac{h_A}{P_0}\right)\left(1-\gamma\frac{h_C}{P_0}\right) \approx 1+\gamma\frac{h_A-h_C}{P_0}.$$

We end up with

$$\frac{P_0+h_A}{P_0} = 1+\gamma\frac{h_A-h_C}{P_0}.$$

iv. Sur la base de vos résultats précédents, exprimez l'indice adiabatique γ en fonction de h_A et h_C . 1

Isolating γ we find

$$\gamma = \frac{h_A}{h_A-h_C}.$$

v. Calculez numériquement l'indice adiabatique γ pour les mesures données. 1

Using the given numerical values for P_0 , P_0+h_A and h_C , one finds

$$\gamma = \frac{780.31 - 766.50}{780.31 - 766.50 - 3.61} \approx 1.35.$$

vi. En partant du théorème d'équipartition, il est possible de déduire que $C_V = \frac{f}{2}R$ et $C_P = \frac{f+2}{2}R$, où f est le nombre de degrés de liberté permis dans les molécules de gaz. Le gaz étudié ici a $f = 5$ degrés de liberté. Quelle est la différence relative entre les valeurs théoriques et expérimentales de l'indice adiabatique γ ? 1

Using the definition of γ we find $\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1.4$. This gives a relative difference $\frac{\gamma_{th}-\gamma_{exp}}{\gamma_{th}} = 3.6\%$. 1

vii. Quelles sont des raisons possibles pour cette différence? 0.5

If at least two of the following reasons is mentioned, or any other meaningful potential reason is mentioned, then the full points are obtained.

The discrepancy could come from: the statistical uncertainty in the measurements, a systematic uncertainty due to a wrong assumption (the process $A \rightarrow B$ might not be fully adiabatic, the change of volume due to the pressure changes in the manometer might not be negligible, the initial compression might not be fully isothermic, ...), etc. 0.5

Problème long 2.3 : Charges miroir

16

Un problème très commun en électrostatique est la détermination du potentiel électrique d'un système composé de charges ponctuelles et de conducteurs de formes diverses. Dans cet exercice, nous allons développer une astuce, appelée méthode des charges miroir ou méthode des images, qui va nous permettre de grandement simplifier ce genre de problèmes dans certains cas où la géométrie s'y prête. Dans cet exercice, nous considérons le système d'unités SI.

Partie A. Potentiel électrique et conducteurs

2.25

Dans cette première partie, nous allons discuter les cages de Faraday.

i. Écrivez le potentiel électrique V dû à une charge ponctuelle q en fonction de la distance r à la charge.

0.25

The potential is given by $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$.

0.25

ii. Écrivez le potentiel électrique V dû à N charges ponctuelles $q_i, i \in 1, 2, \dots, N$, en fonction des distances r_i à chaque charge q_i .

0.5

The total potential is given by the sum of the individual potentials: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$.

0.5

iii. Considérez la situation de la fig. B.1. Que pouvez-vous dire du potentiel électrique à la surface du matériau conducteur mis à la terre ?

0.5

As we have a grounded conductor, the potential on the surface must vanish, so $V = 0$ on the conductor.

0.5

iv. Lors d'un orage, est-il plus sûr de rester dans sa voiture ou dehors ? Pourquoi ? Argumentez en utilisant la réponse à la question précédente.

1

It is safer to stay in one's car, because the metallic hull of the car is a grounding conducting surface for which $V = 0$ holds such that its inside is protected against lightning.

1

Partie B. Charge miroir plane

4.25

Considérez à nouveau la situation illustrée sur la fig. B.1. Le but de cette partie est de déterminer le potentiel électrique en chaque point au-dessus du plan. Pour ce faire, une astuce peut être utilisée pour simplifier grandement la situation. L'idée est d'introduire une charge « miroir » imaginaire de façon à reproduire les conditions aux limites données par le matériau conducteur.

En électrostatique, si deux systèmes physiques ont des potentiels avec des conditions aux limites identiques, alors les deux situations sont identiques physiquement.

Du coup, pour déterminer le potentiel électrique de ce système, nous souhaitons trouver un autre système permettant de décrire le potentiel plus facilement.

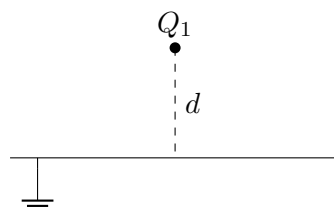


Figure B.1: Conducteur plan de longueur infinie mis à la terre et une charge Q_1 à la position $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, d)$.

i. Quelles sont les conditions aux limites pour le potentiel électrostatique V de ce système ? **0.25**

As seen in the previous part, the potential must satisfy $V = 0$ on the grounded conducting surface. 0.25

ii. Imaginons un second système physique avec la même charge Q_1 à la même position \vec{r}_1 selon la fig. B.1, mais sans le conducteur plan. Notre but est de trouver une configuration avec une seconde charge Q_2 à la position \vec{r}_2 avec les mêmes conditions aux limites que dans la fig. B.1. Que devraient être Q_2 et $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pour que cela se vérifie ? Pourquoi ? **1.5**

By symmetry, we can expect the mirror charge to lie at position $\vec{r}_2 = (0, 0, -d)$. 0.5

If the mirror charge lies at $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, -d)$ we can check that picking $Q_2 = -Q_1$ indeed satisfies the boundary conditions. 0.5

Indeed, this must be the case by symmetry. One could also check it explicitly using the result from Aii. 0.5

iii. En utilisant vos résultats précédents, calculez le potentiel électrique $V(x, y, z)$ au-dessus du plan dans le système de la fig. B.1 en fonction des coordonnées (x, y, z) , de la distance d et de la charge Q_1 . L'expression peut être laissée comme somme de deux termes, elle n'a pas besoin d'être complètement simplifiée. **1**

The resulting potential in the charge-plane conductor system must be the same as the charge-mirror charge system, so we obtain for $\vec{r} = (x, y, z)$

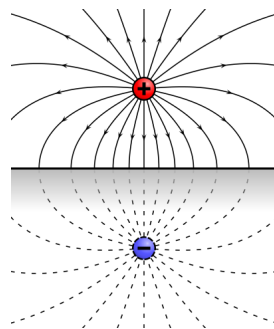
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{Q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right].$$

1

The solution could be written in a different form as long as the potential is written explicitly as a function of the required quantities.

iv. Dessinez schématiquement le système charge-conducteur plan de la fig. B.1 avec les lignes de champ correspondantes, en supposant que $Q_1 > 0$ (dans un croquis séparé, pas sur la feuille du problème). **1.5**

The drawing should qualitatively look like the upper half of the following image. The lower half should contain no field lines.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFpt_imagecharge_plane_horizontal_plusminus.svg

The field lines should flow from the positive charge to the conductor. 0.5

The field lines should stop at the level of the conductor. 0.5

The field lines at the level of the conductor should be perpendicular to its surface. 0.5

Partie C. Charges miroir à angle droit 5.5

Nous allons maintenant considérer des géométries de conducteur plus complexes.

i. Considérons le système montré dans la fig. C.1. Quel est le nombre N de charges miroir nécessaires pour reproduire les conditions aux limites du conducteur ? Quelles sont leurs valeurs Q_i et leurs positions $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, N$? Pourquoi ?

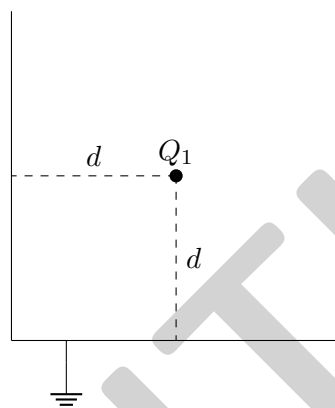


Figure C.1 : Deux conducteurs demi-plan de longueur infinie à angle droit mis à la terre et une charge Q_1 à la position $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (d, 0, d)$.

2.5

We want the potential to vanish on the conductor plates.

By symmetry considerations, we can convince ourselves that the mirror charges should lie at the positions $\vec{r}_2 = (-d, 0, d)$, $\vec{r}_3 = (-d, 0, -d)$ and $\vec{r}_4 = (d, 0, -d)$. 0.5

Similarly, we can expect to have $Q_2=Q_4$. 0.5

After some trial and error, one can notice that the choice $Q_2 = Q_4 = -Q_1$ and $Q_3 = Q_1$ leads to a vanishing potential on the conducting plates. 0.5

Indeed, by saying that r_i is the distance from the position \vec{r} to the charge i , we have

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_1}{r_2} + \frac{Q_1}{r_3} - \frac{Q_1}{r_4} \right].$$

On the vertical plate, we have $r_1 = r_2$ and $r_3 = r_4$ such that indeed $V = 0$. On the horizontal plate we have $r_1 = r_4$ and $r_2 = r_3$ so we also have a vanishing potential. 1

A more explicit computation making less explicit use of symmetries, or a more implicit reasoning with the symmetries is fine as long as the reasoning is correct and indeed shows that the choice is the correct one.

ii. Quel est le potentiel $V(x, y, z)$ correspondant en fonction des coordonnées (x, y, z) , de la distance d et de la charge Q_1 ? L'expression peut être laissée comme somme de N termes, elle n'a pas besoin d'être complètement simplifiée.

1

With the charges and positions from the previous question, we find the potential

$$V(x, y, z) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + (z+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]. \tag{C.2}$$

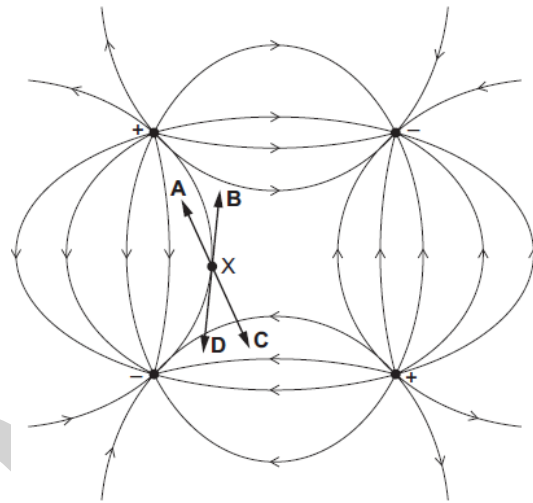
1

The solution could be written in a different form as long as the potential is written explicitly as a function of the required quantities.

iii. Dessinez schématiquement le système charge-conducteurs demi-plan avec les lignes de champ correspondantes, en supposant que $Q_1 < 0$ (dans un croquis séparé, pas sur la feuille du problème).

2

The drawing should qualitatively look like the following image (do not consider the A, B, C, D arrows and the point X), but with the field lines stopping at the level of the two half-plane conductors.



<https://physics-ref.blogspot.com/2019/01/the-diagram-shows-electric-field.html>

The field lines flow from positive to negative charges.

0.5

There is no straight line between the charge Q_1 and the charges Q_2 and Q_4 .

0.5

The field lines stop at the level of the conductors.

0.5

The overall shape is qualitatively similar to the picture above.

0.5

Partie D. Charges miroir circulaires

4

Il est également possible de définir des charges miroir pour des géométries incurvées.

i. Considérons maintenant le système montré dans la fig. D.1. Il s'avère qu'une seule charge miroir est nécessaire pour reproduire les conditions aux limites correspondantes. Quelle est sa valeur Q_2 et sa position $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$?

Indice : vous pouvez utiliser sans preuve qu'un potentiel satisfaisant les conditions aux limites appropriées aux positions $(r, 0, 0)$ et $(-r, 0, 0)$ satisfait les conditions aux limites sur toute la sphère.

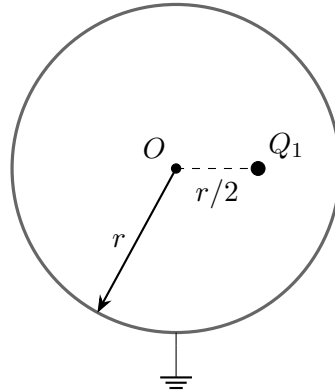


Figure D.1 : Conducteur sphérique de rayon r et centre O à la position $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ mis à la terre et une charge Q_1 à la position $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (r/2, 0, 0)$. Nous voyons ici une coupe à $y = 0$ de la sphère dans le plan xz .

2.5

By symmetry considerations, we expect the mirror charge to lie on the x -axis.

0.5

Using the hint, we consider the position $(r, 0, 0)$ where the potential should vanish. This gives us the condition

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{r/2} + \frac{Q_2}{|x_2 - r|} \right] = 0.$$

One can convince oneself qualitatively that having $x_2 - r < 0$ cannot lead to the appropriate boundary conditions on the full sphere. We then get

$$\frac{Q_2}{x_2 - r} = -\frac{2Q_1}{r}.$$

0.5

Considering now the position $(-r, 0, 0)$ we obtain the condition

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{3r/2} + \frac{Q_2}{x_2 + r} \right] = 0,$$

which gives

$$\frac{Q_2}{x_2 + r} = -\frac{2Q_1}{3r}.$$

0.5

With the first condition we have $Q_2 = -2Q_1 \frac{x_2 - r}{r}$, which we can insert in the second condition to obtain

$$\frac{2Q_1}{r} \frac{x_2 - r}{x_2 + r} = -\frac{2Q_1}{3r}$$

and thus

$$x_2 - r = \frac{x_2 + r}{3},$$

which finally gives

$$x_2 = 2r.$$

The position of the mirror charge is thus $(x_2, y_2, z_2) = (2r, 0, 0)$. Inserting this back in the first conditions we also get $Q_2 = -2Q_1$.

1

A more explicit computation making less explicit use of symmetries, or a more implicit reasoning with the symmetries is fine as long as the reasoning is correct and indeed shows that the choice is the correct one.

ii. Quel est le potentiel $V(x, y, z)$ correspondant en fonction des coordonnées (x, y, z) , du rayon r et de la charge Q_1 ? L'expression peut être laissée comme somme de deux termes, elle n'a pas besoin d'être complètement simplifiée.

1.5

Using our previous results, we find

$$V(x, y, z) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - r/2)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x - 2r)^2 + y^2 + z^2}} \right].$$

1.5

The solution could be written in a different form as long as the potential is written explicitly as a function of the required quantities.