PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Tour final

online, 20 - 21 mars 2021

Partie théorique 1	**:**	**1 problème**
Durée	:	60 minutes
Total	:	15 points
Moyens autorisés	:	Calculatrice sans base de données Matériel pour écrire et dessiner Une feuille de notes A4 manuscrite écrite des deux côtés

Bonne chance !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#9c6c40df

Problèmes théoriques

Durée : 60 minutes
Cotation : 15 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction. Inscrivez votre nom et le numéro de problème sur les feuilles. Numérotez-les également.

Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.

Constantes fondamentales

Fréquence de la transition hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Constante magnétique	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Constante des gaz	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Problème 1.1 : Frein à courants de Foucault *(15 points)*

Le modèle de train ICE 3 fait usage d'un frein linéaire à courants de Foucault. Le frein à courants de Foucault est consitué de six patins polaires positionnés juste au-dessus du rail lors de leur utilisation. Ces patins génèrent alors un champ magnétique perpendiculaire au rail.

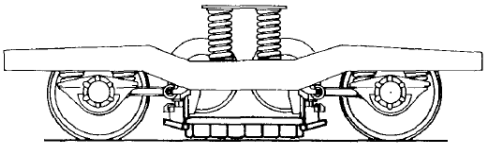


FIGURE 1.1.1 – Esquisse d'une suspension avec le frein à courants de Foucault au centre en bas.

Dans ce qui suit, nous regarderons de plus près le fonctionnement du frein à courants de Foucault et ferons une approximation quantitative de la puissance de freinage.

Partie A. Fonctionnement *(1.5 point)*

i. (1.5 pt.) Expliquez qualitativement et en quelques phrases le fonctionnement du frein à courants de Foucault.

Partie B. Courants dans le rail *(8.5 points)*

Pour étudier l'action du frein à courants de Foucault plus précisément, nous supposons que les rails ont une hauteur de 5 cm, une largeur de 7 cm et une résistivité de $5 \times 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. Le frein à courants de Foucault a lui une longueur de 1 m et génère un champ magnétique homogène perpendiculaire au rail.

i. (2 pt.) Esquissez qualitativement les courants induits dans le rail. Indiquez aussi la direction du champ magnétique, la direction du mouvement du train et le sens conventionnel du courant.
Indice : réfléchissez à l'apparence des courants si le rail est plus large que le frein à courants de Foucault. Vous négligez ainsi les éventuels effets au bord du rail.

A la vitesse de $60\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$, un frein à courants de Foucault d'un mètre de long a une force de freinage de 8000 N.

ii. (1 pt.) Que vaut la puissance de freinage du frein à courants de Foucault à cette vitesse ?

iii. (4 pt.) Estimez l'intensité du courant dans le rail.

iv. (1.5 pt.) Comment se comporte la force de freinage en fonction de la vitesse ? Pourquoi le frein à courants de Foucault n'est-il pas approprié pour complètement arrêter les roues ?

Partie C. Distance de freinage *(5 points)*

Dans cette partie, nous considérons la distance de freinage d'un wagon de chemin de fer d'une masse de 77 tonnes. Le wagon a deux suspensions, une à l'arrière et une à l'avant. Sur chaque suspension est monté un frein à courants de Foucault à gauche et un à droite, chacun d'un mètre de long. Les rails ont les mêmes propriétés que dans la partie B.

i. (3 pt.) Etablissez l'équation du mouvement du wagon et calculez le temps requis pour freiner le train depuis $150\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ jusqu'à $50\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Nous négligeons la résistance de l'air et considérons uniquement l'effet du freinage du frein à courants de Foucault.

ii. (2 pt.) Trouvez la distance de freinage pour passer de $150\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ à $50\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

Problèmes théoriques : solutions

Problème 1.1 : Frein à courants de Foucault *15 pt.*

Le modèle de train ICE 3 fait usage d'un frein linéaire à courants de Foucault. Le frein à courants de Foucault est consitué de six patins polaires positionnés juste au-dessus du rail lors de leur utilisation. Ces patins génèrent alors un champ magnétique perpendiculaire au rail.

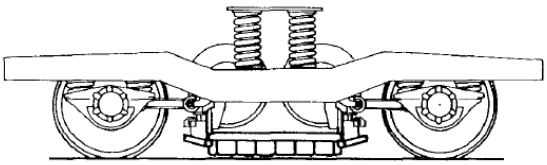


FIGURE 1.1.1 – Esquisse d'une suspension avec le frein à courants de Foucault au centre en bas.

Dans ce qui suit, nous regarderons de plus près le fonctionnement du frein à courants de Foucault et ferons une approximation quantitative de la puissance de freinage.

Partie A. Fonctionnement *1.5 pt.*

i. Expliquez qualitativement et en quelques phrases le fonctionnement du frein à courants de Foucault. **1.5 pt**

The magnets in the brake induce an electromotive force in the rail and therefore a current. 0.5 pt.

The induced currents produce a magnetic field themselves which acts on the charge carriers in the brake. 0.5 pt.

According to Lenz's rule, this force acts against its cause (the velocity difference between rail and train) and decelerates the train. 0.5 pt.

Partie B. Courants dans le rail *8.5 pt.*

Pour étudier l'action du frein à courants de Foucault plus précisément, nous supposons que les rails ont une hauteur de $5\,\mathrm{cm}$, une largeur de $7\,\mathrm{cm}$ et une résistivité de $5 \times 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. Le frein à courants de Foucault a lui une longueur de $1\,\mathrm{m}$ et génère un champ magnétique homogène perpendiculaire au rail.

i. Esquissez qualitativement les courants induits dans le rail. Indiquez aussi la direction du champ magnétique, la direction du mouvement du train et le sens conventionnel du courant. ***Indice : réfléchissez à l'apparence des courants si le rail est plus large que le frein à courants de Foucault. Vous négligez ainsi les éventuels effets au bord du rail.*** **2 pt.**

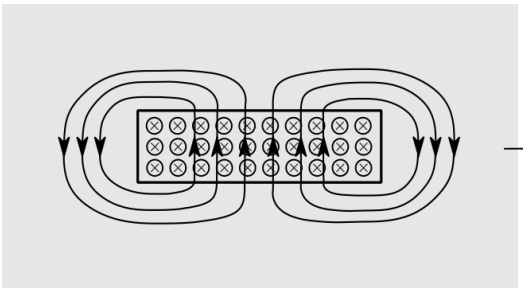


FIGURE 1.1.2 – Sketch of the eddy currents in the reference frame of the train, so the rail/metal plate is moving.

SOLUTIONS

The sketch looks nice. 0.5 pt.

The direction of the magnetic field is drawn. 0.25 pt

The direction of the train movement is drawn. 0.25 pt

The current flows along the diameter in the direction of the wheel center. After the pole shoe the current flows back on both sides outside of the pole shoe. 0.5 pt.

The direction of the current can be determined by the right hand rule. Note: The result depends on how the direction of the magnetic field and the direction of the train movement is drawn. 0.5 pt.

A la vitesse de $60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, un frein à courants de Foucault d'un mètre de long a une force de freinage de $8000\,\mathrm{N}$.

ii. Que vaut la puissance de freinage du frein à courants de Foucault à cette vitesse ? 1 pt.

The braking power is

$$P = Fv.$$

0.5 pt.

A numerical application gives

$$P = 0.13\,\mathrm{MW}.$$

0.5 pt.

iii. Estimez l'intensité du courant dans le rail. 4 pt.

According to energy conversation this dissipated heat is equal to the braking power. 0.5 pt.

The dissipated heat of the circuit is

$$P = RI^2.$$

To calculate the current I we need a an estimation of the resistance R. 0.5 pt.

For simplicity we assume that the current flows uniformely from one side to the other side in the rail on a length equal to pole shoe. 0.5 pt.

The resistance of a piece of metal with length s and cross-section A is

$$R = \rho\frac{s}{A},$$

where ρ is the resistivity. 0.5 pt.

So the resistance of this part of the rail is

$$R = \rho\frac{l}{bh}.$$

0.5 pt.

Since the current also flows back we get a total resistance

$$R_{\mathrm{tot}} = 2\rho\frac{l}{bh}.$$

0.5 pt.

SOLUTIONS

We get

$$I = \sqrt{\frac{Pbh}{2\rho l}}.$$

0.5 pt.

The numerical value is 21 kA. 0.5 pt.

iv. Comment se comporte la force de freinage en fonction de la vitesse ? Pourquoi le frein à courants de Foucault n'est-il pas approprié pour complètement arrêter les roues ? **1.5 pt**

The Lorentz force and therefore the induced current are proportional to velocity of the train. This means that the strength of the magnetic field produced by the eddy current and therefore the braking force is proportional to the velocity. 1 pt.

Since the force is proportional to velocity, there is almost no braking force for low velocities. 0.5 pt.

Partie C. Distance de freinage *5 pt.*

Dans cette partie, nous considérons la distance de freinage d'un wagon de chemin de fer d'une masse de 77 tonnes. Le wagon a deux suspensions, une à l'arrière et une à l'avant. Sur chaque suspension est monté un frein à courants de Foucault à gauche et un à droite, chacun d'un mètre de long. Les rails ont les mêmes propriétés que dans la partie B.

i. Etablissez l'équation du mouvement du wagon et calculez le temps requis pour freiner le train depuis $150\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ jusqu'à $50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Nous négligeons la résistance de l'air et considérons uniquement l'effet du freinage du frein à courants de Foucault. **3 pt.**

The equations of motion are

$$\sum_i F_i = Ma = M\dot{v}.$$

0.5 pt.

In our case the force F is proportional to v and we get the differential equation

$$-Av = m\dot{v}.$$

0.5 pt.

The solution of this equation is

$$v(t) = Ce^{-\frac{A}{m}t},$$

with integration constant C. 0.5 pt.

The initial condition $v(0) = v_i$ gives

$$v(t) = v_i e^{-\frac{A}{m}t}.$$

0.5 pt.

Now we can solve for t_f when it reaches the final velocity v_f.

$$t_f = \log\left(\frac{v_i}{v_f}\right)\frac{m}{A}$$

0.5 pt.

SOLUTIONS

From the braking force at $60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ we can determine the constant $A = 1920\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. This gives $t_f = 44\,\mathrm{s}$. 0.5 pt.

ii. Trouvez la distance de freinage pour passer de $150\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ à $50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. **2 pt.**

The solution from above is $v(t) = v_i e^{-\frac{A}{m}t}$ and we make an integration

$$s(t) = -\frac{v_i m}{A} e^{-\frac{A}{m}t} + s_0.$$

1 pt.

Therefore the distance for the braking is

$$\Delta s = -\frac{v_i m}{A} e^{-\frac{A}{m}t_f} + \frac{v_i m}{A} = \frac{(v_i - v_f)\, m}{A}.$$

0.5 pt.

We get a numerical value of

$$\Delta s = 1114\,\mathrm{m}.$$

0.5 pt.

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Tour final

online, 20 - 21 mars 2021

Partie théorique 2	**:**	**1 problème**
Durée	:	60 minutes
Total	:	16 points
Moyens autorisés	:	Calculatrice sans base de données Matériel pour écrire et dessiner Une feuille de notes A4 manuscrite écrite des deux côtés

Bonne chance !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Problèmes théoriques

Durée : 60 minutes
Cotation : 16 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction. Inscrivez votre nom et le numéro de problème sur les feuilles. Numérotez-les également.

Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.

Constantes fondamentales

Fréquence de la transition hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Constante magnétique	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Constante des gaz	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Problème 2.1 : Processus polytropiques *(16 points)*

Partie A. Endothermie et exothermie *(7 points)*

Considérez le processus polytropique

$$TV^{k-1} = \text{const.}$$

pour n moles de gaz parfait.

i. (1 pt.) Quels sont les noms du processus lorsque l'indice polytropique vaut $k = 0, 1, \gamma, \infty$, respectivement ? ($\gamma = C_p/C_V$ est l'indice adiabatique.)

ii. (2 pt.) Esquissez la relation p–V du processus polytropique pour $k = 0, 1, \gamma, \infty$ sur un seul diagramme, avec intersection en $A\,(V_0, p_0)$.

iii. (2 pt.) Le diagramme que vous avez dessiné en ii. devrait diviser le plan p–V en huit régions, car les quatre courbes n'ont qu'une seule intersection. Considérez un processus polytropique de A vers chacune des huit régions. Etant donné que la chaleur $\mathrm{d}Q$ absorbée par le gaz durant un processus polytropique infinitésimal est

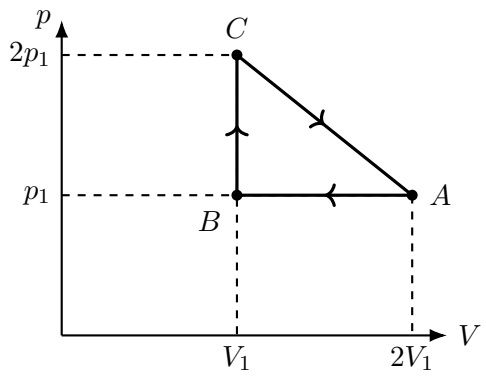
$$\mathrm{d}Q = nC_V \frac{k-\gamma}{k-1}\mathrm{d}T$$

discutez cas par cas si le processus est endothermique ou exothermique, c'est-à-dire si $\mathrm{d}Q$ est positif ou négatif.

iv. (2 pt.) En conséquence ou d'une autre manière, prouvez que pour tout processus polytropique d'un gaz parfait, chaque point de tangence entre le processus et une courbe adiabatique est un point limite entre un processus endothermique et exothermique.

Partie B. Cycle triangulaire p–V *(9 points)*

1 mol de gaz parfait monoatomique est soumis à un cycle tel que montré dans la figure. AB, BC et CA sont toutes des lignes droites. Les quantités importantes sont indiquées sur la figure.



i. (1 pt.) Trouvez l'expression $p(V)$ pour le processus expansif CA.

ii. (3.5 pt.) En fait, l'affirmation que vous avez prouvée en A.iv. est vraie non seulement pour n'importe quel processus polytropique, mais aussi pour n'importe quel processus général. En outre, elle est également vraie dans le sens inverse, c'est-à-dire que tout point limite entre un processus endothermique et exothermique est aussi un point où le processus est tangent à une courbe adiabatique. De ce fait, trouvez le point limite entre le processus endothermique et exothermique sur CA.

iii. (4.5 pt.) Trouvez l'efficacité η du cycle.

Problèmes théoriques : solutions

Problème 2.1 : Processus polytropiques *16 pt.*

Partie A. Endothermie et exothermie *7 pt.*

Considérez le processus polytropique

$$TV^{k-1} = \textbf{const.}$$

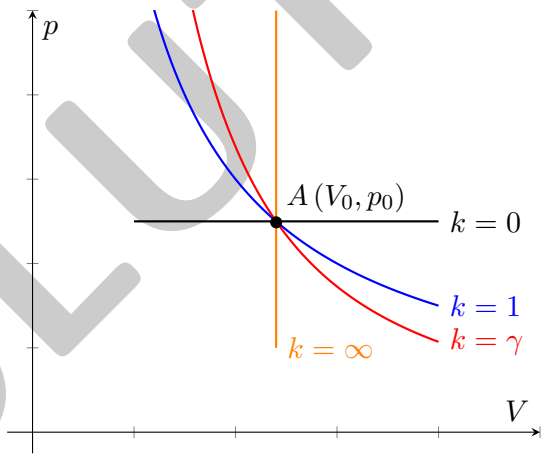
pour n moles de gaz parfait.

i. Quels sont les noms du processus lorsque l'indice polytropique vaut $k = 0, 1, \gamma, \infty$, respectivement ? ($\gamma = C_p/C_V$ est l'indice adiabatique.) **1 pt.**

$$TV^{k-1} = C \implies pV^k = C$$

Therefore, $k = 0$ corresponds to the isobaric process. $k = 1$ corresponds to the isothermal process. $k = \gamma$ corresponds to the adiabatic process. $k = \infty$ corresponds to the isochoric process. 0.25 points for each correct answer. 1 pt.

ii. Esquissez la relation p–V du processus polytropique pour $k = 0, 1, \gamma, \infty$ sur un seul diagramme, avec intersection en $A\,(V_0, p_0)$. **2 pt.**



$k = 0$ horizontal 0.5 pt.

$k = \infty$ vertical 0.5 pt.

$k = 1$ convex 0.5 pt.

$k = \gamma$ convex, steeper (for p on the y-axis) than $k = 1$ 0.5 pt.

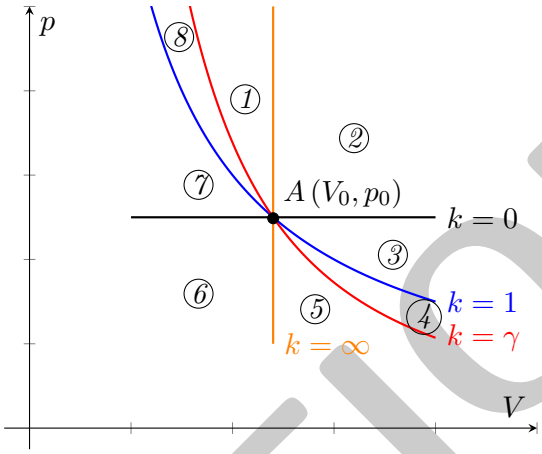
Swapping the diagram (p on the x-axis, V on y) is allowed.
-1 point if the labeling is incorrect.
-1 point if the four processes do not cross at (and only at) A.
(no negative points in total)

SOLUTIONS

iii. Le diagramme que vous avez dessiné en ii. devrait diviser le plan p–V en huit régions, car les quatre courbes n'ont qu'une seule intersection. Considérez un processus polytropique de A vers chacune des huit régions. Etant donné que la chaleur $\mathrm{d}Q$ absorbée par le gaz durant un processus polytropique infinitésimal est

$$\mathrm{d}Q = nC_V \frac{k-\gamma}{k-1}\mathrm{d}T$$

discutez cas par cas si le processus est endothermique ou exothermique, c'est-à-dire si $\mathrm{d}Q$ est positif ou négatif. **2 pt.**



- *The process from A to ⑧:*
  $k = 1$ is the isothermal curve. From A to ⑧ means $\mathrm{d}T > 0$, as the end point of the process is above the isothermal curve. In this region, $1 < k < \gamma$, together with $\mathrm{d}T > 0$, we have $\mathrm{d}Q < 0$ from the given expression of $\mathrm{d}Q$. This process is exothermic.
- *The process from A to ①:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $\gamma < k < \infty$ and $\mathrm{d}T > 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.
- *The process from A to ②:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $k < 0$ and $\mathrm{d}T > 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.
- *The process from A to ③:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $0 < k < 1$ and $\mathrm{d}T > 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.
- *The process from A to ④:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $1 < k < \gamma$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.
- *The process from A to ⑤:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $\gamma < k < \infty$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q < 0$. This process is exothermic.
- *The process from A to ⑥:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $k < 0$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q < 0$. This process is exothermic.
- *The process from A to ⑦:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $0 < k < 1$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q < 0$. This process is exothermic.

0.25 points for each correct answer.
-1 point if the different regions are not clearly identifiable.
-1.5 points if no justification is given (shortening the justification of later cases by similarity with previous ones is allowed).
(no negative points in total) 2 pt.

iv. En conséquence ou d'une autre manière, prouvez que pour tout processus polytropique d'un gaz parfait, chaque point de tangence entre le processus et une courbe adiabatique est un point limite entre un processus endothermique et exothermique. **2 pt.**

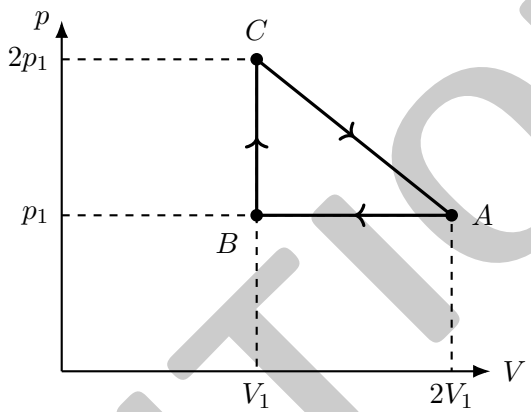
SOLUTIONS

In iii., we have shown that from A to ①, ②, ③, ④ are endothermic and from A to ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ are exothermic. Thus, we can deduce that from ①, ②, ③, ④ to A is exothermic and from ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ to A is endothermic. 1 pt.

Regions ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ and ①, ②, ③, ④ are divided by the adiabatic curve, i.e., $k = \gamma$. Any process that is on the left side of the adiabatic curve and is tangent to the adiabatic curve at A is endothermic for points above A and exothermic for points below A. Therefore, A is the turning point between the endothermic and exothermic process. The same reasoning applies to the case when the process is on the right side of the adiabatic curve. 1 pt.

Partie B. Cycle triangulaire p–V *9 pt.*

1 mol **de gaz parfait monoatomique est soumis à un cycle tel que montré dans la figure.** AB, BC **et** CA **sont toutes des lignes droites. Les quantités importantes sont indiquées sur la figure.**



i. Trouvez l'expression $p(V)$ pour le processus expansif CA. **1 pt.**

Plugging $(V_1, 2p_1)$ and $(2V_1, p_1)$ into $p = mV + C$, we get

$$p = -\frac{p_1}{V_1}V + 3p_1.$$

1 pt.

ii. En fait, l'affirmation que vous avez prouvée en A.iv. est vraie non seulement pour n'importe quel processus polytropique, mais aussi pour n'importe quel processus général. En outre, elle est également vraie dans le sens inverse, c'est-à-dire que tout point limite entre un processus endothermique et exothermique est aussi un point où le processus est tangent à une courbe adiabatique. De ce fait, trouvez le point limite entre le processus endothermique et exothermique sur CA. **3.5 pt**

The turning point between the endothermic and exothermic process is the tangent point between CA and the adiabatic curve.

The slope of the CA curve is

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{CA} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(-\frac{p_1}{V_1}V + 3p_1\right) = -\frac{p_1}{V_1}.$$

1 pt.

SOLUTIONS

The slope of the adiabatic curve is

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_\gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(CV^{-\gamma}\right) = -\gamma C V^{-\gamma-1}.$$

1 pt.

Suppose the tangent point is (V_0, p_0), we have $C = p_0 V_0^\gamma$, and the slope of the adiabatic curve at the tangent point is

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_\gamma (V_0) &= -\gamma \cdot p_0 V_0^\gamma \cdot V_0^{-\gamma-1} \\ &= -\gamma \cdot \left(-\frac{p_1}{V_1}V_0 + 3p_1\right) \cdot V_0^{-1} \\ &= -\gamma \cdot \left(\frac{3p_1}{V_0} - \frac{p_1}{V_1}\right).\end{aligned}$$

0.5 pt.

Equating the slope of the CA curve and that of the adiabatic curve

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{CA} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_\gamma,$$

0.5 pt.

we can obtain (V_0, p_0), i.e., the turning point.

$$-\frac{p_1}{V_1} = -\gamma \cdot \left(\frac{3p_1}{V_0} - \frac{p_1}{V_1}\right) \implies V_0 = \frac{15}{8}V_1$$

$$p_0 = p(V_0) = -\frac{p_1}{V_1}V_0 + 3p_1 = \frac{9}{8}p_1$$

Thus, the turning point between the endothermic and exothermic process on the CA curve is $\left(\frac{15}{8}V_1, \frac{9}{8}p_1\right)$. 0.5 pt.

iii. Trouvez l'efficacité η du cycle. **4.5 pt**

$$\eta = \frac{W}{Q}$$

where W is the work done by the gas and Q is the total heat intaken by the gas.

0.5 pt.

The work W done by the gas is just area of the triangle ABC

$$W = \frac{1}{2}p_1 V_1.$$

0.25 pt

The total heat Q intaken by the gas has two contributions, one from the BC process and the other from the CA process.

0.25 pt

SOLUTIONS

Calculating Q_{BC} is trivial because it is an isochoric process

$$Q_{BC} = nC_V\left(T_C - T_B\right) = \frac{3}{2}R \cdot \frac{p_1V_1}{R} = \frac{3}{2}p_1V_1$$

where we have used the fact that $n = 1$ in this problem and $C_V = \frac{3}{2}R$ for a monoatomic ideal gas.

0.5 pt.

To calculate Q_{CA}, one first needs to realize that the endothermic process is from $(V_1, 2p_1)$ to $\left(\frac{15}{8}V_1, \frac{9}{8}p_1\right)$. During this process, the work done by the gas is the area of a trapezoid

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \left(2p_1 + \frac{9}{8}p_1\right)\left(\frac{15}{8}V_1 - V_1\right) = \frac{175}{128}p_1V_1.$$

0.5 pt.

Meanwhile, the increase in internal energy of the gas is

$$\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}R \cdot \frac{\frac{15}{8}V_1 \cdot \frac{9}{8}p_1 - V_1 \cdot 2p_1}{R} = \frac{21}{128}p_1V_1.$$

0.5 pt.

From the first law of thermodynamics,

$$Q_{CA} = W' + \Delta U = \frac{49}{32}p_1V_1.$$

0.5 pt.

Thus, the total heat intaken by the gas is

$$Q = Q_{CA} + Q_{BC} = \left(\frac{49}{32} + \frac{3}{2}\right)p_1V_1 = \frac{97}{32}p_1V_1.$$

0.5 pt.

The efficiency of the cycle is

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{\frac{1}{2}p_1V_1}{\frac{97}{32}p_1V_1} = \frac{16}{97}.$$

1 pt.

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Tour final

online, 20 - 21 mars 2021

Partie théorique 3	**:**	**1 problème**
Durée	:	60 minutes
Total	:	16 points
Moyens autorisés	:	Calculatrice sans base de données Matériel pour écrire et dessiner Une feuille de notes A4 manuscrite écrite des deux côtés

Bonne chance !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Problèmes théoriques

Durée : 60 minutes
Cotation : 16 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction. Inscrivez votre nom et le numéro de problème sur les feuilles. Numérotez-les également.

Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.

Constantes fondamentales

Fréquence de la transition hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Constante magnétique	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Constante des gaz	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Problème 3.1 : Tube en U *(16 points)*

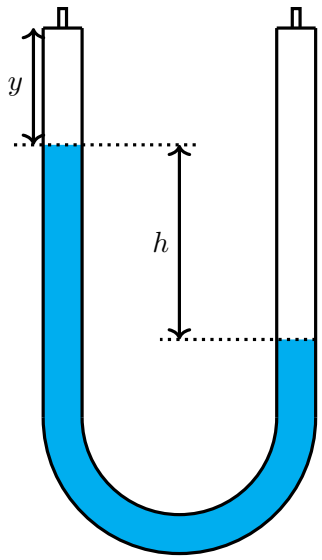


FIGURE 3.1.1 – Tube en U rempli d'eau (bleu) et d'air (blanc).

Vous rendez visite à Emmy dans son laboratoire et remarquez un tube en forme de U (figure 3.1.1) debout sur une table. Un volume d'eau V et de l'air se trouvent dans le tube. L'aire de la section du tube vaut A et le tube est fermé à chaque extrémité par une valve. Ces valves permettent de pomper de l'air vers l'intérieur ou l'extérieur.

i. (16 pt.) Emmy a rempli le tube de façon à ce que les deux colonnes d'eau aient une différence de hauteur h au repos. La distance entre la plus haute colonne et la valve est y. Vous voulez regarder le tube de plus près et heurtez la table par mégarde. Les colonnes d'eau dans le tube se mettent à osciller. Quelle est la **plus petite** fréquence **possible** pour cette oscillation ?
Hypothèses : la déviation de la colonne d'eau par rapport à sa position d'équilibre est petite. La température reste constante. Vous pouvez négliger le frottement. Négligez également l'évaporation d'eau ainsi que la dissolution d'air dans l'eau.

Problèmes théoriques : solutions

Problème 3.1 : Tube en U *16 pt.*

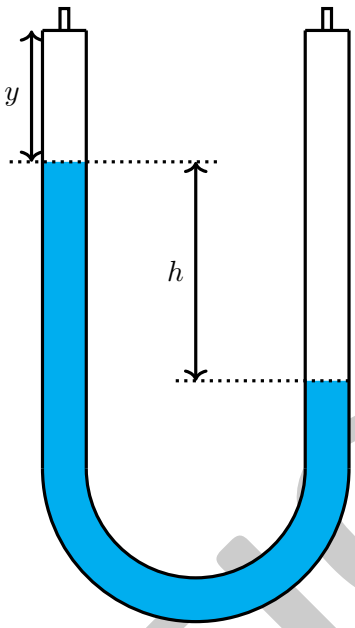


FIGURE 3.1.1 – Tube en U rempli d'eau (bleu) et d'air (blanc).

Vous rendez visite à Emmy dans son laboratoire et remarquez un tube en forme de U (figure 3.1.1) debout sur une table. Un volume d'eau V et de l'air se trouvent dans le tube. L'aire de la section du tube vaut A et le tube est fermé à chaque extrémité par une valve. Ces valves permettent de pomper de l'air vers l'intérieur ou l'extérieur.

i. Emmy a rempli le tube de façon à ce que les deux colonnes d'eau aient une différence de hauteur h au repos. La distance entre la plus haute colonne et la valve est y. Vous voulez regarder le tube de plus près et heurtez la table par mégarde. Les colonnes d'eau dans le tube se mettent à osciller. Quelle est la plus petite fréquence possible pour cette oscillation ?
Hypothèses : la déviation de la colonne d'eau par rapport à sa position d'équilibre est petite. La température reste constante. Vous pouvez négliger le frottement. Négligez également l'évaporation d'eau ainsi que la dissolution d'air dans l'eau. **16 pt.**

In this problem, there are three important forces acting on the water. There's the gravitational force, which causes hydrostatic pressure. The other forces are due to the air pressure in the two air columns. We will first consider the equilibrium case and then move to oscillations.
The air can be approximately treated as ideal gas. By the ideal gas law, the pressure in the air columns is

$$p_l = \frac{n_l RT}{V_l}, \quad p_r = \frac{n_r RT}{V_r},$$

where the subscripts l, r refer to the left and right air column, respectively and T is the temperature, V_i is the volume of the air column, n_i is the amount of substance and R is the ideal gas constant.
In equilibrium, the pressure difference of the air compensates the hydrostatic pressure difference, i.e. $\Delta p_{hyd} = p_r - p_l$. The hydrostatic pressure difference is given by $\Delta p_{hyd} = \rho g h$, where ρ is the density of water and g is the gravitational acceleration. Hence, the equilibrium condition is

$$\rho g h = \frac{n_r RT}{V_r} - \frac{n_l RT}{V_l} = \frac{RT}{A}\left(\frac{n_r}{y+h} - \frac{n_l}{y}\right). \tag{3.1.2}$$

SOLUTIONS

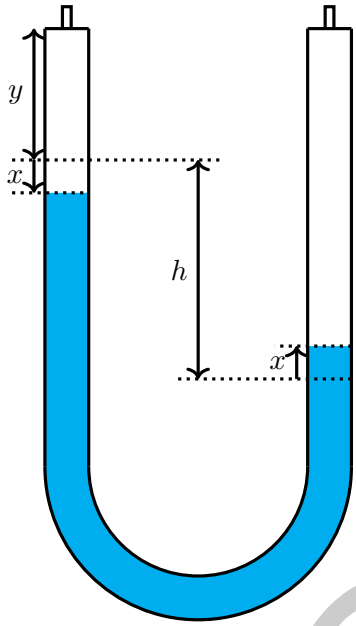


FIGURE 3.1.3 – U-tube filled with water (blue) and air (white).

Now suppose the water is deflected by a small amount x, as shown in Figure 3.1.3. The total force acting on the water column is given by

$$F_{tot} = \rho g\,(h - 2x)\,A + \frac{n_l RT}{y + x} - \frac{n_r RT}{y + h - x}.$$

Since x is small, we linearize the force around $x = 0$ and obtain

$$F_{tot} \approx \rho g\,(h - 2x)\,A + \frac{n_l RT}{y} - \frac{n_r RT}{y + h} - \frac{n_l RT}{y^2}x - \frac{n_r RT}{(y + h)^2}x = -\left(2\rho g + \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y + h)^2}\right)x,$$

where we used (3.1.2) *for the second equality. By Newton's law, $F_{tot} = \rho V \ddot{x}$. Therefore we obtain the equation of motion of a harmonic oscillator*

$$\ddot{x} = -\frac{2\rho g A + \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y+h)^2}}{\rho V}x.$$

The frequency is

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho g A + \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y+h)^2}}{\rho V}}.$$

To find the minimal frequency we need to minimize

$$\frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y + h)^2}$$

over $n_l, n_r \geq 0$. The n_l and n_r are not independent since they have to satisfy (3.1.2)*. Solving* (3.1.2) *for n_r and plugging this into the above expression we obtain the function*

$$G(n_l) = \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{\rho g h A}{y + h} + \frac{n_l RT}{y\,(y + h)}$$

SOLUTIONS

The minimum of G is attained for $n_l = 0$ with value $G(0) = \frac{\rho g h A}{y+h}$. Therefore, the minimal possible frequency is

$$f_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gA\,(2y+3h)}{V\,(y+h)}}.$$

Write down ideal gas equation $pV = nRT$ (or $pV = NkT$)) or use $pV = \text{const.}$. Here, $pV = nRT$ is used but the other variants are equally valid. 1 pt.

Write down hydrostatic pressure $p_h = \rho g h$ 1 pt.

Write down the equilibrium condition:

$$\rho g h = p_\mathrm{r} - p_\mathrm{l} = \frac{RT}{A}\left(\frac{n_\mathrm{r}}{y+h} - \frac{n_\mathrm{l}}{y}\right)$$

2 pt.

Correct expression for the force of the air on the left side (as a function of the deflection):

$$F_\mathrm{l}(x) = n\frac{RT}{y+x}$$

0.5 pt.

Correct expression for the force of the air on the right side (as a function of the deflection):

$$F_\mathrm{r}(x) = -n\frac{RT}{y+h-x}$$

0.5 pt.

Correct expression for the restoring force of the water:

$$F_\mathrm{h}(x) = \rho g\,(h-2x)\,A$$

0.5 pt.

Name the three forces (or F_tot correct).

$$F_\mathrm{tot} = F_\mathrm{l} + F_\mathrm{r} + F_\mathrm{h}$$

1 pt.

Correct linearization:

$$F_\mathrm{l} \approx n_\mathrm{l} RT\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)$$
$$F_\mathrm{r} \approx -n_\mathrm{l} RT\left(\frac{1}{y+h} - \frac{x}{(y+h)^2}\right)$$
$$F_\mathrm{tot} \approx -\left(2\rho g A + n_\mathrm{l}\frac{RT}{y^2} + n_\mathrm{r}\frac{RT}{(y+h)^2}\right)x$$

— 0.5 points for the idea of linearization
— 1 point for the first correct linearization (either F_l or F_r)

SOLUTIONS

— 0.5 points for the second correct linearization 2 pt.

Correct mass $M = \rho V$ 1 pt.

Correct equation of motion: $F_{\text{tot}} = M\ddot{x}$ 0.5 pt.

Correct frequency:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho g A + n_{\text{l}}\frac{RT}{y^2} + n_{\text{r}}\frac{RT}{(y+h)^2}}{\rho V}}$$

0 points for incorrect units! 0.5 points for $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ 2 pt.

Minimization over n_{l} and n_{r} (and only over those). 1 pt.

$n_{\text{l}} = 0$ at the minimum and n_{r} defined by the constraint (i.e. by h fix) 1 pt.

Correct minimal frequency:

$$f_{\text{min}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gA\,(2y+3h)}{V\,(y+h)}}$$

-0.5 points for minor errors (e.g. factor of 2)
-2 points for incorrect units! 2 pt.

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Tour final

online, 20 - 21 mars 2021

Partie théorique 4	**:**	**6 questions courtes**
Durée	:	60 minutes
Total	:	24 points (6×4)
Moyens autorisés	:	Calculatrice sans base de données Matériel pour écrire et dessiner Une feuille de notes A4 manuscrite écrite des deux côtés

Bonne chance !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Questions courtes

Durée : 60 minutes
Cotation : 24 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction. Inscrivez votre nom et le numéro de problème sur les feuilles. Numérotez-les également.

Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.

Constantes fondamentales

Fréquence de la transition hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Efficacité lumineuse	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Constante magnétique	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante électrique	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Constante des gaz	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse de l'électron	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Problème 4.1 : Saut à l'élastique *(4 points)*

Une personne de masse 80 kg se rend sur le barrage de la Verzasca haut de 220 m pour y pratiquer le saut à l'élastique. La corde a une constante de rappel de $100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et nous admettons pour simplifier qu'elle est de masse nulle.

i. (2.25 pt.) Quelle doit être la longueur de la corde, de façon à ce que la personne se trouve 20 m au-dessus du sol au point le plus bas ?

ii. (0.75 pt.) Combien de temps la personne se trouve-t-elle en chute libre ?

iii. (1 pt.) Quelle est la force maximale appliquée à la personne ?

Problème 4.2 : Elastique *(4 points)*

i. (4 pt.) Un élastique de largeur 0.1 m et de longueur 1 m entoure un tuyau en acier de même circonférence, de sorte que l'élastique n'est initialement pas sous tension. Nous chauffons alors le tuyau depuis 20 °C jusqu'à 50 °C. Quel sera la pression exercée par l'élastique sur le tuyau à la fin du processus de chauffe ? Le coefficient de dilatation thermique linéique du tuyau est $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ et la constante de rappel de l'élastique est $k = 1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Vous pouvez supposer que l'élastique ne subit pas de dilatation thermique et que sa largeur ne change pas.

Problème 4.3 : Tuyaux à vide *(4 points)*

i. (2 pt.) Une balle de rayon $R = 2\,\mathrm{cm}$ et de masse $m = 10\,\mathrm{g}$ se trouve au bout d'un tuyau de même rayon R et de longueur $l = 1\,\mathrm{m}$. Les extrémités du tuyau sont fermées hermétiquement et l'on réalise un vide parfait à l'intérieur du tuyau à l'aide d'une pompe. A l'instant $t = 0$, on ouvre le tuyau du côté de la balle, et le bouchon à l'extrémité opposée sera repoussé de côté par la balle sans résistance. Quelle est la vitesse de la balle au moment où elle quitte le tuyau ?

ii. (2 pt.) Dans un second essai le travail a été mal fait, de sorte que le rapport de la pression interne à la pression externe vaut $q > 0$ et le bouchon à l'extrémité opposée a été fixé trop fortement. Esquissez la distance parcourue par la balle en fonction du temps pour deux valeurs $0 < q_1 < q_2 < 1$.

Problème 4.4 : Véga *(4 points)*

Le tableau ci-dessous présente différentes données caractéristiques du Soleil et de Véga, l'une des étoiles principales de l'hémisphère nord.

	Distance	Type spectral	Magnitude apparente	Rayon
Soleil	$1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$	G (502 nm)	-26.832	$6.963 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
Véga	$2.392 \times 10^{17}\,\mathrm{m}$	A (302 nm)	0.03	?

Pour simplifier, on admet que les étoiles rayonnent dans une seule longueur d'onde correspondant au maximum du rayonnement du corps noir de même température, et qu'elles ont une émissivité idéale ($\varepsilon = 1$).
Pour rappel, la magnitude apparente d'une étoile est

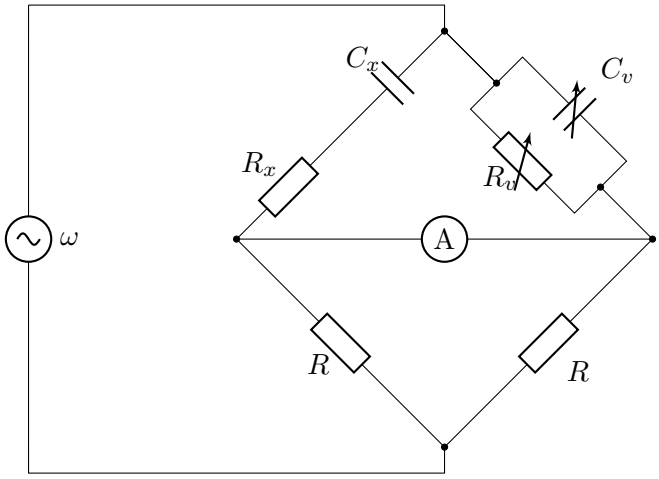
$$m = -2.5\log_{10}\left(\frac{L}{4\pi d^2}\right),$$

où L est la luminosité intrinsèque de l'étoile (sa puissance rayonnée) et d la distance d'observation.

i. (4 pt.) Calculez le rayon de Véga. *Note : la formule donnée, bien que présente dans la littérature, n'est pas totalement juste mathématiquement. Une formule plus correcte serait* $m_1 - m_2 = -2.5\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$ *pour deux objets 1 et 2, avec* $E_i = \frac{L_i}{4\pi d_i^2}$. *Cela a été pris en compte lors de la correction.*

Problème 4.5 : Pont de Wien *(4 points)*

La figure représente un circuit appelé pont de Wien couplé à un générateur de courant alternatif de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$.
Le pont de Wien permet de calculer les caractéristiques d'un élément capacitif inconnu, représenté ici par la résistance R_x et la capacité C_x.
On équilibre le pont, c'est-à-dire qu'on fait varier la résistance R_v et la capacité C_v jusqu'à ce que l'ampèremètre du pont indique zéro.

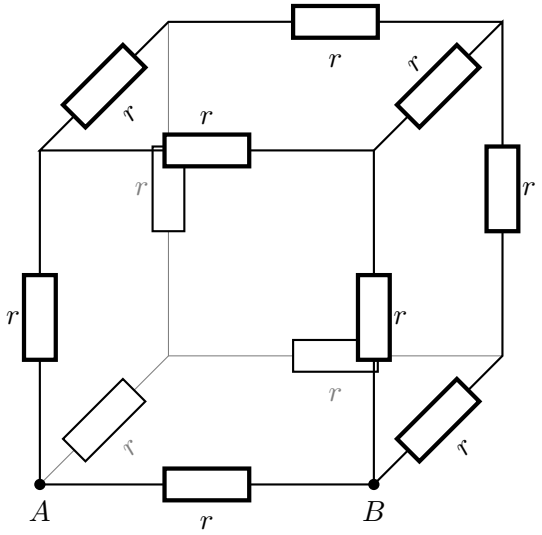


i. (4 pt.) Déterminez les résistance R_x et capacité C_x inconnues en fonction de R, ω et des valeurs R_v et C_v après équilibrage.

Problème 4.6 : Résistance cubique *(4 points)*

i. (4 pt.)

On considère un cube de résistances tel que montré dans la figure. Chaque arête du cube est formée d'une résistance r. Quelle est la résistance équivalente R_{AB} entre les sommets A et B du cube ?
Indice : les symmétries peuvent être utiles.



Questions courtes : solutions

Problème 4.1 : Saut à l'élastique *4 pt.*

Une personne de masse 80 kg se rend sur le barrage de la Verzasca haut de 220 m pour y pratiquer le saut à l'élastique. La corde a une constante de rappel de $100\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et nous admettons pour simplifier qu'elle est de masse nulle.

i. Quelle doit être la longueur de la corde, de façon à ce que la personne se trouve 20 m au-dessus du sol au point le plus bas ? **2.25 p**

At the lowest point the velocity is zero and therefore we can use energy conservation. 0.5 pt.

The potential energy of the person is equal to the energy stored in the rope

$$mgl = \frac{1}{2}k\left(l - h_0\right)^2$$

where l is the length at the lowest point and the h_0 the rest length. 0.5 pt.

Solving for h_0 gives

$$h_0 = l \pm \sqrt{\frac{2gml}{k}}$$

0.5 pt.

Only the solution with the minus sign is of significance, because $h_0 < l$.

$$h_0 = l - \sqrt{\frac{2gml}{k}}$$

0.25 pt

The numerical value for h_0 is 144 m. 0.5 pt.

ii. Combien de temps la personne se trouve-t-elle en chute libre ? **0.75 p**

The person is in free fall for a distance h_0. This means the time in free fall is

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

0.5 pt.

The numerical value for t is 5.4 s. 0.25 pt

iii. Quelle est la force maximale appliquée à la personne ? **1 pt.**

The maximal force is reached when the person is at the lowest point. 0.25 pt

Therefore we get

$$F_{\max} = k\left(l - h_0\right) - mg = \sqrt{2gmlk} - mg$$

0.5 pt.

We get a numerical value of 4820 N. 0.25 pt

SOLUTIONS

Problème 4.2 : Elastique *4 pt.*

i. Un élastique de largeur $0.1\,\mathrm{m}$ et de longueur $1\,\mathrm{m}$ entoure un tuyau en acier de même circonférence, de sorte que l'élastique n'est initialement pas sous tension. Nous chauffons alors le tuyau depuis $20\,°\mathrm{C}$ jusqu'à $50\,°\mathrm{C}$. Quel sera la pression exercée par l'élastique sur le tuyau à la fin du processus de chauffe ? Le coefficient de dilatation thermique linéique du tuyau est $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ et la constante de rappel de l'élastique est $k = 1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Vous pouvez supposer que l'élastique ne subit pas de dilatation thermique et que sa largeur ne change pas. **4 pt.**

We calculate the change in elastic energy

$$\mathrm{d}E = k\,(s - s_0)\,\mathrm{d}s$$

where k is the spring constant and $s - s_0$ is the difference between the circumference and the initial length of the rubber band. $\mathrm{d}s$ is the infinitesimal change in the length of the rubber band. 0.5 pt.

We note that the energy can be calculated in another way

$$\mathrm{d}E = pA\mathrm{d}r = \frac{1}{2\pi}pA\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}pbs\mathrm{d}s$$

here p is the pressure exerted on the pipe by the rubber band, b the width of the rubber band. 1.5 pt.

Setting the equations equal we get

$$k\,(s - s_0) = \frac{1}{2\pi}pbs$$

0.5 pt.

We can then calculate the thermal expansion:

$$s - s_0 = s_0\alpha\Delta T$$

0.5 pt.

This gives us the final equation

$$p = 2\pi\frac{k}{b}\frac{\alpha\Delta T}{1 + \alpha\Delta T}$$

0.5 pt.

The numerical result is $22.61\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. 0.5 pt.

In case of the correct numerical result the last two points are rewarded even if the equations are not stated explicitely.
To get the 0.5 pt. for the final equation students may also state

$$p = 2\pi\frac{k}{b}\frac{s - s_0}{s}.$$

Alternative path for the first two points:
Consider a virtual separation of the band in two halves. The forces on each half are:

- *two times the tension $k\,(s - s_0)$ (at the interfaces with the other half) (1 pt.);*
- *the integral of the infinitesimal forces from the pipe on the half, which by symmetry equals $\int_0^\pi pbr\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2pbr = \frac{1}{\pi}pbs$ (1 pt.).*

SOLUTIONS

Problème 4.3 : Tuyaux à vide *4 pt.*

i. Une balle de rayon $R = 2\,\mathrm{cm}$ et de masse $m = 10\,\mathrm{g}$ se trouve au bout d'un tuyau de même rayon R et de longueur $l = 1\,\mathrm{m}$. Les extrémités du tuyau sont fermées hermétiquement et l'on réalise un vide parfait à l'intérieur du tuyau à l'aide d'une pompe. A l'instant $t = 0$, on ouvre le tuyau du côté de la balle, et le bouchon à l'extrémité opposée sera repoussé de côté par la balle sans résistance. Quelle est la vitesse de la balle au moment où elle quitte le tuyau ? **2 pt.**

The force on the ball is

$$F = \Delta p A = \Delta p \pi R^2$$

0.5 pt.

where Δp is equal to atmospheric pressure of 1 bar. 0.25 pt

We can calculate the acceleration

$$a = \frac{F}{m}$$

0.25 pt

The time needed for the ball to reach the end of the tube is

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$$

0.25 pt

This means the velocity of the ball is

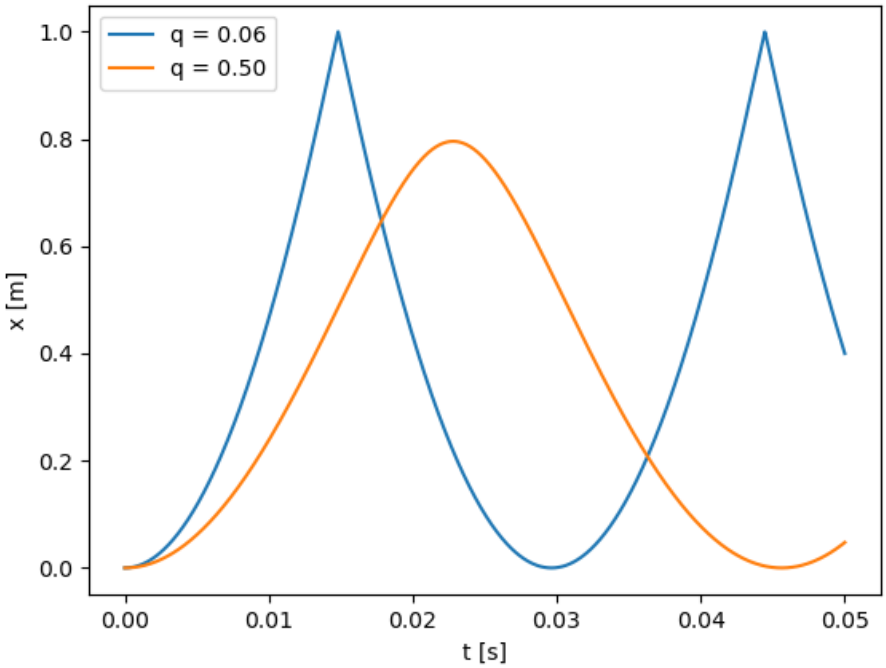
$$v = at = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{2al} = \sqrt{\frac{2\Delta p \pi R^2 l}{m}}$$

0.25 pt

We get a numerical value of $v = 160\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ or $v = 575\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. 0.5 pt.

ii. Dans un second essai le travail a été mal fait, de sorte que le rapport de la pression interne à la pression externe vaut $q > 0$ et le bouchon à l'extrémité opposée a été fixé trop fortement. Esquissez la distance parcourue par la balle en fonction du temps pour deux valeurs $0 < q_1 < q_2 < 1$. **2 pt.**

SOLUTIONS



Since one end is closed the air in the pipe gets compressed and the pressure increases. At some point the pressure inside the tube will be higher than atmospheric pressure and the ball starts deaccelerating. The ball will turn around and the air in the pipe starts decompressing. In the end this leads to an oscillation of the ball in the pipe.

Axes correctly labeled and the plot is big enough. 0.5 pt.

Both curves describe an oscillation. 0.75 pt

The amplitude of the curve with a lower pressure ratio is higher. 0.75 pt

SOLUTIONS

Problème 4.4 : Véga *4 pt.*

Le tableau ci-dessous présente différentes données caractéristiques du Soleil et de Véga, l'une des étoiles principales de l'hémisphère nord.

	Distance	Type spectral	Magnitude apparente	Rayon
Soleil	1.496×10^{11} m	**G** (502 nm)	-26.832	6.963×10^{8} m
Véga	2.392×10^{17} m	**A** (302 nm)	0.03	**?**

Pour simplifier, on admet que les étoiles rayonnent dans une seule longueur d'onde correspondant au maximum du rayonnement du corps noir de même température, et qu'elles ont une émissivité idéale ($\varepsilon = 1$).
Pour rappel, la magnitude apparente d'une étoile est

$$m = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L}{4\pi d^2}\right),$$

où L est la luminosité intrinsèque de l'étoile (sa puissance rayonnée) et d la distance d'observation.

i. Calculez le rayon de Véga. ***Note : la formule donnée, bien que présente dans la littérature, n'est pas totalement juste mathématiquement. Une formule plus correcte serait $m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$ pour deux objets 1 et 2, avec $E_i = \frac{L_i}{4\pi d_i^2}$. Cela a été pris en compte lors de la correction.*** **4 pt.**

Stefan-Boltzmann law with perfect emissivity gives

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4.$$

1 pt.

Wien's displacement law gives

$$\lambda_{\text{peak}} = \frac{b}{T},$$

where b is Wien's displacement constant. 1 pt.

Combining it all, we find

$$\frac{R_{\text{V}}^2}{R_\odot^2} = \frac{L_{\text{V}} T_\odot^4}{L_\odot T_{\text{V}}^4} = \frac{L_{\text{V}} \lambda_{\text{peak, V}}^4}{L_\odot \lambda_{\text{peak},\odot}^4} = \frac{10^{\frac{m_{\text{V}}}{-2.5}} d_{\text{V}}^2 \lambda_{\text{peak, V}}^4}{10^{\frac{m_\odot}{-2.5}} d_\odot^2 \lambda_{\text{peak, }\odot}^4}.$$

1 pt.

And therefore

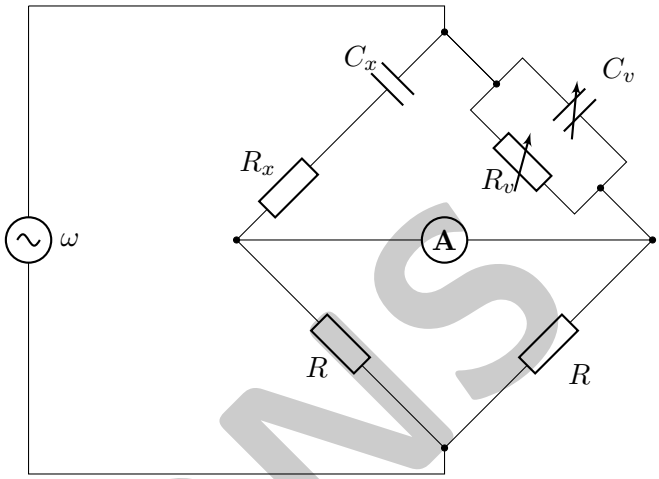
$$R_{\text{V}} = R_\odot \sqrt{\frac{10^{\frac{m_{\text{V}}}{-2.5}} d_{\text{V}}^2 \lambda_{\text{peak, V}}^4}{10^{\frac{m_\odot}{-2.5}} d_\odot^2 \lambda_{\text{peak, }\odot}^4}} = R_\odot \frac{10^{\frac{m_{\text{V}}}{-5}} d_{\text{V}} \lambda_{\text{peak, V}}^2}{10^{\frac{m_\odot}{-5}} d_\odot \lambda_{\text{peak, }\odot}^2} = R_\odot 10^{\frac{m_\odot - m_{\text{V}}}{5}} \frac{d_{\text{V}}}{d_\odot} \left(\frac{\lambda_{\text{peak, V}}}{\lambda_{\text{peak, }\odot}}\right)^2$$
$$\approx 1.709 \times 10^9 \text{ m}.$$

1 pt.

SOLUTIONS

Problème 4.5 : Pont de Wien *4 pt.*

La figure représente un circuit appelé pont de Wien couplé à un générateur de courant alternatif de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$.
Le pont de Wien permet de calculer les caractéristiques d'un élément capacitif inconnu, représenté ici par la résistance R_x et la capacité C_x.
On équilibre le pont, c'est-à-dire qu'on fait varier la résistance R_v et la capacité C_v jusqu'à ce que l'ampèremètre du pont indique zéro.



i. Déterminez les résistance R_x et capacité C_x inconnues en fonction de R, ω et des valeurs R_v et C_v après équilibrage. **4 pt.**

At bridge equilibrium, Ohm's law and Kirchhoff's voltage law applied on the lower triangle of the bridge give us

$$I_1 R = I_2 R,$$

where I_1 is the current in the left branch of the bridge and I_2 in the right branch. So

$$I_1 = I_2.$$

1 pt.

Note that this is due to the choice of equal resistances in the lower triangle. Unequal resistances R_1, R_2 would give a global $\frac{R_1}{R_2}$ factor to R_x and $\frac{R_2}{R_1}$ to C_x.

Similarly for the upper part, using the impedance relation for capacities $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$:

$$I_1 \left(R_x + \frac{1}{i\omega C_x} \right) = I_2 \frac{1}{\frac{1}{R_v} + i\omega C_v}$$

where I_1 and I_2 can be cancelled. 1 pt.

This equation can be put to standard complex form:

$$R_x - \frac{1}{\omega C_x} i = \frac{\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2} - \frac{\omega C_v}{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2} i.$$

0.5 pt.

The real part gives R_x:

$$R_x = \frac{\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2}.$$

0.75 pt

And the complex part gives C_x:

$$C_x = \frac{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2}{\omega^2 C_v}.$$

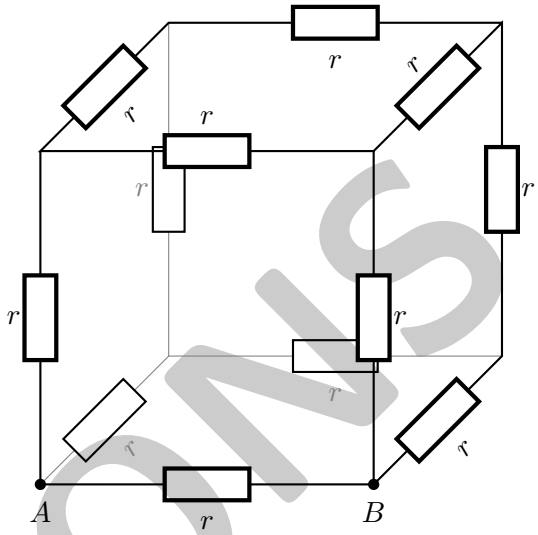
0.75 pt

SOLUTIONS

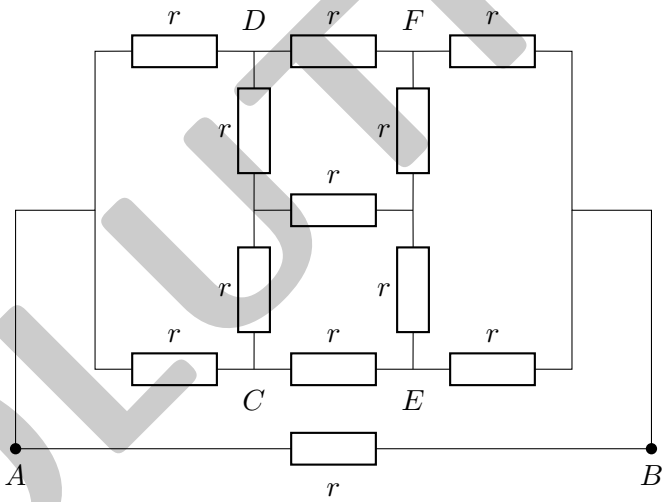
Problème 4.6 : Résistance cubique *4 pt.*

i.

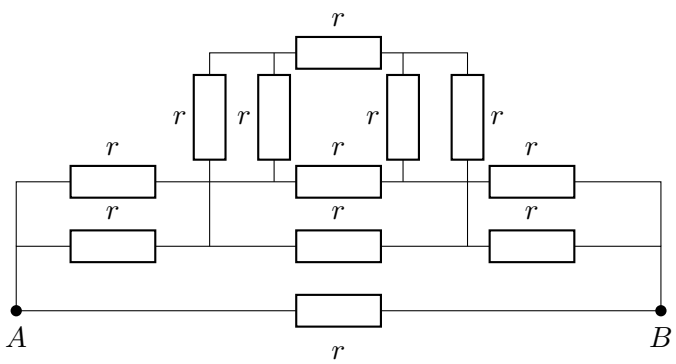
On considère un cube de résistances tel que montré dans la figure. Chaque arête du cube est formée d'une résistance r. Quelle est la résistance équivalente R_{AB} entre les sommets A et B du cube ?
Indice : les symmétries peuvent être utiles.



Flattened circuit: **4 pt.**

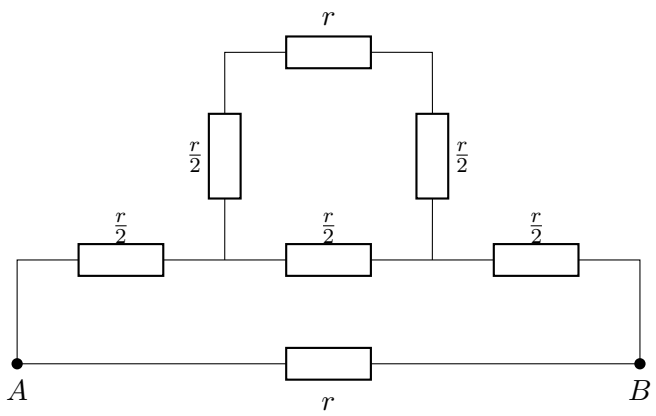


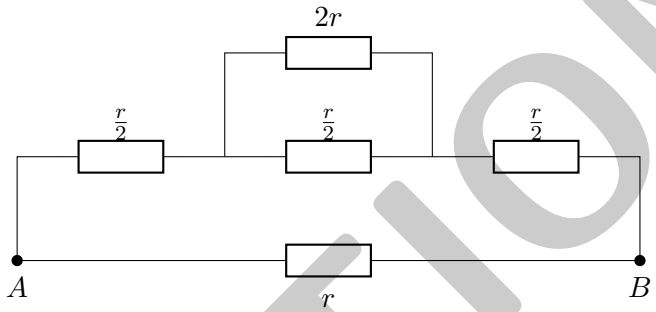
By symmetry, the circuit remains equivalent if we link C to D and E to F - no current would flow through these links. Thus it is equivalent to:

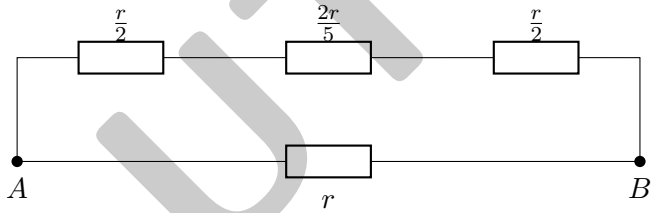


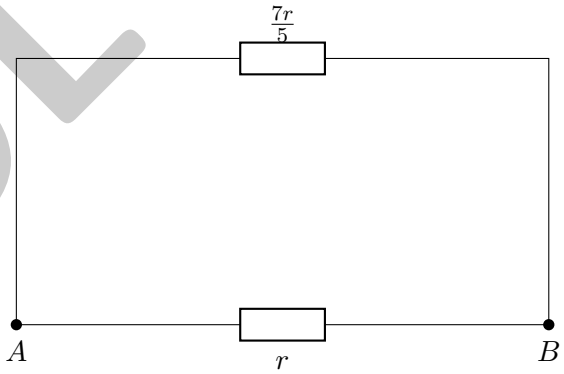
SOLUTIONS

This can then be simplified step-by-step: 1 pt.

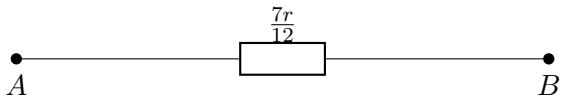








And finally: 2 pt.



Thus the equivalent resistance is $\frac{7}{12}r$. 1 pt.

Alternative solution paths:

- *Full Kirchhoff-based calculation*
- *Kennelly's theorem (Y - Δ)*

SOLUTIONS