PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Deuxième tour

18 janvier 2023

Partie 1	**:**	**21 questions à choix multiple**
Durée	:	60 minutes
Total	:	21 points (21×1)
Partie 2	**:**	**3 problèmes longs**
Durée	:	120 minutes
Total	:	48 points (3×16)
Moyens autorisés	:	Calculatrice sans base de données
		Matériel pour écrire et dessiner

Bonne chance !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#bbad1b62

Constantes fondamentales

Fréquence hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	$\mathrm{s^{-1}}$
Vitesse de la lumière dans le vide	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Constante de Planck	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$
Charge élémentaire	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A \cdot s}$
Constante de Boltzmann	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K^{-1} \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$
Constante d'Avogadro	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
Efficacité lumineuse d'un rayonnement	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3 \cdot sr}$
Constante magnétique	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A^{-2} \cdot kg \cdot m \cdot s^{-2}}$
Constante électrique	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A^2 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3} \cdot s^4}$
Constante des gaz	R	8.314 462 618...		$\mathrm{K^{-1} \cdot kg \cdot m^2 \cdot mol^{-1} \cdot s^{-2}}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K^{-4} \cdot kg \cdot s^{-3}}$
Constante gravitationnelle	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}}$
Masse de l'électron	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Accélération normale de la pesanteur	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Multiple Choice

Durée : 60 minutes
Cotation : 21 points (1 point par réponse correcte)

- Les questions à choix multiple **(MC)** comportent plusieurs réponses, dont **une seule** est correcte. Si vous sélectionnez la bonne réponse (et seulement celle-là) sur la feuille-réponse, vous obtenez un point, sinon zéro.

Question 1.1 (MC)

Si la population mondiale était distribuée uniformément sur toutes les terres émergées de notre planète, quelle serait la surface disponible pour chaque personne ?

A) $1.8 \times 10^4\,\mathrm{m}^2$ B) $1.8 \times 10^6\,\mathrm{m}^2$
C) $1.8 \times 10^8\,\mathrm{m}^2$ D) $1.8 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^2$

Question 1.2 (MC)

Quelle est la différence d'énergie magnétique entre un électron de spin up et de spin down ?

A) $E = \frac{e}{m_e}\hbar^2 B$ B) $E = \frac{e}{m_e}\hbar B$
C) $E = \frac{e^2}{m_e}\hbar B$ D) $E = \frac{e^2}{m_e^2}\hbar B$
E) $E = \frac{e^2}{m_e}\hbar^2 B$

Question 1.3 (MC)

Soit un vecteur $\vec{a} \neq \vec{0}$. Quelle équation est correcte ?

A) $(\vec{a}+\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ B) $(\vec{a}+\vec{a})\times\vec{a}=\vec{0}$
C) $(\vec{a}+\vec{a})\cdot\vec{a}=0$ D) $(\vec{a}\times\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$
E) $(\vec{a}\cdot\vec{a})\,\vec{a}=\vec{0}$

Question 1.4 (MC)

Si la Terre tournait plus vite sur elle-même, l'orbite géostationnaire serait...

A) plus basse. B) inchangée.
C) plus haute.

Question 1.5 (MC)

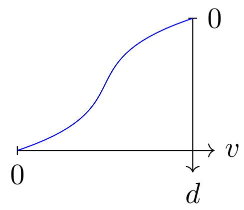
Astérix et Obélix décident de jouer à la pétanque avec des menhirs. Obélix (très fort comme à son habitude) lance le menhir loin de lui à la vitesse de $100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ avec un angle de $45°$ par rapport à l'horizon. Le menhir a une masse de $100\,\mathrm{kg}$. Astérix a calculé la hauteur maximale atteinte par le menhir durant son vol. Quelle valeur a-t-il trouvée ?

A) $25\,\mathrm{m}$ B) $255\,\mathrm{m}$
C) $500\,\mathrm{m}$ D) $980\,\mathrm{m}$
E) Le menhir atteint la Lune.

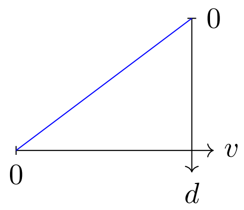
Question 1.6 (MC)

Cloé mesure la vitesse v de l'eau dans une rivière de largeur infinie à différentes profondeurs d. Quel est le profil de vitesse qu'elle va le plus probablement observer ?

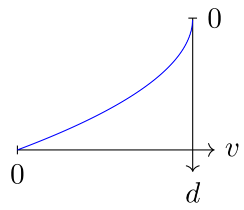
A)



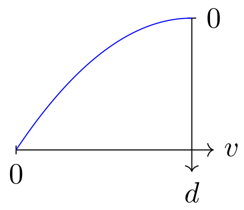
B)



C)



D)



Question 1.7 (MC)

Une balle frappe élastiquement une autre balle de même masse initialement au repos. La vitesse finale de la seconde balle vaut la moitié de la vitesse initiale de la première balle. Quel est l'angle entre la vitesse finale de la seconde balle et la vitesse initiale de la première balle ?

A) 0° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

Question 1.8 (MC)

Un mur se déplace vers la gauche à une vitesse constante u. Une balle se déplace vers la droite en direction du mur à une vitesse v. Quelle est la vitesse de la balle après la collision élastique ?

A) v vers la gauche

B) u vers la gauche

C) $v + u$ vers la gauche

D) $v + 2u$ vers la gauche

E) $v + \frac{u}{2}$ vers la gauche

Question 1.9 (MC)

Deux masses ponctuelles m et M sont séparées de R. M est fixée en place et m est initialement au repos. m est ensuite attirée vers M par la force de gravité. Combien de temps faut-il pour que m atteigne M ?

A) $\sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{8GM}}$ B) $\sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{2GM}}$ C) $\sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}$

D) $\sqrt{\frac{2\pi^2 R^3}{GM}}$ E) $\sqrt{\frac{8\pi^2 R^3}{GM}}$

Question 1.10 (MC)

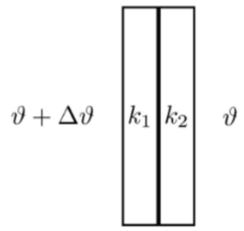
Un calorimètre à glace est un appareil de mesure de la chaleur spécifique d'un matériau. Pour l'essentiel, le matériau à étudier est chauffé puis placé sur un bloc de glace à 0 °C. Ensuite la quantité d'eau fondue est mesurée. On mène maintenant cette expérience avec un échantillon de 100 g de plomb chauffé à 50 °C et on mesure 1.93 g d'eau fondue. Quelle est la chaleur spécifique du plomb ? La chaleur latente de fusion de l'eau est de $333.7\,\mathrm{J \cdot g^{-1}}$.

A) $0.129\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$ B) $0.775\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$

C) $1.29\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$ D) $7.75\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$

Question 1.11 (MC)

Considérons deux plaques, chacune de surface $1\,\mathrm{m^2}$ et d'épaisseur 1 cm. Ces plaques ont une conductivité thermique $k_1 = 0.7\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, respectivement $k_2 = 1.0\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Lorsque les plaques sont en contact, quel est le flux de chaleur qui les traverse si la différence de température est $\Delta\vartheta = 10\,\mathrm{K}$?

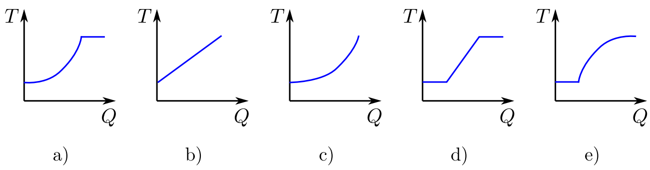


A) 0.21 W B) 4.1 W C) 0.41 kW

D) 1.7 kW E) 21 kW

Question 1.12 (MC)

On chauffe un mélange d'eau et de glace. Quel graphe décrit le mieux la relation entre la température T du système et la chaleur fournie Q ?



A) a B) b C) c D) d E) e

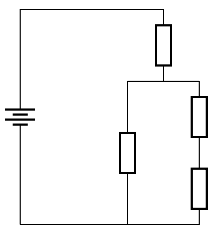
Question 1.13 (MC)

Alice a récemment entendu parler du nombre d'or φ. Elle se rappelle qu'il est possible d'écrire φ comme une fraction continue :

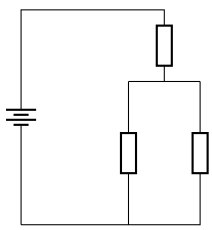
$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}.$$

Elle se rend alors compte qu'elle pourrait utiliser ses résistances d'exactement $R = 1\,\Omega$ pour construire un circuit dont la résistance équivalente est une approximation arbitrairement bonne du nombre d'or. Cependant, elle ne dispose pas d'un nombre infini de résistances. Lequel des circuits suivants Alice devrait-elle construire pour obtenir une résistance équivalente aussi proche de $\varphi\Omega$ que possible ?

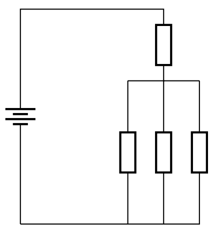
A)



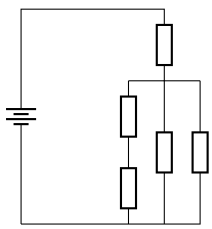
B)



C)

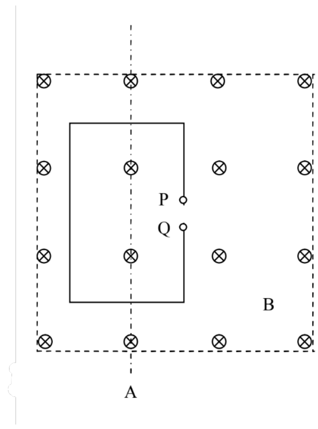


D)



Question 1.14 (MC)

Une boucle conductrice rectangulaire se trouve dans un champ magnétique homogène B perpendiculaire au plan du dessin et dirigé dans le plan (cf. dessin). Le champ magnétique B est généré par une bobine parcourue d'un courant I.



Laquelle des réponses suivantes est fausse ? Une tension est induite dans la boucle lorsque

A) celle-ci est mise en rotation autour de l'axe A.

B) celle-ci est mise en rotation autour de l'axe A et la connexion entre P et Q est fermée.

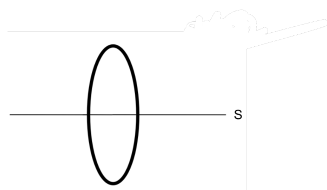
C) on diminue lentement le courant I.

D) on déplace la boucle d'un tiers de sa largeur vers la droite.

E) le flux magnétique à travers la boucle change.

Question 1.15 (MC)

Une charge électrique de $3.25\,\mu\mathrm{C}$ est distribuée uniformément sur un anneau de rayon $7.5\,\mathrm{cm}$. La section de l'anneau est négligeable. Quelle est la norme du champ électrique en un point P situé sur l'axe de symétrie S à $1.2\,\mathrm{cm}$ du centre de l'anneau ?

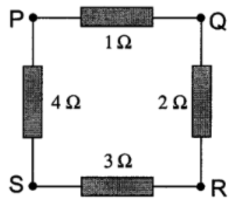


A) $52\,\mathrm{mN\cdot C^{-1}}$ B) $80\,\mathrm{N \cdot C^{-1}}$ C) $27\,\mathrm{kN \cdot C^{-1}}$

D) $85\,\mathrm{kN \cdot C^{-1}}$ E) $8 \times 10^5\,\mathrm{N \cdot C^{-1}}$

Question 1.16 (MC)

Quatre résistances sont reliées entre elles comme montré sur le schéma ci-dessous. Entre quelle paire de points la résistance équivalente est-elle la plus grande ?

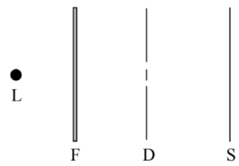


A) P et Q B) Q et S C) R et S

D) S et P E) P et R

Question 1.17 (MC)

L'esquisse ci-dessous montre une expérience d'interférence à double fente. Le dessin n'est pas à l'échelle. La source L émet de la lumière blanche. Un filtre F absorbe tout sauf la partie verte du spectre. La lumière filtrée passe à travers la double fente D et produit une figure d'interférence sur l'écran S. La figure d'interférence a la forme d'une suite de raies claires et sombres (presque) équidistantes.



Laquelle des actions suivantes réduit la distance entre les franges d'interférence ?

1. Remplacer le filtre par un filtre qui ne laisse passer que la partie bleue du spectre.
2. Remplacer la double fente par une autre double fente avec une plus grande distance entre les fentes.
3. Utiliser une source de plus grande luminosité.

A) Toutes les trois B) Seulement 1 et 2

C) Seulement 2 et 3 D) Seulement 1

E) Seulement 3

Question 1.18 (MC)

Les céphéides sont des étoiles spéciales dont l'intensité lumineuse varie périodiquement. On peut déduire leur luminosité absolue à partir de cette période de variation. Vous possédez un appareil photo avec lequel vous mesurez l'intensité lumineuse des étoiles. Vous photographiez maintenant deux céphéides A et B et remarquez que l'intensité mesurée de la céphéide B est 18 fois plus faible que celle de la céphéide A. À partir de la période de variation de l'intensité lumineuse, vous déduisez également que la céphéide A possède une luminosité absolue deux fois plus forte que celle de la céphéide B. De combien la céphéide B est-elle plus éloignée que la céphéide A ?

A) 3 fois plus éloignée

B) 6 fois plus éloignée

C) 9 fois plus éloignée

D) 18 fois plus éloignée

E) 36 fois plus éloignée

Question 1.19 (MC)

Comment peut-on augmenter la quantité de photons captés par un télescope ?

A) Avoir un télescope avec un miroir primaire plus grand.

B) Avoir un télescope avec un miroir secondaire plus grand.

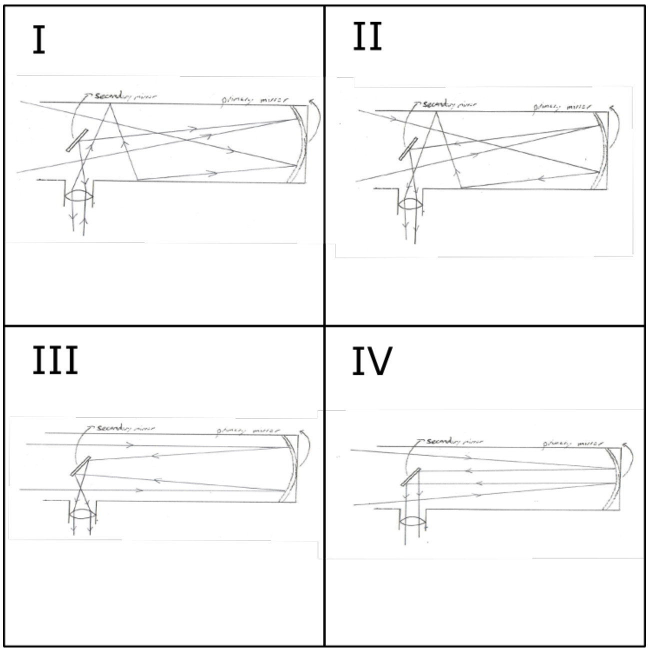
C) Avoir un télescope avec un oculaire plus grand.

D) Au lieu d'utiliser un oculaire, on peut directement fixer une caméra sensible.

E) Filtrer la lumière rouge et ne garder que les photons bleus de haute énergie.

Question 1.20 (MC)

Considérez un télescope. Lequel des chemins optiques proposés est possible ?



A) I B) II C) III D) IV

Question 1.21 (MC)

Emmy tient une cuillère à bout de bras et observe son reflet tant dans la surface intérieure qu'extérieure de la cuillère. Elle se rend compte de ce qui suit :

A) Les reflets à l'intérieur et à l'extérieur sont inversés (à l'envers).

B) Le reflet à l'intérieur est inversé et le reflet à l'extérieur ne l'est pas.

C) Le reflet à l'extérieur est inversé et le reflet à l'intérieur ne l'est pas.

D) Les reflets à l'intérieur et à l'extérieur ne sont pas inversés.

Multiple Choice : feuille-réponse

Donnez vos réponses dans les cases prévues à cet effet sur cette page.

Nom :	**Prénom :**	**Total :**

	A	B	C	D	E
Question 1.1	☐	☐	☐	☐	
Question 1.2	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.3	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.4	☐	☐	☐		
Question 1.5	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.6	☐	☐	☐	☐	
Question 1.7	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.8	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.9	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.10	☐	☐	☐	☐	
Question 1.11	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.12	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.13	☐	☐	☐	☐	
Question 1.14	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.15	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.16	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.17	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.18	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.19	☐	☐	☐	☐	☐
Question 1.20	☐	☐	☐	☐	
Question 1.21	☐	☐	☐	☐	

Multiple Choice : solutions

	A	B	C	D	E
Question 1.1	■	□	□	□	
Question 1.2	□	■	□	□	□
Question 1.3	□	■	□	□	□
Question 1.4	■	□	□		
Question 1.5	□	■	□	□	□
Question 1.6	□	□	■	□	
Question 1.7	□	□	□	■	□
Question 1.8	□	□	□	■	□
Question 1.9	■	□	□	□	□
Question 1.10	■	□	□	□	
Question 1.11	□	□	■	□	□
Question 1.12	□	□	□	■	□
Question 1.13	■	□	□	□	
Question 1.14	□	□	□	■	□
Question 1.15	□	□	□	□	■
Question 1.16	□	■	□	□	□
Question 1.17	□	■	□	□	□
Question 1.18	■	□	□	□	□
Question 1.19	■	□	□	□	□
Question 1.20	□	□	■	□	
Question 1.21	□	■	□	□	

Problèmes longs

Durée : 120 minutes
Cotation : 48 points (3×16)

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.

Problème long 2.1 : Effet Magnus *(16 points)*

Les objets volants en rotation sont déviés de leur trajectoire balistique en raison de leur interaction avec l'air qui les entoure. Dans cet exercice, nous allons examiner de plus près cet effet qui porte le nom du physicien Heinrich Magnus. Pour ce faire, nous élaborons un modèle simple pour expliquer l'effet dans la partie A. et appliquons les connaissances acquises à un exemple dans la partie B.

Partie A. Effet Magnus *(9 points)*

Dans cette partie, nous considérons un cylindre de hauteur h et de rayon R. Le cylindre tourne autour de son axe à une vitesse angulaire ω et le centre de gravité se déplace à une vitesse v_B. Pour la partie A., nous nous plaçons dans le référentiel qui se déplace à la vitesse v_B avec le cylindre (voir croquis).

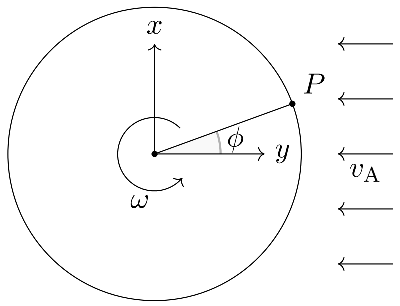


Figure A.1 : Cylindre du point de vue du référentiel en mouvement avec lui

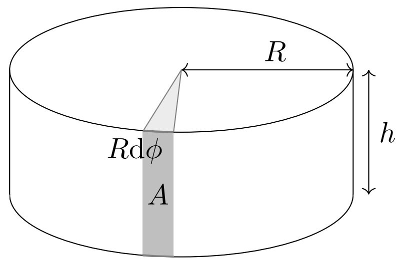
i. (1 pt) Quelles sont les composantes v_x et v_y de la vitesse du point P sur le bord du cylindre en fonction de ω, R et de l'angle ϕ ?

ii. (0.5 pt) Quelle est la vitesse $\vec{v}_\mathrm{A}$ de l'air loin devant le cylindre ?

La couche d'air au bord du cylindre est entraînée par le cylindre en rotation. Nous supposons donc que la vitesse de l'air au point P est égale à la somme de $\vec{v}_\mathrm{A}$ et de la vitesse $\vec{v}_P$ du point P sur le cylindre.

iii. (3 pt) Supposons que la pression au point $P_0 = (R, 0)$ est p_0. Utilisez l'équation de Bernoulli pour trouver la pression en un point P quelconque au bord du cylindre en fonction de v_B, de l'angle ϕ, ω et de R.

Nous considérons maintenant un petit élément de surface sur le côté du cylindre.



iv. (1.5 pt) Calculez les composantes x et y de la force qui s'exerce sur la surface A de longueur de côté $R\mathrm{d}\phi$ et de hauteur h.

v. (1 pt) Dans quelle direction la force totale est-elle dirigée sur le cylindre ? Un argument sans calcul suffit.

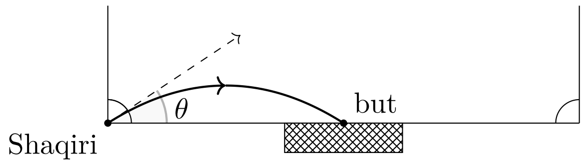
vi. (2 pt) Quelle est la valeur de cette force ?
Indication : $\int_0^{2\pi} \sin(\phi)^2 \,\mathrm{d}\phi = \pi$

Partie B. Trajectoire *(7 points)*

Dans cette partie, nous appliquons l'effet Magnus à la trajectoire d'un ballon de football. Pour cela, nous avons besoin de la force de l'effet Magnus dans le cas d'un ballon qui vole à une vitesse $\vec{v}$ et qui tourne à une vitesse angulaire ω

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{A} \left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right),$$

où ρ_A est la masse volumique de l'air ($1.2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) et R le rayon de la balle. De plus, pour ce problème, nous supposons qu'un ballon de football pèse 420 g et a un rayon de 11 cm. La distance entre le drapeau de coin et le centre du but est de $L = 23\,\mathrm{m}$. Shaqiri veut maintenant marquer un but depuis le drapeau de coin. Il tire le ballon de manière à ce que l'axe de rotation soit toujours perpendiculaire au sol.



i. (2 pt) Quelle est la forme des composantes horizontale et verticale de la trajectoire de la balle ?

ii. (2.5 pt) Shaqiri tire le ballon avec un taux de rotation de 10 tours par seconde et une vitesse horizontale initiale de $v_\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Avec quel angle θ par rapport à la ligne de fond Shaqiri doit-il frapper le ballon pour qu'il franchisse la ligne de but exactement au milieu du but ?

iii. (2.5 pt) Avec quelle vitesse verticale vers le haut Shaqiri doit-il tirer le ballon pour qu'il retombe au sol au moment précis où il franchit la ligne de but ?

Problème long 2.2 : Crise énergétique *(16 points)*

Un beau jour d'automne, Richard Feynman lit dans le journal qu'une pénurie de combustible fossile est attendue pour l'hiver suivant. Il partage actuellement avec Arline Greenbaum un appartement chauffé au mazout. Les deux commencent à réfléchir à une façon de réduire leur consommation de mazout. Pendant l'hiver, la température extérieure est de $T_1 = 3\,°\mathrm{C}$ et leur souhait est de garder l'appartement à $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$. Dans ce cas l'appartement perd $P = 2000\,\mathrm{W}$ de chaleur qui nécessite d'être compensée. Le mazout a un pouvoir calorifique $H = 36\,\mathrm{MJ \cdot L^{-1}}$. L'eau a une capacité thermique $c = 4.19\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ et une chaleur latente de solidification $L = 333.7\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Partie A. Questions d'échauffement *(4.5 points)*

i. (1 pt) Estimez le rendement du chauffage d'eau sanitaire avec du mazout.

ii. (1 pt) Combien d'eau pourrait-on chauffer de T_2 à $T_3 = 80\,°\mathrm{C}$ avec $1\,\mathrm{L}$ de mazout ?

iii. (0.5 pt) Pendant combien de temps la température de leur appartement peut-elle être maintenue avec $1\,\mathrm{L}$ de mazout ?

iv. (2 pt) En supposant que l'appartement perd de la chaleur principalement par conduction, combien de puissance pourrait être économisée en réduisant la température de l'appartement à $T_2' = 17\,°\mathrm{C}$?

Partie B. Pour quelques systèmes de chauffage de plus *(11.5 points)*

Par confort, leur décision est de ne pas réduire la température. À la place, d'autres systèmes de chauffage sont considérés en calculant les ressources nécessaires pour maintenir la température de leur appartement.

i. (1 pt) Une possibilité serait d'acheter un chauffage électrique. Quelle puissance électrique serait alors nécessaire ?

Une autre possibilité serait d'installer une pompe à chaleur travaillant entre deux différentes températures $T_a \leq T_b$, entraînée par un moteur électrique.

ii. (3 pt) En supposant que la pompe à chaleur a le meilleur rendement théoriquement possible, trouvez une relation entre une quantité infinitésimale de travail fourni $\mathrm{d}W$ et une quantité infinitésimale de chaleur $\mathrm{d}Q_b$ transférée au réservoir de température supérieure.

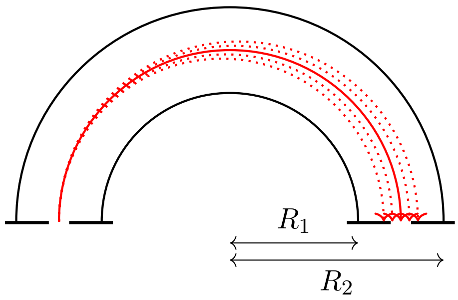
iii. (2 pt) La façon la plus simple d'installer une pompe à chaleur est de la faire travailler entre l'air extérieur et de l'appartement. Quelle serait la puissance électrique théorique minimale nécessaire dans ce cas ? Vous pouvez supposer que le moteur électrique a 100 % de rendement, car la majorité des pertes d'énergie contribuent directement à la température de l'appartement.

iv. (4.5 pt) Richard pense ensuite à leur congélateur, qui fonctionne aussi comme une pompe à chaleur. Il se rend compte de la possibilité de prendre de l'eau du robinet (qui arrive dans la maison à la température T_2), la mettre dans une récipient au congélateur et, dès qu'elle est gelée, jeter la glace formée par la fenêtre et répéter le processus. Quelle serait alors, en théorie, la puissance électrique moyenne minimale nécessaire, et combien d'eau serait requise en moyenne par heure ? Vous pouvez à nouveau supposer que le moteur électrique de la pompe du congélateur a 100 % de rendement, qu'ouvrir la fenêtre pour jeter la glace n'a pas d'influence sur la température de la pièce et que la glace jetée n'influence pas la température extérieure.
Indice : considérez une masse m d'eau introduite et traitez le processus de refroidissement de l'eau et le processus de congélation séparément au départ. À la fin, supposez que les deux processus se passent sur une durée Δt pour obtenir des valeurs moyennes.

v. (1 pt) Soudain, la sonnette se fait entendre. Marie rend visite à Arline et Richard et leur apporte le vélo d'appartement promis depuis longtemps. Serait-il possible pour Arline et Richard de générer la chaleur nécessaire uniquement en s'entraînant suffisamment ?

Problème long 2.3 : Analyseur hémisphérique *(16 points)*

La spectroscopie photoélectronique explore les propriétés électriques des solides en projetant de la lumière sur le matériau étudié et en déterminant l'énergie des électrons émis. Pour déterminer l'énergie des électrons, un analyseur hémisphérique est utilisé (cf. esquisse). Son principe fondamental de fonctionnement est que les électrons sont déviés par un champ électrique entre deux hémisphères conducteurs de façon différente selon leur énergie cinétique. Cela signifie que la détermination de la position après le passage à travers l'analyseur hémisphérique révèle l'énergie cinétique initiale des électrons. Nous souhaitons maintenant découvrir plus précisément comment cela se passe.



Partie A. Champ électrique *(7 points)*

Dans cette partie, nous souhaitons calculer le champ électrique entre les deux hémisphères. Pour ce faire, nous supposons que le champ électrique est le même que pour deux sphères complètes imbriquées de rayons R_1 et R_2.

i. (1 pt) Nous supposons que la sphère intérieure de rayon R_1 porte une charge Q_1. Quel est le champ électrique créé par cette charge dans l'espace entre les deux sphères, en fonction du rayon r ?

ii. (1 pt) Sur la grande sphère de rayon R_2 se trouve également une charge Q_2. Quel est le champ électrique créé par cette charge dans l'espace entre les deux sphères, en fonction du rayon r ?

iii. (1 pt) Quel est le potentiel électrique entre les deux sphères en fonction de r, Q_1 et Q_2 ? Vous pouvez choisir librement la référence $V = 0$ pour le potentiel.

iv. (3 pt) En laboratoire, nous ne pouvons pas influencer directement les charges Q_1 et Q_2, mais seulement les potentiels V_1 et V_2 des deux sphères. Donnez le potentiel en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2 et r.

v. (1 pt) Quelle est la norme du champ électrique en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2 et r ?

Partie B. Orbite des électrons *(9 points)*

Nous supposons que les électrons entrent dans l'analyseur hémisphérique au rayon $R_\mathrm{i} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ avec une vitesse perpendiculaire à l'ouverture.

i. (2.5 pt) Quelle est l'énergie cinétique $E^\mathrm{p}_\mathrm{kin}$ d'un électron pour laquelle il suit une orbite circulaire ? Donnez le résultat en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2 et de la charge élémentaire e.

ii. (1 pt) Nous considérons maintenant des électrons d'énergie cinétique $E_\mathrm{kin} \neq E^\mathrm{p}_\mathrm{kin}$. Quelle est la forme de la trajectoire des électrons dans ce cas ?

iii. (5.5 pt) Déterminez le rayon R_f de l'électron à la sortie de l'analyseur hémisphérique en fonction de l'énergie cinétique E_kin à l'entrée, de l'énergie de passage $E^\mathrm{p}_\mathrm{kin}$ et de R_i. *Indice : utilisez la conservation du moment cinétique et de l'énergie.*

Problèmes longs : solutions

Problème long 2.1 : Effet Magnus — 16

Les objets volants en rotation sont déviés de leur trajectoire balistique en raison de leur interaction avec l'air qui les entoure. Dans cet exercice, nous allons examiner de plus près cet effet qui porte le nom du physicien Heinrich Magnus. Pour ce faire, nous élaborons un modèle simple pour expliquer l'effet dans la partie A. et appliquons les connaissances acquises à un exemple dans la partie B.

Partie A. Effet Magnus — 9

Dans cette partie, nous considérons un cylindre de hauteur h et de rayon R. Le cylindre tourne autour de son axe à une vitesse angulaire ω et le centre de gravité se déplace à une vitesse $v_{\mathbf{B}}$. Pour la partie A., nous nous plaçons dans le référentiel qui se déplace à la vitesse $v_{\mathbf{B}}$ avec le cylindre (voir croquis).

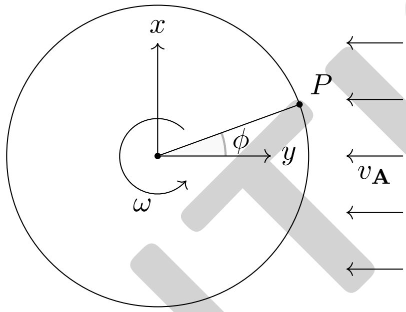


Figure A.1 : Cylindre du point de vue du référentiel en mouvement avec lui

i. Quelles sont les composantes v_x et v_y de la vitesse du point P sur le bord du cylindre en fonction de ω, R et de l'angle ϕ ? — *1*

$$v_x = -\sin(\phi)\,\omega R$$

0.5

$$v_y = \cos(\phi)\,\omega R$$

0.5

ii. Quelle est la vitesse $\vec{v}_{\mathbf{A}}$ de l'air loin devant le cylindre ? — *0.5*

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = (-v_{\mathrm{B}}, 0)$$

0.5

La couche d'air au bord du cylindre est entraînée par le cylindre en rotation. Nous supposons donc que la vitesse de l'air au point P est égale à la somme de $\vec{v}_{\mathbf{A}}$ et de la vitesse $\vec{v}_P$ du point P sur le cylindre.

iii. Supposons que la pression au point $P_0 = (R, 0)$ est p_0. Utilisez l'équation de Bernoulli pour trouver la pression en un point P quelconque au bord du cylindre en fonction de v_B, de l'angle ϕ, ω et de R. ***3***

The velocity of the air around the cylinder is

$$(v_x, v_y) = (-v_\mathrm{B} - \sin(\phi)\,\omega R, \cos(\phi)\,\omega R)\,.$$

0.5

The Bernoulli equation reads as

$$\frac{1}{2}\rho_\mathrm{A} v_0^2 + p_0 = \frac{1}{2}\rho_\mathrm{A}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + p(\phi)\,,$$

where we neglected the hydrostatic pressure. 1

With the previous result the velocities can be expanded

$$v_0^2 = v_\mathrm{B}^2 + (\omega R)^2$$

0.5

$$v_x^2 + v_y^2 = v_\mathrm{B}^2 + (\omega R)^2 + 2\sin(\phi)\,v_\mathrm{B}\omega R$$

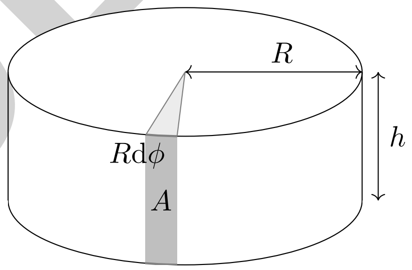
0.5

Putting all things together we get

$$p(\phi) = p_0 - \sin(\phi)\,v_\mathrm{B}\omega R\rho_\mathrm{A}.$$

0.5

Nous considérons maintenant un petit élément de surface sur le côté du cylindre.



iv. Calculez les composantes x et y de la force qui s'exerce sur la surface A de longueur de côté $R\mathrm{d}\phi$ et de hauteur h. ***1.5***

The total force is given by

$$F = pA.$$

0.5

Therefore we get

$$F_x = -F\cos(\phi) = -\left(p_0 - \rho_{\mathrm{A}}\sin(\phi)\,v_{\mathrm{B}}\omega R\right)\cos(\phi)\,Rh\mathrm{d}\phi$$

0.5

and

$$F_y = -F\sin(\phi) = -\left(p_0 - \rho_{\mathrm{A}}\sin(\phi)\,v_{\mathrm{B}}\omega R\right)\sin(\phi)\,Rh\mathrm{d}\phi.$$

0.5

v. Dans quelle direction la force totale est-elle dirigée sur le cylindre ? Un argument sans calcul suffit. *1*

If we consider the two points (x, y) and $(-x, y)$ the x component of the pressure force is the same in magnitude but the opposite in direction. Therefore the x component is zero. 0.5

Since the pressure on the upper side of the cylinder (positive y values) is lower the than on the lower side, the force will point in positive y-direction. 0.5

vi. Quelle est la valeur de cette force ?
Indication : $\int_0^{2\pi}\sin(\phi)^2\,\mathrm{d}\phi = \pi$ *2*

From the argument above we only have to consider the y component of the force. We get the total force by integration:

$$F = \int_0^{2\pi} F_y\mathrm{d}\phi = -\int_0^{2\pi}\left(p_0 - 2\sin(\phi)\,v_{\mathrm{B}}\omega R\right)\sin(\phi)\,Rh\mathrm{d}\phi.$$

0.5

The term proportional to the sine becomes zero:

$$-\int_0^{2\pi} p_0\sin(\phi)\,Rh\mathrm{d}\phi = 0.$$

0.5

And for the other term we can use the hint to get

$$F = \int_0^{2\pi} F_y\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\rho_{\mathrm{A}}\sin(\phi)^2\,v_{\mathrm{B}}\omega R^2h\mathrm{d}\phi = v_{\mathrm{B}}\omega\pi R^2h = \omega v_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{cylinder}}\rho_{\mathrm{A}}.$$

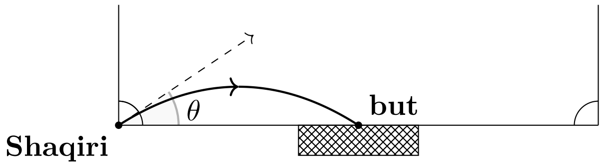
1

Partie B. Trajectoire *7*

Dans cette partie, nous appliquons l'effet Magnus à la trajectoire d'un ballon de football. Pour cela, nous avons besoin de la force de l'effet Magnus dans le cas d'un ballon qui vole à une vitesse $\vec{v}$ et qui tourne à une vitesse angulaire ω

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_{\mathbf{A}}\left(\vec{v}\times\vec{\omega}\right),$$

où $\rho_{\mathbf{A}}$ est la masse volumique de l'air ($1.2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) et R le rayon de la balle. De plus, pour ce problème, nous supposons qu'un ballon de football pèse $420\,\mathrm{g}$ et a un rayon de $11\,\mathrm{cm}$. La distance entre le drapeau de coin et le centre du but est de $L = 23\,\mathrm{m}$. Shaqiri veut maintenant marquer un but depuis le drapeau de coin. Il tire le ballon de manière à ce que l'axe de rotation soit toujours perpendiculaire au sol.



i. Quelle est la forme des composantes horizontale et verticale de la trajectoire de la balle ? ***2***

The two components can be considered independently, because the rotation is along the vertical axis and is therefore only affecting the horizontal movement. 0.5

For the horizontal movement we just have the force from the Magnus-effect, which has the same form as the Lorenz force, therefore we expect that the ball moves on a circular trajectory. 1

For the vertical movement only gravity plays a role, therefore we get a parabola. 0.5

ii. Shaqiri tire le ballon avec un taux de rotation de 10 tours par seconde et une vitesse horizontale initiale de $v_\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Avec quel angle θ par rapport à la ligne de fond Shaqiri doit-il frapper le ballon pour qu'il franchisse la ligne de but exactement au milieu du but ? ***2.5***

The magnus force contributes the centripetal force thereby we have the condition

$$\frac{m_\mathrm{B} v_\mathrm{h}^2}{R_\mathrm{f}} = m_\mathrm{A} v_\mathrm{h} \omega,$$

where ω is the angular velocity of the ball's rotation and R_f the radius of the trajectory. 0.5

Solving for R_f gives

$$R_\mathrm{f} = \frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}} \frac{v_\mathrm{h}}{\omega}.$$

0.5

The opening angle ϕ of the arc describing the ball's trajectory needs to fullfil the condition

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) R_\mathrm{f} = \frac{L}{2}.$$

0.5

Shaqiri needs to aim at half of this opening angle, therefore

$$\theta = \arcsin\left(\frac{L}{2R_\mathrm{f}}\right) = \arcsin\left(\frac{L\omega}{2v_\mathrm{h}} \frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}}\right).$$

0.5

The numerical answer is $31.2°$ (the radius is $22\,\mathrm{m}$). 0.5

iii. Avec quelle vitesse verticale vers le haut Shaqiri doit-il tirer le ballon pour qu'il retombe au sol au moment précis où il franchit la ligne de but ? ***2.5***

Let $v_{p,0}$ the initial vertical velocity of the ball then the vertical velocity of the ball in dependence on time is

$$v_p(t) = v_{p,0} + gt.$$

0.5

When the ball hits the ground it has a velocity of $-v_{p,0}$, 0.5

which means $v_{p,0} = \frac{gT}{2}$, where T is the time it takes the Ball to hit the goal. 0.5

The time T can be obtained from the previous task

$$T = \frac{2\theta R}{v_\mathrm{h}}.$$

0.5

The numerical answer is $v_{p,0} = 5.33\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ($T = 1.09\,\mathrm{s}$). 0.5

Problème long 2.2 : Crise énergétique *16*

Un beau jour d'automne, Richard Feynman lit dans le journal qu'une pénurie de combustible fossile est attendue pour l'hiver suivant. Il partage actuellement avec Arline Greenbaum un appartement chauffé au mazout. Les deux commencent à réfléchir à une façon de réduire leur consommation de mazout. Pendant l'hiver, la température extérieure est de $T_1 = 3\,°\mathrm{C}$ et leur souhait est de garder l'appartement à $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$. Dans ce cas l'appartement perd $P = 2000\,\mathrm{W}$ de chaleur qui nécessite d'être compensée. Le mazout a un pouvoir calorifique $H = 36\,\mathrm{MJ \cdot L^{-1}}$. L'eau a une capacité thermique $c = 4.19\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ et une chaleur latente de solidification $L = 333.7\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Partie A. Questions d'échauffement *4.5*

i. Estimez le rendement du chauffage d'eau sanitaire avec du mazout. *1*

The efficiency is close to 100 %, the only losses are through the walls of the furnace and/or boiler. However, the longer the time between the heating and the use of domestic hot water, the higher the losses. 80 % is a safe value. 1

ii. Combien d'eau pourrait-on chauffer de T_2 à $T_3 = 80\,°\mathrm{C}$ avec $1\,\mathrm{L}$ de mazout ? *1*

Heating water from T_2 to T_3 requires a heat of $c\,(T_3 - T_2)$ per unit mass. 0.5

So with $l = 1\,\mathrm{L}$ of fuel oil, one can heat a mass of water of $\frac{lH}{c(T_3-T_2)} \approx 143\,\mathrm{kg}$, which also corresponds to $\approx 143\,\mathrm{L}$. Taking the efficiency into account, a value between $110\,\mathrm{L}$ and $143\,\mathrm{L}$ is considered correct. 0.5

iii. Pendant combien de temps la température de leur appartement peut-elle être maintenue avec $1\,\mathrm{L}$ de mazout ? *0.5*

They can maintain it for $\frac{lH}{P} = 1.8 \times 10^4\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{h}$. 0.5

iv. En supposant que l'appartement perd de la chaleur principalement par conduction, combien de puissance pourrait être économisée en réduisant la température de l'appartement à $T_2' = 17\,°\mathrm{C}$? *2*

Heat transfer through conduction is proportional to the temperature difference. 1

Therefore the heat loss would be equal to $\frac{T_2'-T_1}{T_2-T_1}P$. 0.5

The power saved is then $P - \frac{T_2'-T_1}{T_2-T_1}P = \frac{T_2-T_2'}{T_2-T_1}P \approx 353\,\mathrm{W}$ or 18 %. 0.5

Partie B. Pour quelques systèmes de chauffage de plus *11.5*

Par confort, leur décision est de ne pas réduire la température. À la place, d'autres systèmes de chauffage sont considérés en calculant les ressources nécessaires pour maintenir la température de leur appartement.

i. Une possibilité serait d'acheter un chauffage électrique. Quelle puissance électrique serait alors nécessaire ? *1*

Electric heaters have near-perfect efficiency, because what would be losses in other systems are the actual useful output. So they would need a power $P = 2000\,\mathrm{W}$. 1

Une autre possibilité serait d'installer une pompe à chaleur travaillant entre deux différentes températures $T_a \leq T_b$, entraînée par un moteur électrique.

ii. En supposant que la pompe à chaleur a le meilleur rendement théoriquement possible, trouvez une relation entre une quantité infinitésimale de travail fourni $\mathrm{d}W$ et une quantité infinitésimale de chaleur $\mathrm{d}Q_b$ transférée au réservoir de température supérieure. *3*

The ideal case corresponds to a Carnot cycle where the total entropy variation is null and the internal energy of the heat pump goes back to its initial value after each cycle. 1

To function, the pump requires the work $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q_b - \mathrm{d}Q_a$ to be supplied, where $\mathrm{d}Q_a$ is taken positive (heat transferred from the lower temperature reservoir to the pump). 0.5

From entropy conservation, $\frac{\mathrm{d}Q_a}{T_a} = \frac{\mathrm{d}Q_b}{T_b}$. 0.5

Therefore, $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q_b - \mathrm{d}Q_b\frac{T_a}{T_b} = \mathrm{d}Q_b\frac{T_b - T_a}{T_b}$. 1

iii. La façon la plus simple d'installer une pompe à chaleur est de la faire travailler entre l'air extérieur et de l'appartement. Quelle serait la puissance électrique théorique minimale nécessaire dans ce cas ? Vous pouvez supposer que le moteur électrique a $100\,\%$ de rendement, car la majorité des pertes d'énergie contribuent directement à la température de l'appartement. *2*

We can use the first formula derived previously, with $T_a = T_1$ and $T_b = T_2$. 0.5

Because the pump motor is assumed to have perfect efficiency, $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ is the required electric power. 0.5

We also have $P = \frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}$. 0.5

Therefore, $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = P\frac{T_2 - T_1}{T_2} \approx 116\,\mathrm{W}$. 0.5

iv. Richard pense ensuite à leur congélateur, qui fonctionne aussi comme une pompe à chaleur. Il se rend compte de la possibilité de prendre de l'eau du robinet (qui arrive dans la maison à la température T_2), la mettre dans une récipient au congélateur et, dès qu'elle est gelée, jeter la glace formée par la fenêtre et répéter le processus. Quelle serait alors, en théorie, la puissance électrique moyenne minimale nécessaire, et combien d'eau serait requise en moyenne par heure ? Vous pouvez à nouveau supposer que le moteur électrique de la pompe du congélateur a $100\,\%$ de rendement, qu'ouvrir la fenêtre pour jeter la glace n'a pas d'influence sur la température de la pièce et que la glace jetée n'influence pas la température extérieure.
Indice : considérez une masse m d'eau introduite et traitez le processus de refroidissement de l'eau et le processus de congélation séparément au départ. À la fin, supposez que les deux processus se passent sur une durée Δt pour obtenir des valeurs moyennes. *4.5*

In this case, the upper temperature remains fixed $T_b = T_2$, whereas the lower temperature T_a drops from T_2 to $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$, where water freezes.

When lowering the temperature, we have $\mathrm{d}Q_a = -cm\mathrm{d}T_a$. 0.5

Integrating it in temperature, we get

$$Q_{1,T_2\to T_0} = cm\int_{T_0}^{T_2} T\mathrm{d}T = cm\left(T_2 - T_0\right).$$

0.5

Integrating in temperature the entropy conservation equation, we get

$$Q_{2,T_2\to T_0} = cm\int_{T_0}^{T_2} \frac{T_2}{T}\mathrm{d}T = cmT_2\log\left(\frac{T_2}{T_0}\right).$$

0.5

During freezing, we have $Q_{1,\text{freezing}} = mL$. 0.5

So $Q_{2,\text{freezing}} = Q_{1,\text{freezing}} \frac{T_2}{T_0} = mL\frac{T_2}{T_0}$. 0.5

In total, $Q_2 = cmT_2 \log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + mL\frac{T_2}{T_0}$ and $W = cm\left(T_2 \log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + T_0 - T_2\right) + mL\frac{T_2 - T_0}{T_0}$. 0.5

The timespan Δt is such that $P = \frac{Q_2}{\Delta t}$. 0.5

Then

$$\frac{m}{\Delta t} = P\frac{1}{cT_2 \log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + L\frac{T_2}{T_0}} \approx 5.4 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}},$$

which is about $2.0\,\mathrm{L \cdot h^{-1}}$. 0.5

And

$$\frac{W}{\Delta t} = P\left(1 - \frac{c\,(T_2 - T_0) + L}{cT_2 \log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + L\frac{T_2}{T_0}}\right) \approx 135\,\mathrm{W}.$$

0.5

v. Soudain, la sonnette se fait entendre. Marie rend visite à Arline et Richard et leur apporte le vélo d'appartement promis depuis longtemps. Serait-il possible pour Arline et Richard de générer la chaleur nécessaire uniquement en s'entraînant suffisamment ? ***1***

The daily food ration for an adult is around $10\,000\,\mathrm{kJ}$. 0.5

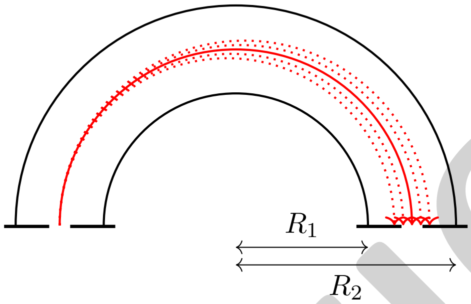
So even if Arline and Richard transformed all their food intake in heat, their combined power would be a mere

$$2\frac{10\,000\,\mathrm{kJ}}{3600 \cdot 24\,\mathrm{s}} \approx 231\,\mathrm{W},$$

well below P. 0.5

Problème long 2.3 : Analyseur hémisphérique *16*

La spectroscopie photoélectronique explore les propriétés électriques des solides en projetant de la lumière sur le matériau étudié et en déterminant l'énergie des électrons émis. Pour déterminer l'énergie des électrons, un analyseur hémisphérique est utilisé (cf. esquisse). Son principe fondamental de fonctionnement est que les électrons sont déviés par un champ électrique entre deux hémisphères conducteurs de façon différente selon leur énergie cinétique. Cela signifie que la détermination de la position après le passage à travers l'analyseur hémisphérique révèle l'énergie cinétique initiale des électrons. Nous souhaitons maintenant découvrir plus précisément comment cela se passe.



Partie A. Champ électrique *7*

Dans cette partie, nous souhaitons calculer le champ électrique entre les deux hémisphères. Pour ce faire, nous supposons que le champ électrique est le même que pour deux sphères complètes imbriquées de rayons R_1 et R_2.

i. Nous supposons que la sphère intérieure de rayon R_1 porte une charge Q_1. Quel est le champ électrique créé par cette charge dans l'espace entre les deux sphères, en fonction du rayon r ? *1*

The electric field is

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

1

ii. Sur la grande sphère de rayon R_2 se trouve également une charge Q_2. Quel est le champ électrique créé par cette charge dans l'espace entre les deux sphères, en fonction du rayon r ? *1*

The electric field is $E(r) = 0$ 1

iii. Quel est le potentiel électrique entre les deux sphères en fonction de r, Q_1 et Q_2 ? Vous pouvez choisir librement la référence $V = 0$ pour le potentiel. *1*

We integrate the total electric field with respect to r and get

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r} + C_2$$

1

iv. En laboratoire, nous ne pouvons pas influencer directement les charges Q_1 et Q_2, mais seulement les potentiels V_1 et V_2 des deux sphères. Donnez le potentiel en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2 et r. *3*

We have the two boundary conditions

$$V_1 = V(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} + C_2$$

0.5

$$V_2 = V(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_2} + C_2$$

0.5

This can be solved for

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} = -\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}R_2R_1$$

1

and

$$C_2 = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}R_2 = \frac{V_2R_2 + V_1R_1}{R_2 - R_1}$$

1

v. Quelle est la norme du champ électrique en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2 et r ? *1*

We take the derivative of the Potential with respect to r and get

$$|E(r)| = \frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\frac{R_2R_1}{r^2}$$

1

Partie B. Orbite des électrons *9*

Nous supposons que les électrons entrent dans l'analyseur hémisphérique au rayon $R_\mathrm{i} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ avec une vitesse perpendiculaire à l'ouverture.

i. Quelle est l'énergie cinétique $E^\mathrm{p}_\mathrm{kin}$ d'un électron pour laquelle il suit une orbite circulaire ? Donnez le résultat en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2 et de la charge élémentaire e. *2.5*

The centripetal force required to put the electron on circular orbit is

$$F_\mathrm{c} = m_\mathrm{e}\frac{v_\mathrm{p}^2}{R_\mathrm{p}}$$

0.5

which has to be equal to electric force

$$eE(R_\mathrm{i}) = m_\mathrm{e}\frac{v_\mathrm{p}^2}{R_\mathrm{p}}$$

0.5

The electron kinetic energy is given by

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{p}}^2$$

0.5

Therefore we can solve E_{p}

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} e E(R_{\mathrm{i}})\, R_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{2} e \frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1} \frac{R_2 R_1}{R_i} = e\,(V_2 - V_1)\,\frac{R_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2}$$

1

ii. Nous considérons maintenant des électrons d'énergie cinétique $E_{\mathbf{kin}} \neq E_{\mathbf{kin}}^{\mathbf{p}}$. Quelle est la forme de la trajectoire des électrons dans ce cas ? ***1***

We have the $1/r$ Potential as in the case of celestial orbits. Therefore we can use Kepler's laws and we get that the trajectory is shaped like an ellipse. 1

Note that the Perihel and the Aphel of the orbit are at the entry or at the exit of the analyzer.

iii. Déterminez le rayon $R_{\mathbf{f}}$ de l'électron à la sortie de l'analyseur hémisphérique en fonction de l'énergie cinétique $E_{\mathbf{kin}}$ à l'entrée, de l'énergie de passage $E_{\mathbf{kin}}^{\mathbf{p}}$ et de R_{i}. *Indice : utilisez la conservation du moment cinétique et de l'énergie.* ***5.5***

Let v_{i} be the initial velocity at the entry and v_{f} the velocity at the exit. First we have to note that the orbit is perpendicular to the radius at the entry and therefore also has to be perpendicular at the exit. 1

Therefore angular momentum conservation reads as

$$m_{\mathrm{e}} R_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{e}} R_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{f}}$$

1

Similarly we can use the energy conservation condition

$$E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}} = E_{\mathrm{f}} + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{f}}}$$

1

From the angular momentum conservation we can express

$$E_{\mathrm{f}} = \frac{R_{\mathrm{i}}^2}{R_{\mathrm{f}}^2} E$$

0.5

Therefore the energy conservation gives a quadratic equation in R_{f}

$$\left(E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}\right) R_{\mathrm{f}}^2 - \alpha R_{\mathrm{f}} - R_{\mathrm{i}}^2 E = 0$$

0.5

The solution to this quadratic equation is

$$R_{\mathrm{f}} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4R_{\mathrm{i}}^2 E^2 + 4\alpha R_{\mathrm{i}} E}}{2\left(E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}\right)} = \frac{\alpha \pm (\alpha + 2R_{\mathrm{i}} E)}{2\left(E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}\right)} = -R_{\mathrm{i}} \frac{E}{E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}}$$

0.5

The other solution with the minus just gives $R_f = R_i$, which corresponds to a full orbit.

From above we have $\frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}} = -eE(R_{\mathrm{i}})\, R_{\mathrm{i}} = -2E_{\mathrm{p}}$ 0.5

which gives the final result

$$R_{\mathrm{f}} = R_{\mathrm{i}} \frac{1}{2\frac{E_{\mathrm{p}}}{E} - 1}$$

0.5