PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Zweite Runde

14. Januar 2026

Teil 1	:	**22 MC Fragen**
Zeit	:	60 Minuten
Total	:	22 Punkte (22×1)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Bärbel & Paul Geissbühler Stiftung
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Huawei
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#126def84

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Multiple Choice

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 22 Punkte (1 Punkt pro richtige Antwort)

- Multiple-Choice-Aufgaben **(MC)** haben mehrere Aussagen, von denen **genau eine** richtig ist. Wenn Du genau die richtige Antwort auf dem Antwortblatt markierst, erhältst Du einen Punkt, sonst null.
- Bitte für jede Frage den Deiner Antwort entsprechenden Kreis auf dem Antwortblatt vollständig schwarz oder blau ausfüllen.

Frage 1.1 (MC)

Schätze ab, wie viele Liter Wasser pro Jahr den Rheinfall hinunterstürzen.

A) 1×10^9 L
B) 1×10^{11} L
C) 1×10^{13} L
D) 1×10^{15} L

Frage 1.2 (MC)

Drei als Punktmassen angenäherte Himmelsobjekte mit den Massen m_1, m_2 und m_3 befinden sich zur Zeit t_0 in einer Linie. Die Masse m_2 ist in der Mitte. Zwischen m_1 und m_2 bzw. m_2 und m_3 ist jeweils ein Abstand r. Die Anfangsgeschwindigkeiten von m_1 und m_3 sind entgegengesetzt, stehen senkrecht zur Achse durch die drei Schwerpunkte und haben den gleichen Betrag v. Was ist die maximale Masse von m_2, damit sich ein stabiler Bewegungsablauf einstellen kann?

A) $\frac{2\pi Gc}{(m_1+m_3)^2 v^4}$
B) $\frac{Gc}{m_1 m_3 v^4}$
C) $\sqrt{\frac{m_1 m_3 (m_1+m_3)}{m_1+m_3}} \frac{r^4}{Gv}$
D) Keine der oberen Antworten ist korrekt.

Frage 1.3 (MC)

Zwei halbdurchlässige Spiegel, welche je 75% des einfallenden Lichts reflektieren, werden parallel zueinander mit einem Abstand von 1 m aufgestellt. Nun wird ein Lichtstrahl auf den ersten Spiegel gerichtet, welcher in einem Zickzack-Muster zwischen den Spiegeln hin- und herreflektiert wird. Welcher Anteil des Lichtes ging insgesamt nach 9 Reflexionen verloren?

A) approx. 97.5%
B) approx. 95.0%
C) approx. 92.5%
D) approx. 90.0%

Frage 1.4 (MC)

Ein Teilchen bewegt sich zufällig zwischen den drei Positionen A, B und C. Von einem Zeitschritt ($\Delta t = 1$, beliebige Einheiten) zum nächsten ist die Wahrscheinlichkeit, dass es an der gleichen Position bleibt, $\frac{1}{5}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass es sich zu einer der anderen Positionen bewegt, $\frac{2}{5}$. Nehmen wir an, unser Teilchen beginnt bei $t_0 = 0$ an der Position A. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei $t = 2$ an der Position B befindet?

A) 0.08
B) 0.16
C) 0.2
D) 0.24
E) 0.32
F) 0.36
G) 0.4
H) 0.48

Frage 1.5 (MC)

Eine Waschmaschine dreht sich mit 1500 Umdrehungen pro Minute. Sobald sie ausgeschaltet wird, bremst sie mit einer konstanten Winkelbeschleunigung von $1\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ ab. Wie viele Umdrehungen macht die Trommel, bis sie zum Stillstand kommt?

A) 300

B) 2000

C) 7000

D) 12 000

Frage 1.6 (MC)

Ein Pendel ist an der Decke eines Aufzugs aufgehängt. Wenn der Aufzug beginnt, nach oben zu beschleunigen, wird die Frequenz des Pendels

A) unverändert bleiben.

B) erhöht.

C) verringert.

Frage 1.7 (MC)

Während Remco Rad fährt, hat das Leistungsmessgerät an seinem Fahrrad Zugriff auf die folgenden Daten:

I. die Geschwindigkeit von Remco,

II. die Kraft, mit der Remco in die Pedale tritt,

III. das Gewicht von Remco,

IV. die Neigung der Strasse, auf der Remco fährt,

V. die Winkelgeschwindigkeit, mit der Remco in die Pedale tritt.

Aus welchen Informationen berechnet das Leistungsmessgerät die Leistung, die Remco erbringt?

A) I, III, IV

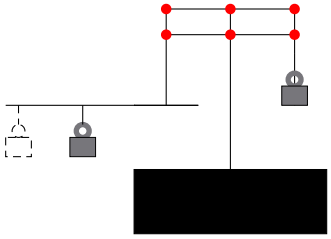
B) I, IV

C) II, IV, V

D) II, V

Frage 1.8 (MC)

Betrachte die untenstehende Balkenwaage. Was zeigt die Waage an, wenn das Gewicht auf der linken Seite an die äusserste Position des Stabes verschoben wird? Die einzelnen Waagenelemente sind starr, wobei an den rot markierten Punkten Scharniere angebracht sind.



A) Die linke Seite ist schwerer.

B) Beide Seiten sind im Gleichgewicht.

C) Die rechte Seite ist schwerer.

Frage 1.9 (MC)

Alice geht den Mont Blanc hinauf und hinunter und steigt dabei $h = 4806\,\mathrm{m}$ über den Meeresspiegel. Auf dem Hin- und Rückweg erreicht sie eine durchschnittliche (horizontale) Geschwindigkeit von v_1 bzw. v_2. Was kann man über die Durchschnittsgeschwindigkeit v der gesamten Strecke sagen?

A) $v = \frac{v_1+v_2}{2}$

B) $v = \frac{v_1+v_2}{2h}$

C) $v \leq \frac{v_1+v_2}{2}$

D) $v > \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$

E) $v < \frac{v_1+v_2}{2h}$

Frage 1.10 (MC)

Wenn ein Elektron in einem angeregten Atom den Übergang von einem höheren zu einem niedrigeren Energieniveau vollzieht, sendet das Atom Licht aus, dessen Frequenz proportional zur Energiedifferenz zwischen den beiden Niveaus ist. Betrachten wir ein Atom mit drei Energiezuständen. Die Frequenz des Lichts, das beim Übergang vom Zustand A zum Zustand B ausgesendet wird, sei mit $f_{A\to B}$ bezeichnet. Welche Beziehung besteht zwischen $f_{2\to1}$, $f_{3\to1}$ und $f_{3\to2}$?

A) $f_{3\to1} = f_{2\to1} + f_{3\to2}$

B) $2f_{3\to1} = f_{3\to2} + f_{2\to1}$

C) $f_{3\to1} = f_{3\to2}$ - $f_{2\to1}$

D) $2f_{3\to1} = f_{3\to2}$ - $f_{2\to1}$

Frage 1.11 (MC)

Warum erscheint der Himmel tagsüber blau?

A) Weil Stickstoff die anderen Farben absorbiert.

B) Weil die Sonne blaues Licht stärker emittiert als rotes Licht.

C) Weil das Wasser auf der Erde den Himmel blau macht.

D) Weil die Ozonschicht das blaue Licht bevorzugt durchlässt.

E) Weil kurzwelliges, sichtbares Licht stärker durch die Luftmoleküle gestreut wird als langwelliges Licht.

F) Weil Violett so stark gestreut wird, dass es sich im Himmel verteilt und Blau dominiert.

G) Weil ein himmlischer Maler den Himmel blau gemalt hat.

Frage 1.12 (MC)

Ein Gletscher bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit über einen Untergrund. Betrachte eine quaderförmige Eisplatte mit Seitenlängen von 100 m und einer Höhe von 10 m. Der Gleitreibungskoeffizient beträgt $\mu = 0.09$, der Untergrund leitet keine Wärme ab, und die Oberseite der Eisplatte hat eine konstante Temperatur von $-10\,°\mathrm{C}$. Die Dichte von Eis beträgt $\rho = 900\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ und die Wärmeleitfähigkeit von Eis $\lambda = 2.3\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.
Bei welcher Geschwindigkeit beginnt das Eis zu schmelzen?

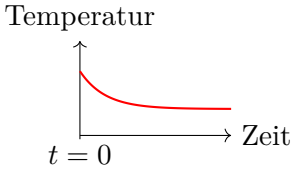
A) $1\times10^{-4}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

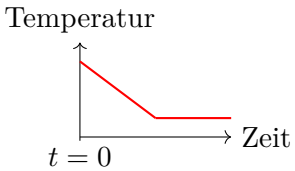
B) $5\times10^{-4}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

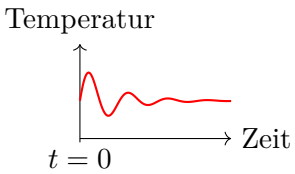
C) $3\times10^{-4}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

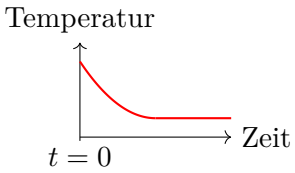
Frage 1.13 (MC)

Erinnerst du dich an meine Reste aus der ersten Runde? Wenn nicht, ist das nicht weiter schlimm. Ich habe sie später in jener Woche wieder aufgewärmt und es stellte sich heraus, dass es immer noch zu viel Essen war! Also hatte ich am Ende noch Reste von den Resten. Natürlich habe ich sie erneut in den Kühlschrank gestellt (bei $t = 0$). Welches Diagramm beschreibt qualitativ ihre Temperatur im Laufe der Zeit?

A)


B)


C)


D)


Frage 1.14 (MC)

Das Dulong-Petit-Gesetz besagt, dass die Wärmekapazität von Festkörpern unabhängig von der Temperatur ist. Experimente haben jedoch gezeigt, dass die Wärmekapazität eines Festkörpers bei niedrigen Temperaturen dennoch temperaturabhängig ist. Das Einstein-Modell erklärt diese Beobachtung mit Hilfe der Quantenmechanik. Welches der folgenden Ergebnisse beschreibt die Wärmekapazität im Einstein-Modell, wenn die innere Energie durch (1) gegeben ist?

$$U(T) = 3N\hbar\omega_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right) - 1} \right) \qquad (1)$$

A) $3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right) \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)-1\right]^2}$

B) $3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)-1\right]^2}$

C) $3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right) \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)-1\right]}$

D) $3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)-1\right]}$

Frage 1.15 (MC)

Welcher Strom fliesst durch eine elektrische Freileitung, wenn eine Spannung von 100 kV angelegt wird? Das zylindrische Kabel ist $l = 10\,\mathrm{km}$ lang, hat einen Radius von 20 mm und einen spezifischen Widerstand von $\rho = 3.17 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$.

A) $2.85 \cdot 10^5\,\mathrm{A}$

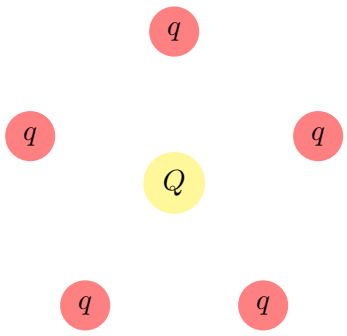
B) $3.96 \cdot 10^5\,\mathrm{A}$

C) $4.41 \cdot 10^5\,\mathrm{A}$

D) $4.76 \cdot 10^5\,\mathrm{A}$

Frage 1.16 (MC)

Welche Kraft wirkt auf die Ladung Q, wenn eine der Ladungen q aus der folgenden Konfiguration entfernt wird, wobei r der Abstand von Q zu jeder der Ladungen q ist?



A) 0

B) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$

C) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Qq}{r^2}$

D) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{5}Qq}{r^2}$

Frage 1.17 (MC)

Ein Teilchen mit Masse $m = 3 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg}$ und Ladung $q = e$ tritt in einen quadratischen Plattenkondensator mit Seitenlänge $l = 0.5\,\mathrm{m}$, Abstand $d = 10\,\mathrm{cm}$ zwischen den Platten und Ladung $Q = 0.2\,\mathrm{C}$ ein. Angenommen, das Teilchen tritt senkrecht zu seiner Seite und im gleichen Abstand der beiden Platten in den Kondensator ein, wie gross ist die minimale Geschwindigkeit, die es braucht, um nicht gegen eine Platte zu prallen? Die Schwerkraft und der Luftwiderstand können ignoriert werden.

A) $v \geq 1737\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

B) $v \geq 2508\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

C) $v \geq 2939\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

D) $v \geq 3473\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

E) $v \geq 4912\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Frage 1.18 (MC)

Welche der folgenden Aussagen über das elektrische Potential φ ist (sind) richtig?

I: Das elektrische Potential ist eindeutig.

II: Die Arbeit, die benötigt wird, um eine Ladung von A nach B zu bewegen, ist wegunabhängig.

III: Ein grösseres elektrisches Potential bedeutet ein stärkeres elektrisches Feld.

A) I. B) II. C) III.
D) I & II. E) I & III. F) II & III.
G) I, II & III.

Frage 1.19 (MC)

Ein geladenes Teilchen der Masse m und der Ladung q befindet sich auf einer Kreisbahn mit Radius r in einem homogenen Magnetfeld der Stärke B. Wie ändert sich der Radius der Kreisbahn des Teilchens, wenn seine kinetische Energie in Bewegungsrichtung verdoppelt wird?

A) $r' = \frac{1}{2}r$ B) $r' = \frac{1}{\sqrt{2}}r$
C) $r' = r$ D) $r' = \sqrt{2}r$
E) $r' = 2r$

Frage 1.20 (MC)

Im Seilpark rast Emmy mit einer Zipline von einem Baum zum anderen. Durch den Kontakt des Seiles mit der Seilrolle entsteht ein lautes Surren mit einer Frequenz f_{Emmy}. Ein Beobachter am Startpunkt der Zipline hört eine Frequenz f_0 und ein Beobachter am Endpunkt der Zipline hört eine Frequenz f_1. Wie stehen die Frequenzen f_{Emmy}, f_0 und f_1 zueinander?

A) $f_{\text{Emmy}} < f_0 < f_1$
B) $f_{\text{Emmy}} < f_1 < f_0$
C) $f_0 < f_{\text{Emmy}} < f_1$
D) $f_0 < f_1 < f_{\text{Emmy}}$
E) $f_1 < f_{\text{Emmy}} < f_0$
F) $f_1 < f_0 < f_{\text{Emmy}}$

Frage 1.21 (MC)

Drei aufeinanderfolgende Resonanzfrequenzen einer Orgelpfeife haben die Werte 1310 Hz, 1834 Hz und 2358 Hz.
Ist diese Orgelpfeife an einem Ende geschlossen oder an beiden Enden offen?

A) Beide Enden offen – weil die Frequenzdifferenz ein Vielfaches der Grundfrequenz ist.
B) Beide Enden offen – da die Pfeife kurze Abstände zwischen den Resonanzen hat, was typisch für offene Pfeifen ist.
C) Ein Ende geschlossen – weil die Frequenzdifferenz nicht ein Vielfaches der Grundfrequenz ist.
D) Ein Ende geschlossen – da die Frequenzen linear steigen, was bei einer Pfeife mit beiden Enden offen nicht vorkommt.

Frage 1.22 (MC)

Gegeben sind ein ideales Fadenpendel und eine homogene Stange, die an einem Ende drehbar befestigt ist. Beide haben dieselbe Masse m und dieselbe Länge L und sind zunächst in horizontaler Lage fixiert. Dann werden beide Pendelkörper gleichzeitig losgelassen.
Welcher der beiden Pendelkörper erreicht zuerst den tiefsten Punkt?

A) Fadenpendel – es hat ein kleineres Trägheitsmoment I.
B) Fadenpendel – es hat ein grösseres Trägheitsmoment I.
C) Stange – sie hat ein kleineres Trägheitsmoment I.
D) Stange – sie hat ein grösseres Trägheitsmoment I.
E) Beide gleichzeitig – die Masse m und Länge L sind gleich.
F) Zu wenig Informationen gegeben – die Lösung hängt von der effektiven Länge L ab.

Multiple Choice: Antwortblatt

Gebe deine Antworten in den dafür vorgesehenen Kästchen auf dieser Seite an.

Nachname:	**Vorname:**	**Total:**

	A	B	C	D	E	F	G	H
Frage 1.1	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.2	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.3	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.4	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Frage 1.5	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.6	☐	☐	☐					
Frage 1.7	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.8	☐	☐	☐					
Frage 1.9	☐	☐	☐	☐	☐			
Frage 1.10	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.11	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
Frage 1.12	☐	☐	☐					
Frage 1.13	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.14	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.15	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.16	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.17	☐	☐	☐	☐	☐			
Frage 1.18	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
Frage 1.19	☐	☐	☐	☐	☐			
Frage 1.20	☐	☐	☐	☐	☐	☐		
Frage 1.21	☐	☐	☐	☐				
Frage 1.22	☐	☐	☐	☐	☐	☐		

Multiple Choice: Lösungen

	A	B	C	D	E	F	G	H
Frage 1.1	☐	☐	■	☐				
Frage 1.2	☐	☐	☐	■				
Frage 1.3	☐	☐	■	☐				
Frage 1.4	☐	☐	☐	☐	■	☐	☐	☐
Frage 1.5	☐	■	☐	☐				
Frage 1.6	☐	■	☐					
Frage 1.7	☐	☐	☐	■				
Frage 1.8	☐	■	☐					
Frage 1.9	☐	☐	■	☐	☐			
Frage 1.10	■	☐	☐	☐				
Frage 1.11	☐	☐	☐	☐	■	☐	☐	
Frage 1.12	☐	☐	■					
Frage 1.13	■	☐	☐	☐				
Frage 1.14	☐	■	☐	☐				
Frage 1.15	☐	■	☐	☐				
Frage 1.16	☐	■	☐	☐				
Frage 1.17	☐	☐	☐	■	☐			
Frage 1.18	☐	■	☐	☐	☐	☐	☐	
Frage 1.19	☐	☐	☐	■	☐			
Frage 1.20	☐	☐	■	☐	☐	☐		
Frage 1.21	☐	☐	■	☐				
Frage 1.22	☐	☐	■	☐	☐	☐		

SOLUTION

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Zweite Runde

14. Januar 2026

Teil 2	:	**3 lange Aufgaben**
Zeit	:	120 Minuten
Total	:	48 Punkte (3×16)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Bärbel & Paul Geissbühler Stiftung
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Huawei
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Lange Aufgaben

Zeit: 120 Minuten
Maximalpunktzahl: 48 Punkte (3×16)

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiterzulesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Lange Aufgabe 2.1: Betrachtungen eines Regenschirms *(16 Punkte)*

Wir stellen einige Berechnungen über Regenschirme beziehungsweise das Wasser auf den Regenschirmen an. Wir modellieren den Regenschirm als eine flache, runde Scheibe mit Masse M und Radius R. In der ganzen Aufgabe vernachlässigen wir insbesondere die Oberflächenspannung des Wassers.

Teil A. Der stillstehende Regenschirm / Es regnet *(3.75 Punkte)*

Wir betrachten zunächst einen Regentropfen, der vom Himmel fällt. Regentropfen bestehen aus Wasser (Dichte: ϱ) und wir nehmen an, dass die Regentropfen kugelförmig sind. Der Luftwiderstand, der auf einen fallenden Regentropfen wirkt, beträgt in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $F = -\kappa v^2 A$, wobei κ eine Konstante ist und A die Querschnittsfläche des Tropfens senkrecht zur Fallrichtung.

i. (1.5 Pkte.) Bestimme die Fallgeschwindigkeit des Regentropfens in Abhängigkeit seines Radius r_T, wenn er auf den Schirm aufprallt.

Der Regen ist sehr stark. Die Regenmenge in Masse pro Flächeneinheit und Zeit ist $\dot{m}$.

ii. (1.25 Pkte.) Die Kraft, welche aufwendet werden muss, um den Regenschirm zu halten, sei F_{RS}. Bestimme den Radius der Regentropfen r_T in Abhängigkeit der relevanten Grössen. Wir gehen davon aus, dass die Gewichtskraft des auf dem Regenschirm ruhenden Wassers vernachlässigbar gering ist.

iii. (1 Pkt.) Berechne die Anzahl Tropfen auf dem Regenschirm pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von $g, \dot{m}, \varrho, \kappa$ und anderen allfällig verwendeten Grössen.

Teil B. Der sich drehende Regenschirm *(10.75 Punkte)*

Da sich das Wasser auf Davids flachen Regenschirm sammelt und am Rand hinuntertropft, beginnt David, den Regenschirm mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω zu drehen und schleudert so das Wasser weg. Da David (der Arme!) schon lange im Regen geht, hat sich ein gleichgewichtsartiger Zustand eingestellt. Wir modellieren, für vereinfachte Berechnungen, die Reibung wie folgt: Die Reibung in der radialen Richtung zwischen Wasser und Schirm ist vernachlässigbar, die tangentiale Reibung zwischen Wasser und Schirm ist unendlich. Das heisst, dass alles Wasser sich relativ zum Schirm nur in der radialen Richtung bewegen kann. Äquivalent dazu kann man sich das Wasser in radialen Rillen auf dem Schirm vorstellen, welche das Wasser auf eine (aus mitrotierender Sicht) rein radiale, gerade Bahn zwingen.

i. (0.75 Pkte.) Erkläre, weshalb David trotz dem Fliessgleichgewicht immer ein Drehmoment auf den Schrim ausüben muss und weshalb dies mit der Energieerhaltung vereinbar ist.

ii. (0.5 Pkte.) Unter Verwendung der Resultate, Formeln, Werte und Konstanten aus Aufgabenteil A, bestimme die Rate des weggeschleuderten Wassers in Masse pro Zeit.

iii. (2.5 Pkte.) Wir betrachten einen einzigen Wassertropfen, der bei einer Distanz r_i von der Schirmmitte auf den Schirm aufprallt. Finde einen einfachen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Tropfens, die er am Rand des Schirms in radiale Richtung hat, falls der Tropfen nicht vom restlichen Wasser auf dem Schrim beeinflusst wird.

iv. (2 Pkte.) Wir betrachten nun wieder die Situation im strömenden Regen. In einer erfrischenden praktischen Erfahrung hat sich gezeigt, dass die Geschwindigkeit eines kleinen Volumens an Wasser ausschliesslich davon abhängt, wo auf dem Schirm es sich befindet. Insbesondere ist die Fliessgeschwindigkeit unabhängig vom Ort, wo das Wasser auf den

Schrim getropft ist. Finde einen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Wassers bei der Distanz r von der Schirmmitte, der neben r nur von Konstanten abhängt.
Tipp: Das Wasser besteht aus vielen Tropfen, die sich in inelastischen Kollisionen zusammengefunden haben. Tipp: Du darfst die folgende Identität ohne Begründung verwenden: $\int_0^a b\sqrt{a^2-b^2}db = \frac{a^3}{3}$.

v. (2 Pkte.) Berechne, wie hoch das Wasser auf dem Schirm steht und zeige, dass die Höhe unabhängig vom Radius ist.

vi. (1 Pkt.) Berechne, ausgehend vom Resultat der letzten Teilaufgabe, das Massenträgheitsmoment des Regenschirms inklusive dem sich darauf befindenden Wassers. Nimm an, dass die Masse des Schirms selbst gleichmässig verteilt ist.
Hinweis: Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders mit Drehachse koaxial zur Rotationsachse durch den Schwerpunkt ist $J = \frac{1}{2}MR^2$.

vii. (1.5 Pkte.) In einer kurzen Zeitspanne Δt wird eine bestimmte Menge Wasser weggeschleudert und eine bestimmte Menge an Wasser kommt neu auf den Schrim. Erkläre, weshalb mit dieser Überlegung das Drehmoment bestimmt werden kann, welches David auf den Schirm ausüben muss, um seine Drehgeschwindigkeit aufrecht zu erhalten und berechne es.

viii. (0.5 Pkte.) Berechne die Rotationsenergie des gesamten Regenschirms inklusive des sich darauf befindenden Wassers.

Teil C. Wasserschlacht *(1.5 Punkte)*

i. (1.5 Pkte.) Berechne, wie weit das Wasser vom Zentrum des Schirms spritzt, wenn dieser in einer Höhe h über dem Boden gedreht wird.

Lange Aufgabe 2.2: Untere Fata Morgana *(16 Punkte)*

Teil A. Licht und Medien *(3 Punkte)*

i. (1 Pkt.) Ein Strahl, der sich in einem Medium 1 mit der Brechungsindex n_1 ausbreitet, trifft in einem Winkel θ_1 zur Oberflächennormalen auf eine Grenzfläche zu einem Medium 2 mit Brechungsindex n_2, siehe Abb. A.1. Wie hängt der Austrittswinkel θ_2 von θ_1, n_1 und n_2 ab?

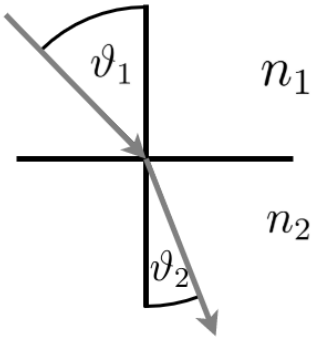


Abbildung A.1: Lichtstrahl, der durch zwei verschiedene Medien hindurchgeht.

ii. (1.5 Pkte.) Es seien N viele Materialien mit parallelen horizontalen Grenzflächen zwischen ihnen gegeben. Jedes Material i hat einen Brechungsindex n_i. Ein Lichtstrahl durchquert durch diesen Materialstapel (unter der Annahme, dass keine Totalreflexionen auftreten). Für jede Schicht definieren wir den Winkel θ_i als den Winkel zwischen der Vertikalen und dem Strahl. Das System ist in Abb. A.2 zu sehen. Wie ist die Beziehung zwischen dem Winkel θ_i in der Schicht i und dem Anfangswinkel θ_1?

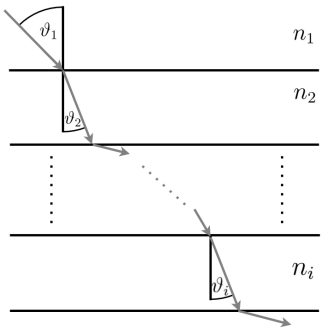


Abbildung A.2: Lichtstrahl durch mehrere Medien.

iii. (0.5 Pkte.) Finde eine Funktion $f(\theta_i, n_i)$, sodass $f(\theta_i, n_i) = f(\theta_1, n_1) = C =$ konstant gilt.

Teil B. Der Brechungsindex *(5.5 Punkte)*

Bei einer sogenannten unteren Fata Morgana wird das Licht aufgrund eines inhomogenen Brechungsindexes der Luft gebrochen. Dies wird durch einen Temperaturgradienten zwischen dem heissen Boden und der kühleren Luft darüber verursacht. An warmen und sonnigen Tagen führt dies zu Streifen auf Strassen, die dadurch nass oder wie ein Spiegel erscheinen. Dies ist in Abb. B.1 gezeigt.

Abbildung B.1: Quelle: Wikipedia: Fata Morgana, Luftspiegelung.

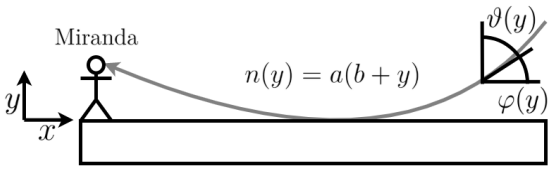


Abbildung B.2: Miranda

i. (1 Pkt.) Finde eine Beziehung zwischen $n(y)$, $\theta(y)$ und C (aus A.iii). Nimm an, dass $n(y)$ durch unendlich dünne horizontale Scheiben mit konstantem Brechungsindex angenähert werden kann.

ii. (1 Pkt.) Finde eine Beziehung zwischen $\varphi(y) = \frac{\pi}{2} - \theta(y)$ und der Steigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ des Lichtstrahls an einem beliebigen Punkt.

iii. (3.5 Pkte.) Setze $n(y)$ aus Teil B.i und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ aus Teil B.ii in Beziehung, indem du $\varphi(y)$ eliminierst. Du musst die resultierende Differentialgleichung nicht lösen. Um die volle Punktzahl zu erhalten, ist ein Ergebnis ohne trigonometrische Funktionen erforderlich.

Teil C. Die untere Fata Morgana *(7.5 Punkte)*

Der Brechungsindex von Luft hängt vom Druck P und der Temperatur T ab und hat die Form

$$n = 1 + 0.000293 \cdot \frac{PT_0}{P_0 T}$$

(mit $P_0 = 1\,\text{bar}$, $T_0 = 300\,\text{K}$). Eine Skizze des resultierenden Strahls ist in Abb. B.2 dargestellt. In den folgenden Berechnungen nehmen wir an, dass $n(y) = a \cdot (b + y)$.
Miranda befindet sich an einem sonnigen Tag im Freien. Der Druck beträgt 1.013 bar und die Temperatur in Kopfhöhe von 170 cm beträgt 35 °C. Miranda sieht etwas, das aussieht wie ein nasser Fleck, von einer unteren Fata Morgana 400 m vor sich. Eine Skizze der Situation ist in Abb. B.2 zu sehen.

i. (1 Pkt.) Berechne den Brechungsindex auf Höhe Mirandas Kopfes.

ii. (3.5 Pkte.) Was ist der minimale Brechungsindex am Boden?

iii. (1.5 Pkte.) Wie hoch ist die maximale Temperatur am Boden in °C?

iv. (1.5 Pkte.) Zeichne die Temperatur $T(y)$ als Funktion der Höhe y.

Lange Aufgabe 2.3: Paramagnetischer Kristall *(16 Punkte)*

Ein Kristall besteht aus N identischen (aber unterscheidbaren), nicht miteinander wechselwirkenden magnetischen Teilchen, von denen jedes ein magnetisches Moment der Stärke μ besitzt. Diese Teilchen werden in ein gleichmässiges externes Magnetfeld $\vec{B}$ gebracht. Jedes magnetische Moment kann entweder parallel oder antiparallel zur Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet sein. Ein Beispiel für eine mögliche Konfiguration dieses Kristalls ist in Abbildung 1 dargestellt.
Die mit jedem Teilchen verbundene Energie hängt von seiner Ausrichtung ab: Ein mit dem Magnetfeld ausgerichtetes magnetisches Moment hat die Energie $-\mu B$, während ein gegen das Feld ausgerichtetes magnetisches Moment die Energie $+\mu B$ hat.
In dieser Aufgabe untersuchen wir, wie sich die makroskopischen thermodynamischen Eigenschaften des Systems aus den mikroskopischen Konfigurationen der Teilchen ergeben.
Hinweis: Für einige Aufgaben findest du am Ende der Aufgabe nützliche Identitäten.

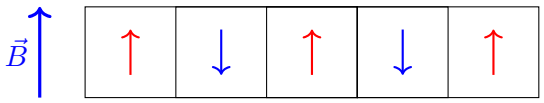


Abbildung 1

Teil A. Energie des Systems *(4 Punkte)*

Zunächst untersuchen wir die Energie des Systems. Wir bezeichnen N_+ und N_- als die Anzahl der Teilchen, deren magnetisches Moment parallel bzw. antiparallel zur Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet ist.

i. (1 Pkt.) Drücke die Gesamtenergie E des Systems als Funktion der gegebenen Variablen aus.

ii. (2 Pkte.) Für welche Werte von N_+ und N_- ist der Absolutwert der Energie des Systems maximal und für welche Werte ist er minimal?

iii. (1 Pkt.) Drücke N_+ und N_- als Funktion von N und dem Parameter $\epsilon = \dfrac{E}{N\mu B}$ aus.

Teil B. Entropie und Temperatur *(8 Punkte)*

Für einen festen Wert der Energie des Systems E gibt es mehrere verschiedene Konfigurationen des Kristalls, die diese Energie aufweisen. Mit anderen Worten: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Teilchen im Kristall so anzuordnen, dass seine Energie einen bestimmten Wert E hat. Diese Anzahl von Konfigurationen für einen bestimmten Wert der Energie bezeichnen wir als $\Omega(E)$.

i. (1 Pkt.) Was sind die Einheiten von $\Omega(E)$?

ii. (2 Pkte.) Drücke $\Omega(E)$ als Funktion der gegebenen Variablen aus. Verwende deine Ergebnisse aus Teil A und denk daran, dass die Teilchen unterscheidbar sind.

iii. (2 Pkte.) In der statistischen Physik ist die Entropie eines isolierten Systems

$$S = k_B \ln \Omega(E),$$

wobei ln der natürliche Logarithmus und $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ die Boltzmann-Konstante ist. Zeige, dass die Entropie des Kristalls

$$S = N k_B H(\epsilon)\,,$$

ist, wobei

$$H(x) = -\left[\frac{1-x}{2}\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) + \frac{1+x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)\right].$$

Arbeite mit der Annahme $N_\pm \gg 1$, unter der die Stirling-Näherung gilt: $\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$.

iv. (2 Pkte.) Die statistische Temperatur T_S eines isolierten Systems mit Entropie S ist definiert durch

$$\frac{1}{T_S} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E}\,.$$

Gib die Temperatur des Kristalls als Funktion von ϵ an.

v. (1 Pkt.) Kann diese statistische Temperatur negativ sein? Wenn ja, erkläre unter welchen Bedingungen und was dies physikalisch darstellt.

Teil C. Spezifische Wärme *(3 Punkte)*

i. (1 Pkt.) Invertiere deinen Ausdruck aus Aufgabe B.iv. um, um einen Ausdruck für E als Funktion von T_S und anderen Variablen zu erhalten.

ii. (1 Pkt.) Gib die spezifische Wärme C des Systems an.

iii. (1 Pkt.) Wie verhält sich C als $T_S \to \infty$? Erkläre kurz, warum dieses Ergebnis physikalisch sinnvoll ist.

Teil D. Dynamik *(1 Punkt)*

Wir betrachten nun die Dynamik des Systems und modellieren sie wie folgt. In jedem Zeitintervall Δt gibt es eine Wahrscheinlichkeit von 50% dass eines der Teilchen (beliebig welches) sein magnetisches Moment ändert.

i. (1 Pkt.) Wenn wir die Dynamik ausreichend lange laufen lassen (d. h. im Grenzfall $t \to \infty$), wie hoch ist dann die Energie des Systems? Welcher Konfiguration entspricht dies? Begründe deine Antwort anhand eines thermodynamischen Arguments und der in Abbildung D.1 dargestellten Grafik der Funktion $H(x)$.

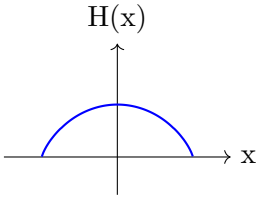


Abbildung D.1

Folgende Identitäten können hilfreich sein.
$\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ist der Tangens hyperbolicus.

- $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$
- für $-1 < x < 1$,

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right) = -x$$

Lange Aufgaben: Lösungen

Lange Aufgabe 2.1: Betrachtungen eines Regenschirms — *16*

Wir stellen einige Berechnungen über Regenschirme beziehungsweise das Wasser auf den Regenschirmen an. Wir modellieren den Regenschirm als eine flache, runde Scheibe mit Masse M und Radius R. In der ganzen Aufgabe vernachlässigen wir insbesondere die Oberflächenspannung des Wassers.

Teil A. Der stillstehende Regenschirm / Es regnet — *3.75*

Wir betrachten zunächst einen Regentropfen, der vom Himmel fällt. Regentropfen bestehen aus Wasser (Dichte: ϱ) und wir nehmen an, dass die Regentropfen kugelförmig sind. Der Luftwiderstand, der auf einen fallenden Regentropfen wirkt, beträgt in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $F = -\kappa v^2 A$, wobei κ eine Konstante ist und A die Querschnittsfläche des Tropfens senkrecht zur Fallrichtung.

i. Bestimme die Fallgeschwindigkeit des Regentropfens in Abhängigkeit seines Radius r_T, wenn er auf den Schirm aufprallt. — ***1.5***

State the idea of force equilibrium. Also give the points if there is an equation with describes the equilibrium without explicit reasoning. — 0.5

State that $A = \pi r_T^2$ (also give the points if this is used in a further subtask than here). — 0.25

Obtain the result $v_{term} = \sqrt{\frac{m_T g}{\kappa \pi r_T^2}} = \sqrt{\frac{4\pi r_T^3 \rho g}{3\kappa\pi r^2}} = \sqrt{\frac{4\rho g r_T}{3\kappa}}$. — 0.75

Der Regen ist sehr stark. Die Regenmenge in Masse pro Flächeneinheit und Zeit ist $\dot{m}$.

ii. Die Kraft, welche aufwendet werden muss, um den Regenschirm zu halten, sei F_{RS}. Bestimme den Radius der Regentropfen r_T in Abhängigkeit der relevanten Grössen. Wir gehen davon aus, dass die Gewichtskraft des auf dem Regenschirm ruhenden Wassers vernachlässigbar gering ist. — ***1.25***

Stating that the force is the momentum of the drops that hit the umbrella per time *or* $F_{\text{Rain}} = \pi R^2 \dot{m} v_{\text{term}}$. — 0.25

Stating that the total force is the weight of the umbrella plus the deceleration of the droplets *or* stating $F_{RS} = F_{\text{Rain}} + Mg$ — 0.25

Finding expression for r_T: $\sqrt{\frac{4\varrho g r_T}{3\kappa}} \dot{m}\pi R^2 = F_{RS} - Mg \Rightarrow \frac{4\varrho g r_T}{3\kappa}\dot{m}^2\pi^2 R^4 = (F_{RS} - Mg)^2 \Rightarrow r_T = \frac{(F_{RS}-Mg)^2 3\kappa}{4\pi^2 R^4 \rho g \dot{m}^2}$. — 0.75

iii. Berechne die Anzahl Tropfen auf dem Regenschirm pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von $g, \dot{m}, \varrho, \kappa$ und anderen allfällig verwendeten Grössen. — ***1***

Finding the solution $\dot{N} = \frac{\pi R^2 \dot{m}}{m} = \frac{\pi R^2 \dot{m}}{\frac{4}{3}\pi\rho r_T^3}$ — 0.5

Calculating $\dot{N} = \frac{\dot{m}}{\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{(F_{RS}-Mg)^2 3\kappa}{4\pi^2 R^4 \rho g \dot{m}^2}\right)^3} = \frac{16\pi^2 R^{16}\dot{m}^7\rho^2 g^3}{9(F_{RS}-Mg)^6\kappa^3}$ — 0.5

Teil B. Der sich drehende Regenschirm — *10.75*

Da sich das Wasser auf Davids flachen Regenschirm sammelt und am Rand hinuntertropft, beginnt David, den Regenschirm mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω zu drehen

SOLUTION

und schleudert so das Wasser weg. Da David (der Arme!) schon lange im Regen geht, hat sich ein gleichgewichtsartiger Zustand eingestellt. Wir modellieren, für vereinfachte Berechnungen, die Reibung wie folgt: Die Reibung in der radialen Richtung zwischen Wasser und Schirm ist vernachlässigbar, die tangentiale Reibung zwischen Wasser und Schirm ist unendlich. Das heisst, dass alles Wasser sich relativ zum Schirm nur in der radialen Richtung bewegen kann. Äquivalent dazu kann man sich das Wasser in radialen Rillen auf dem Schirm vorstellen, welche das Wasser auf eine (aus mitrotierender Sicht) rein radiale, gerade Bahn zwingen.

i. Erkläre, weshalb David trotz dem Fliessgleichgewicht immer ein Drehmoment auf den Schrim ausüben muss und weshalb dies mit der Energieerhaltung vereinbar ist. ***0.75***

The umbrella constantly takes up new water with zero angular momentum (vertical rain) and ejects water with some rotational momentum. To keep accelerating the water, there must act a torque. The energy therefore is transformed into kinetic energy of the water spraying outwards. Give 0.25 points for each item on this list or something closely equivalent:

- The new water on the umbrella needs to be accelerated
- The water leaving the umbrella at the edge has rotational momentum that is 'lost'
- The energy is turned into kinetic energy of the water

0.75

ii. Unter Verwendung der Resultate, Formeln, Werte und Konstanten aus Aufgabenteil A, bestimme die Rate des weggeschleuderten Wassers in Masse pro Zeit. ***0.5***

The water on the umbrella is constant, so the rate at which water 'enters' the umbrella must equal the rate at which it is expelled. The formula is thereby $\dot{V} = \dot{m}\pi R^2/\varrho$. 0.25 points if the formula is wrong but the idea of 'conservation of water' is present. 0.5

iii. Wir betrachten einen einzigen Wassertropfen, der bei einer Distanz r_i von der Schirmmitte auf den Schirm aufprallt. Finde einen einfachen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Tropfens, die er am Rand des Schirms in radiale Richtung hat, falls der Tropfen nicht vom restlichen Wasser auf dem Schrim beeinflusst wird. ***2.5***

There are multiple ways of solving this exercise. Chose the most favourable grading scheme for the student and do not combine partials from different solutions.

Using the potential in a rotating frame of reference:

Integrating the centrifugal force over the difference in radius to obtain the energy:

$$\int_{r_i}^{R} F_{ZP}\,dr = \int_{r_i}^{R} mr\omega^2\,dr = m\omega^2 \int_{r_i}^{R} r\,dr = m\omega^2\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}r_i^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 - r_i^2)$$

2

Obtaining the energy as the difference of rotational energy:

$$E = E_{rot_R} - E_{rot,i} = \frac{1}{2}J_R\omega^2 - \frac{1}{2}J_i\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - \frac{1}{2}mr_i^2\omega = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 - r_i^2)$$

SOLUTION

Obtaining the energy as the difference of rotational potential:

$$E = m(P_{rot_R} - P_{rot,i}) = m\left(\frac{1}{2}(R\omega)^2 - \frac{1}{2}(r_i\omega)^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 - r_i^2)$$

In combination with all above Arriving at the formula for the velocity:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 - r_i^2) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \omega\sqrt{R^2 - r_i^2}$$

0.5

No partial points are awarded if the solution unsucessfully tries to set up and solve a differential equation for the velocity. Only if the solution arrives at the correct result and is legit, award full points.

---

iv. Wir betrachten nun wieder die Situation im strömenden Regen. In einer erfrischenden praktischen Erfahrung hat sich gezeigt, dass die Geschwindigkeit eines kleinen Volumens an Wasser ausschliesslich davon abhängt, wo auf dem Schirm es sich befindet. Insbesondere ist die Fliessgeschwindigkeit unabhängig vom Ort, wo das Wasser auf den Schrim getropft ist. Finde einen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Wassers bei der Distanz r von der Schirmmitte, der neben r nur von Konstanten abhängt.
Tipp: Das Wasser besteht aus vielen Tropfen, die sich in inelastischen Kollisionen zusammengefunden haben. Tipp: Du darfst die folgende Identität ohne Begründung verwenden: $\int_0^a b\sqrt{a^2 - b^2}db = \frac{a^3}{3}$. *2*

Stating the idea that the total outwards momentum of the water is the sum of all outwards momenta of all hypothetical independent droplets. Also award points if the idea is not explicitly stated but it is clear that the calculations tried to use this fact 0.5

Integrate over the total outwards momentum of the water:

$$\bar{v} = \frac{1}{\dot{m}r^2\pi}\int_0^r 2\pi r_i\dot{m}v_r(r_i)dr_i = \frac{2}{r^2}\int_0^r \omega r_i\sqrt{(r^2 - r_i^2)}dr_i = \frac{2}{r^2}\omega\int_0^r r_i\sqrt{(r^2 - r_i^2)}dr_i = \frac{2}{r^2}\frac{1}{3}\omega r^3 = \frac{2}{3}\omega r$$

. Deduct 0.25 Points if there are dimensional errors originating from the fact that $\dot{m}$ has the units of mass per time per area. (Note that the prefactor of $\frac{1}{\dot{m}\pi r^2}$ describes all the mass which is considered.) Deduct 0.5 Points if the fact that more water hits the umbrella further out (Factor $2\pi r$ is not taken into account and award points from carried-on error (Folgefehler). 1.5

---

v. Berechne, wie hoch das Wasser auf dem Schirm steht und zeige, dass die Höhe unabhängig vom Radius ist. *2*

Mentionning or making use of radial symmetry 0.25

Mentionning or making use of the fact that the rate of water leaving and entering the circle must be the same in the case of dynamic equilibrium 0.25

We equate the rate of water entering the cirle ($r^2\pi\dot{m}$) with radius r with the rate of the water leaving the circle, given by $2\pi r\bar{v}(r)h\varrho$:

$$2\pi r\bar{v}(r)h\varrho = r^2\pi\dot{m}$$

SOLUTION

0.5

$$2\pi r\frac{2}{3}\omega r h\varrho = r^2\pi\dot{m}$$
$$2\frac{2}{3}\omega h\varrho = \dot{m}$$
$$h = \frac{3\dot{m}}{4\omega\varrho}$$

The thickness of the water layer is independent of the radius. 1

vi. Berechne, ausgehend vom Resultat der letzten Teilaufgabe, das Massenträgheitsmoment des Regenschirms inklusive dem sich darauf befindenden Wassers. Nimm an, dass die Masse des Schirms selbst gleichmässig verteilt ist.
Hinweis: Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders mit Drehachse koaxial zur Rotationsachse durch den Schwerpunkt ist $J = \frac{1}{2}MR^2$. ***1***

The moment of inertia of the umbrella is $J = \frac{1}{2}MR^2$ and the moment of inertia of the water is $J = \frac{1}{2}V\varrho R^2 = \frac{1}{2}\pi R^4\frac{3\dot{m}}{4\omega\varrho}\varrho$. The sum thereoff is $J = \frac{1}{2}R^2\left(M + \pi\frac{3\dot{m}}{4\omega}\right)$. If only the moment of inertia of the umbrella is found, award 0.25 Points. If only the moment of inertia of the water is found, award 0.5 points If both moments of inertia are found but not added explicitly here or in a later excersice, award 0.75 points. 1

vii. In einer kurzen Zeitspanne Δt wird eine bestimmte Menge Wasser weggeschleudert und eine bestimmte Menge an Wasser kommt neu auf den Schrim. Erkläre, weshalb mit dieser Überlegung das Drehmoment bestimmt werden kann, welches David auf den Schirm ausüben muss, um seine Drehgeschwindigkeit aufrecht zu erhalten und berechne es. ***1.5***

Give 0.25 points for each mentionned idea or equaivalent statement:

- The water which is thrown off the umbrella within Δt has some nonzero rotational intertia, but the water which is rained onto the umbrella has no rotational inertia.
- The mass and mass distribution of the umbrella overall stays the same and therefore the moment of inertia also stays the same.
- Due to conservation of rotational momentum, the change in rotational inertia has to be balanced (by David's torque).

0.75

The change during the timestep Δt in rotational momentum is $\Delta L = \Delta mvr = \dot{m}R^4\Delta t\pi\omega$ Note that the new water only increases the moment of inertia, but it does not in- or decrease the rotational momentum. $M = \frac{L}{\Delta t} = \dot{m}R^4\pi\omega$. 0.75

viii. Berechne die Rotationsenergie des gesamten Regenschirms inklusive des sich darauf befindenden Wassers. ***0.5***

Using the formula for rotational energy:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}R^2\left(M + \frac{\pi 3\dot{m}}{4\omega}\right)\omega^2$$

0.5

SOLUTION

Teil C. Wasserschlacht *1.5*

i. Berechne, wie weit das Wasser vom Zentrum des Schirms spritzt, wenn dieser in einer Höhe h über dem Boden gedreht wird. ***1.5***

The time until a water droplet hits the ground is given by $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Also give the points if the time is not explicitly calculated but appears in the formulae below. 0.5

The radial velocity is $v_r(r) = \frac{4}{3}\omega R$. Therefore, the drop moves $t\frac{4}{3}\omega R$ radially from the edge of the umbrella before it hits the ground, which equates to $\left(t\frac{4}{3}\omega + 1\right) R$. Deduct 0.25 points if the $+1R$ is missing. 0.25

The tangential velocity is $v_r(r) = \omega R$. Therefore, the drop moves $t\omega R$ tangentially from the edge of the umbrella before it hits the ground. 0.25

By the pythagorean theorem, the droplet hits the ground at a distance of $\sqrt{(t\omega R)^2 + \left(t\frac{4}{3}\omega + 1\right)^2 R^2} = Rt\omega\sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{t\omega}\right)^2} = R\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{g}{2h}}\frac{1}{\omega}\right)^2}$ 0.5

SOLUTION

Lange Aufgabe 2.2: Untere Fata Morgana *16*

Teil A. Licht und Medien *3*

i. Ein Strahl, der sich in einem Medium 1 mit der Brechungsindex n_1 ausbreitet, trifft in einem Winkel θ_1 zur Oberflächennormalen auf eine Grenzfläche zu einem Medium 2 mit Brechungsindex n_2, siehe Abb. A.1. Wie hängt der Austrittswinkel θ_2 von θ_1, n_1 und n_2 ab?

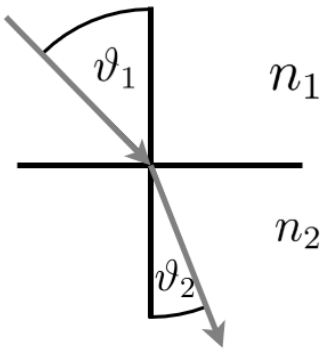


Abbildung A.1: Lichtstrahl, der durch zwei verschiedene Medien hindurchgeht.

1

By snells law, we find that

$$\sin(\theta_1)n_1 = \sin(\theta_2)n_2.$$

1

ii. Es seien N viele Materialien mit parallelen horizontalen Grenzflächen zwischen ihnen gegeben. Jedes Material i hat einen Brechungsindex n_i. Ein Lichtstrahl durchquert durch diesen Materialstapel (unter der Annahme, dass keine Totalreflexionen auftreten). Für jede Schicht definieren wir den Winkel θ_i als den Winkel zwischen der Vertikalen und dem Strahl. Das System ist in Abb. A.2 zu sehen. Wie ist die Beziehung zwischen dem Winkel θ_i in der Schicht i und dem Anfangswinkel θ_1?

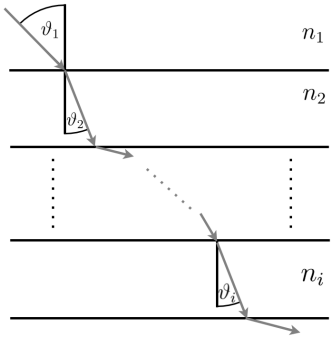


Abbildung A.2: Lichtstrahl durch mehrere Medien.

1.5

SOLUTION

Notice, that the angle of light in medium i is the same at the point of entry and exit in the medium. Hence, we can find the following equalities by Snell's law:

$$\sin(\theta_1)n_1 = \sin(\theta_2)n_2 = \sin(\theta_3)n_3 = \cdots = \sin(\theta_i)n_i.$$

Noting that the angle at entry is equal to the angle at the exit of the medium i.	0.5
Finding the relation between the required quantities.	1
iii. Finde eine Funktion $f(\theta_i, n_i)$, sodass $f(\theta_i, n_i) = f(\theta_1, n_1) = C =$ konstant gilt.	***0.5***
From the previous task, we find that $f(\theta_i, n_i) = \sin(\theta_i)n_i = C$ satisfies the condition.	0.5
Teil B. Der Brechungsindex	*5.5*

Bei einer sogenannten unteren Fata Morgana wird das Licht aufgrund eines inhomogenen Brechungsindexes der Luft gebrochen. Dies wird durch einen Temperaturgradienten zwischen dem heissen Boden und der kühleren Luft darüber verursacht. An warmen und sonnigen Tagen führt dies zu Streifen auf Strassen, die dadurch nass oder wie ein Spiegel erscheinen. Dies ist in Abb. B.1 gezeigt.

Abbildung B.1: Quelle: Wikipedia: Fata Morgana, Luftspiegelung.

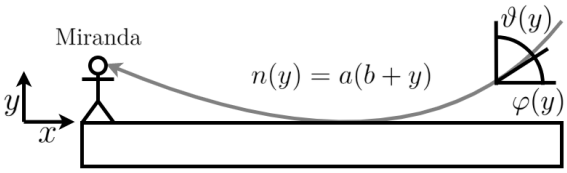


Abbildung B.2: Miranda

i. Finde eine Beziehung zwischen $n(y)$, $\theta(y)$ und C (aus A.iii). Nimm an, dass $n(y)$ durch unendlich dünne horizontale Scheiben mit konstantem Brechungsindex angenähert werden kann.	***1***

SOLUTION

We use the result from the previous task and have that

$$\sin(\theta(y)) = \frac{C}{n(y)}.$$

1

ii. Finde eine Beziehung zwischen $\varphi(y) = \frac{\pi}{2} - \theta(y)$ und der Steigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ des Lichtstrahls an einem beliebigen Punkt. ***1***

The derivative is defined as

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{(x+h) - x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

For small h we the function is approximately linear so we can draw a right triangle with the function φ, Δy and Δx. In this triangle we have

$$\tan(\varphi) = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Putting both together, we find

$$\tan(\varphi(y)) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Finding either one of the representations for $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. This point is also given, if the next point is achieved.	0.5
Finding the relation between the given quantities	0.5

iii. Setze $n(y)$ aus Teil B.i und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ aus Teil B.ii in Beziehung, indem du $\varphi(y)$ eliminierst. Du musst die resultierende Differentialgleichung nicht lösen. Um die volle Punktzahl zu erhalten, ist ein Ergebnis ohne trigonometrische Funktionen erforderlich. ***3.5***

We first rewrite our result for $\theta(y)$ by using a tangent instead of a sine. This is done by looking at a right triangle and using the pythagorean theorem.

$$\tan(\theta(y)) = \frac{C}{\sqrt{n(y)^2 - C^2}}.$$

Using the given relation between φ and θ, we find:

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \frac{\pi}{2} - \theta(y) \\
\varphi(y) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{C}{\sqrt{n(y)^2 - C^2}}\right) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{C}{\sqrt{n(y)^2 - C^2}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Notice that $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot(x)$, where $\cot(x)$ is the cotangent of x. We thus find

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{n(y)^2 - C^2}}{C} = \sqrt{\left(\frac{n(y)}{C}\right)^2 - 1}.$$

Rewriting $\theta(y)$ with the tangent.	1

SOLUTION

Correctly finding a relation between the given quantities, involving trigonometric functions.	1
Finding that $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot(x)$	1
Finding the relation without trigonometric functions.	0.5

Teil C. Die untere Fata Morgana *7.5*

Der Brechungsindex von Luft hängt vom Druck P und der Temperatur T ab und hat die Form

$$n = 1 + 0.000293 \cdot \frac{PT_0}{P_0 T}$$

(mit $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$). Eine Skizze des resultierenden Strahls ist in Abb. B.2 dargestellt. In den folgenden Berechnungen nehmen wir an, dass $n(y) = a \cdot (b + y)$.
Miranda befindet sich an einem sonnigen Tag im Freien. Der Druck beträgt $1.013\,\mathrm{bar}$ und die Temperatur in Kopfhöhe von $170\,\mathrm{cm}$ beträgt $35\,^\circ\mathrm{C}$. Miranda sieht etwas, das aussieht wie ein nasser Fleck, von einer unteren Fata Morgana $400\,\mathrm{m}$ vor sich. Eine Skizze der Situation ist in Abb. B.2 zu sehen.

i. Berechne den Brechungsindex auf Höhe Mirandas Kopfes. *1*

We can assume pressure to be constant at small heights. Hence the formula reads

$$n_h = 1 + 0.000293 \cdot \frac{PT_0}{P_0 T} = 1.00029.$$

Noting that pressure is constant. This point is also given if not stated but correctly used.	0.5
Numeric Result	0.5

ii. Was ist der minimale Brechungsindex am Boden? *3.5*

First, we observe that the ray hitting Mirandas eye comes from such an angle that it appears to stem from 400 meters away on the ground. Hence, we have that

$$\sin(\theta_h) = \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} = \sin(\arctan(\frac{l}{h})).$$

Next, we observe that for the lowest refractive index, we need that the lightray is parallel to the ground at that height. In other words:

$$\sin(\theta_f) = 1.$$

Plugging this in the results, we obtained in part B.i) we get the result:

$$n_f = C = \sin(\theta_h) \cdot n_h = 1.00028.$$

Noting the relation between the angle of the ray hitting Miranda's eye and the quantities h and l in any way.	0.5
Finding an equation for $\sin(\theta_h)$.	1
Noting that $\sin(\theta_f) = 1$. 0.5 if only stated that ray has to be flat at the ground.	1

SOLUTION

Making the conection to the result optained in B.i)	0.5
Numerical Result.	0.5
iii. Wie hoch ist die maximale Temperatur am Boden in °C?	***1.5***

We can rewrite the equation for the refractive index to find

$$T_f = \frac{0.000293 \cdot PT_0}{(n_f - 1)P_0} = 45\,^\circ\mathrm{C}.$$

Rewrite the equation for the refractive index.	1
Numerical Result.	0.5
iv. Zeichne die Temperatur $T(y)$ als Funktion der Höhe y.	***1.5***

We can plug in our assumption that $n(y) = a(b + y)$ into the equation given for the refractive index.

$$T(y) = \frac{0.000293 \cdot \frac{PT_0}{P_0}}{ab - 1 + ay}.$$

Hence the curve looks like x^{-1}.

Correctly rewriting the equation for $T(y)$.	0.5
Axes drawn with a ruler.	0.25
Plot big enough (at least 1/4 page).	0.25
Axes labelled.	0.25
Plot looks approximately like a shifted x^{-1}. Point not given if function diverges at $y = 0$. If zero is not indicated on the axis, the points are also not given.	0.25

SOLUTION

Lange Aufgabe 2.3: Paramagnetischer Kristall *16*

Ein Kristall besteht aus N identischen (aber unterscheidbaren), nicht miteinander wechselwirkenden magnetischen Teilchen, von denen jedes ein magnetisches Moment der Stärke μ besitzt. Diese Teilchen werden in ein gleichmässiges externes Magnetfeld $\vec{B}$ gebracht. Jedes magnetische Moment kann entweder parallel oder antiparallel zur Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet sein. Ein Beispiel für eine mögliche Konfiguration dieses Kristalls ist in Abbildung 1 dargestellt.
Die mit jedem Teilchen verbundene Energie hängt von seiner Ausrichtung ab: Ein mit dem Magnetfeld ausgerichtetes magnetisches Moment hat die Energie $-\mu B$, während ein gegen das Feld ausgerichtetes magnetisches Moment die Energie $+\mu B$ hat.
In dieser Aufgabe untersuchen wir, wie sich die makroskopischen thermodynamischen Eigenschaften des Systems aus den mikroskopischen Konfigurationen der Teilchen ergeben.
***Hinweis:* Für einige Aufgaben findest du am Ende der Aufgabe nützliche Identitäten.**

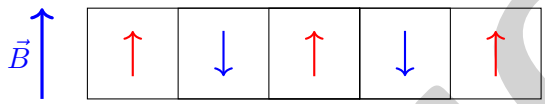


Abbildung 1

Teil A. Energie des Systems *4*

Zunächst untersuchen wir die Energie des Systems. Wir bezeichnen N_+ und N_- als die Anzahl der Teilchen, deren magnetisches Moment parallel bzw. antiparallel zur Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet ist.

i. Drücke die Gesamtenergie E des Systems als Funktion der gegebenen Variablen aus. *1*

A particle with magnetic moment $\pm\mu$ has energy $\mp\mu B$ (note the sign inversion), as indicated in the introduction. Thus the total energy is given by

$$E = \mu B(N_- - N_+).$$

1

Sign mistake: -0.5

ii. Für welche Werte von N_+ und N_- ist der Absolutwert der Energie des Systems maximal und für welche Werte ist er minimal? *2*

To maximise the abolsute value of the energy, one must maximise the difference $|N_- - N_+|$. This is achieved when either $N_- = N$ and $N_+ = 0$ or $N_+ = N$ and $N_- = 0$, i.e. all the moments point in the same direction 1

The $|N_- - N_+|$, and thus the energy, is minimised, when $N_- = N_+ = N/2$, i.e. half the moments point in one direction and half in the other. 1

If the relation $N_- = N_+$ is given without any explicit value for N_- or N_+: -0.5

SOLUTION

iii. Drücke N_+ und N_- als Funktion von N und dem Parameter $\epsilon = \dfrac{E}{N\mu B}$ aus. *1*

Inversing the relations

$$N_- - N_+ = N\epsilon \quad \text{and} \quad N_- + N_+ = N$$

one obtains

$$N_\pm = \frac{N}{2}(1 \mp \epsilon).$$

1

Sign mistake, if not carried from A.i.: -0.5

Teil B. Entropie und Temperatur *8*

Für einen festen Wert der Energie des Systems E gibt es mehrere verschiedene Konfigurationen des Kristalls, die diese Energie aufweisen. Mit anderen Worten: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Teilchen im Kristall so anzuordnen, dass seine Energie einen bestimmten Wert E hat. Diese Anzahl von Konfigurationen für einen bestimmten Wert der Energie bezeichnen wir als $\Omega(E)$.

i. Was sind die Einheiten von $\Omega(E)$? *1*

$\Omega(E)$ has no units because N and $N_\pm$ have not units. This is relevant in task B.iii., where the logarithm of $\Omega(E)$ is taken, which only makes sense if it has no units. 1

ii. Drücke $\Omega(E)$ als Funktion der gegebenen Variablen aus. Verwende deine Ergebnisse aus Teil A und denk daran, dass die Teilchen unterscheidbar sind. *2*

From the previous part it follows that once the energy is fixed, then $N_\pm$ are as well. Thus the only thing which distinguishes configurations amongst them is which particles have moment aligned with and against the magnetic field. (Note the importance of the fact that the particles are dinstinguishable here.) Thus, to obtain a valid configuration, one must simply chose N_+ (or equivalently N_-) particles amongst the N total particles. The number of ways to do this is given by

$$\Omega(E) = \binom{N}{N_+} = \binom{N}{N_-} = \frac{N!}{N_+!N_-!}.$$

2

iii. In der statistischen Physik ist die Entropie eines isolierten Systems

$$S = k_B \ln \Omega(E),$$

wobei $\ln$ **der natürliche Logarithmus und** $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ **die Boltzmann-Konstante ist. Zeige, dass die Entropie des Kristalls**

$$S = Nk_B H(\epsilon)\,,$$

ist, wobei

$$H(x) = -\left[\frac{1-x}{2}\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) + \frac{1+x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)\right].$$

Arbeite mit der Annahme $N_\pm \gg 1$, unter der die Stirling-Näherung gilt: $\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$. *2*

SOLUTION

The result is a matter of algebraic calculations and logarithmic properties.

$$\begin{aligned}\ln\Omega &= \ln\left(\frac{N!}{N_+!N_-!}\right) = \ln N! - \ln N_+! - \ln N_-! \\ &\approx N\ln N - \frac{N}{2}(1-\epsilon)\ln\left(\frac{N}{2}(1-\epsilon)\right) - \frac{N}{2}(1+\epsilon)\ln\left(\frac{N}{2}(1+\epsilon)\right)\end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned}&= N\ln N - N\frac{1-\epsilon}{2}\left[\ln N + \ln\left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)\right] - N\frac{1+\epsilon}{2}\left[\ln N + \ln\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)\right] \\ &= -N\left[\frac{1-\epsilon}{2}\ln\left(\frac{1-\epsilon}{2}\right) + \frac{1+\epsilon}{2}\ln\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Thus the entropy is indeed

$$S = -Nk_B\left[\frac{1-\epsilon}{2}\ln\left(\frac{1-\epsilon}{2}\right) + \frac{1+\epsilon}{2}\ln\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)\right].$$

1

iv. Die statistische Temperatur T_S eines isolierten Systems mit Entropie S ist definiert durch

$$\frac{1}{T_S} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E}.$$

Gib die Temperatur des Kristalls als Funktion von ϵ an. *2*

First, compute

$$H'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right).$$

Then, making use of the chain rule

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\epsilon}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}E} = k_B N H'(\epsilon)\cdot\frac{1}{N\mu B}$$

so that

$$T_S = \frac{2\mu B}{k_B\ln\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)}.$$

2

An equivalent expression for $1/T_S$ is also accepted.

v. Kann diese statistische Temperatur negativ sein? Wenn ja, erkläre unter welchen Bedingungen und was dies physikalisch darstellt. *1*

Yes the statistical temperature can be negative. This happens when $1-\epsilon < 1+\epsilon$, i.e. when $\epsilon > 0$, which is equivalent to $E > 0$. 0.5

Physically, this just means that $N_+ < N_-$, so more moments are aligned anti-parallel to the direction of the magnetic field. 0.5

SOLUTION

Teil C. Spezifische Wärme *3*

i. Invertiere deinen Ausdruck aus Aufgabe B.iv. um, um einen Ausdruck für E als Funktion von T_S und anderen Variablen zu erhalten. ***1***

First, rearrange the expression for T_S obtained in task B.iv. to obtain

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right) = \frac{\mu B}{k_B T_S}.$$

Then apply tanh on both sides of the equality and use the given identity:

$$-\epsilon = \tanh\left(\frac{\mu N}{k_B T}\right),$$

or equivalently

$$E = -N\mu B \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right).$$

1

Full credits are also given if the expressions are given in terms of exponentials.

ii. Gib die spezifische Wärme C des Systems an. ***1***

By definition, $C = \mathrm{d}E/\mathrm{d}T$. Using the given identity for $\tanh'$, one gets

$$C = \frac{N}{k_B}\left(\frac{\mu B}{T}\right)^2\left[1-\tanh^2\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)\right].$$

1

Full credits are also given if the expressions are given in terms of exponentials.

iii. Wie verhält sich C als $T_S \to \infty$? Erkläre kurz, warum dieses Ergebnis physikalisch sinnvoll ist. ***1***

As $T_S \to \infty$, $C \to 0$. 0.5

When $T_S \to \infty$ the two orientations become equiprobable (see task A.ii.) so adding heat to the system does not significantly increase the energy. 0.5

Teil D. Dynamik *1*

Wir betrachten nun die Dynamik des Systems und modellieren sie wie folgt. In jedem Zeitintervall Δt gibt es eine Wahrscheinlichkeit von 50% dass eines der Teilchen (beliebig welches) sein magnetisches Moment ändert.

i. Wenn wir die Dynamik ausreichend lange laufen lassen (d. h. im Grenzfall $t \to \infty$), wie hoch ist dann die Energie des Systems? Welcher Konfiguration entspricht dies? Begründe deine Antwort anhand eines thermodynamischen Arguments und der in Abbildung D.1 dargestellten Grafik der Funktion $H(x)$.

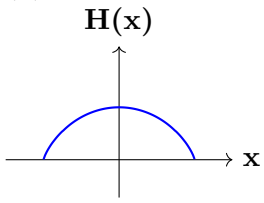


Abbildung D.1

SOLUTION

1

The second law of thermodynamics states that the entropy of an isolated system will tend towards its maximum. From the graph of $H(x)$, one sees that the maxium of the entropy S is at $\epsilon = 0$, i.e. $E = 0$. This corresponds to the configuration with $N_+ = N_- = N/2$ as already observed in task A.ii. 1

Folgende Identitäten können hilfreich sein.
$\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **ist der Tangens hyperbolicus.**

- $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$
- **für** $-1 < x < 1$**,**

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right) = -x$$

SOLUTION