PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olympiades de Physique

Deuxième tour

Lausanne, 15 janvier 2020

Première partie (60')	**:**	**QCM – 22 questions**
Deuxième partie (120')	**:**	**Problèmes – 3 questions**
Moyens autorisés	:	Calculatrice sans base de données Matériel pour écrire et dessiner

Bonne chance !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière dans le vide	c	$=$	$299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Permittivité du vide	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817\times10^{-12}\,\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Constante de Planck	h	$=$	$6.626\,069\,57\times10^{-34}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$=$	$1.602\,176\,565(35)\times10^{-19}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Constante gravitationnelle	G	$=$	$6.673\,84(80)\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Accélération de la pesanteur	g	$=$	$9.81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Nombre d'Avogadro	N_A	$=$	$6.022\,141\,29(27)\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	R	$=$	$8.314\,459\,8(48)\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$=$	$1.380\,648\,8(13)\times10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzman	σ	$=$	$5.670\,373(21)\times10^{-8}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-4}$
Masse de l'électron	m_e	$=$	$9.109\,382\,6(16)\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Masse du proton	m_p	$=$	$1.672\,621\,71(29)\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse du neutron	m_n	$=$	$1.674\,927\,28(29)\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Multiple choice : feuille-réponse

Durée : 60 minutes
Cotation : 22 points (1 point par réponse correcte)
Donnez vos réponses dans les cases prévues à cet effet sur cette page.
Chaque question n'admet qu'**une** seule réponse correcte.

Nom	:
Prénom	:
Total	:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Question 1	☐	☐	☐	☐		
Question 2	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 3	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 4	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 5	☐	☐	☐	☐		
Question 6	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 7	☐	☐	☐	☐		
Question 8	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 9	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 10	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 11	☐	☐	☐	☐		
Question 12	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 13	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 14	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 15	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 16	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 17	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Question 18	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 19	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 20	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 21	☐	☐	☐	☐	☐	
Question 22	☐	☐	☐	☐	☐	

Question 1

Dans ce scénario (purement hypothétique), le Soleil a été remplacé par un trou noir d'1.5 masse solaire. Quelle affirmation concernant le mouvement de la Terre est correcte ?

a) La trajectoire de la Terre ne change pas.

b) La Terre se rapproche du trou noir en spirale et est aspirée.

c) L'excentricité augmente.

d) Les deux demi-axes de la trajectoire deviennent nettement plus grands.

Question 2

Une masse-test se trouve à une distance R de la surface d'une planète de rayon R et masse M. La masse-test a une vitesse initiale parallèle à la surface de la planète. Quelle doit être la norme de cette vitesse pour éviter que la masse-test ne percute pas la planète, au minimum ?

a) $\sqrt{\frac{GM}{3R}}$

b) $\sqrt{\frac{GM}{2R}}$

c) $\sqrt{\frac{2GM}{3R}}$

d) $\sqrt{\frac{3GM}{2R}}$

e) $\sqrt{\frac{GM}{R}}$

f) Aucune de ces réponses.

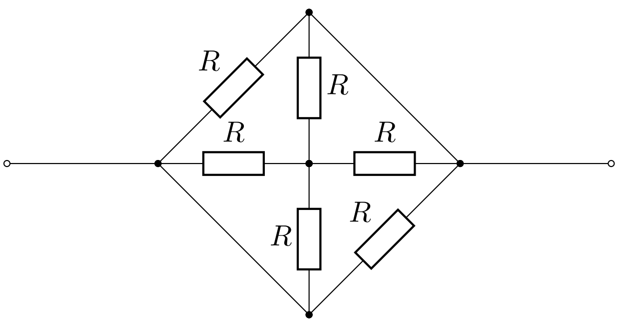
Question 3

De l'eau s'écoule verticalement d'un robinet de diamètre 2 cm avec une vitesse initiale de 10 $\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$. Quel sera le diamètre du filet d'eau 25 cm en-dessous de la bouche du robinet ? On négligera l'influence de la pression et de la tension superficielle. *Note : l'examen contenait à l'origine une solution incorrecte, qui a été corrigée rétrospectivement.*

a) 0.4 cm b) 0.5 cm c) 0.8 cm d) 1.0 cm e) 2.0 cm

Question 4

Dans le diagramme ci-dessous, les six résistances R sont identiques.



Quelle est la résistance équivalente du système ?

a) $\frac{R}{3}$ b) $\frac{R}{2}$ c) R d) $2R$ e) $3R$

Question 5

E représente une énergie, T une température, v une vitesse, m une masse, λ une distance, P une puissance et f une fréquence. Quel est l'intrus ?

a) $\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right)$ b) $\log\left(\frac{v^3 m}{\lambda P}\right)$ c) $\sin(\lambda f)$ d) $\sqrt{1+\frac{c^2}{v^2}}$

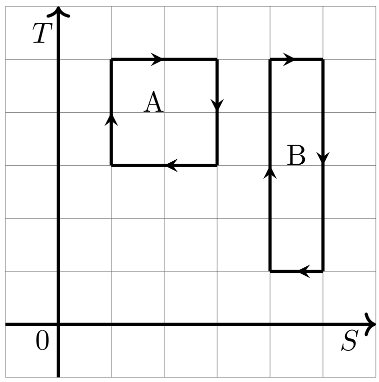
Question 6

On considère une distance d, une force F et une vitesse v. Quelles doivent être les constantes α, β et γ pour que $d^\alpha F^\beta v^\gamma$ ait les unités d'une masse volumique ?

a) $\alpha = -3$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$
b) $\alpha = -3$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$
c) $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$
d) $\alpha = -3$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$
e) $\alpha = -4$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$
f) $\alpha = -2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$

Question 7

Le diagramme ci-contre représente deux cycles thermodynamiques d'un gaz parfait. Quelle affirmation est fausse ?



a) Le travail net du cycle A est égal à celui du cycle B.
b) La température la plus basse du cycle B est strictement plus basse que la température la plus basse du cycle A.
c) Le rendement du cycle A est plus élevé que celui du cycle B.
d) Le cycle A ne comporte pas de processus isochore.

Question 8

L'uranium 235, ayont une demi-vie d'environ 700 millions d'années, se désintègre en plomb 207 (stable). Les produits intermédiaires de désintégration ont des demi-vies négligeablement courtes. Dans un échantillon de zircon (cristal qui ne contient pas de plomb lors de sa formation), on trouve un rapport de nombre d'atomes $\frac{^{235}\mathrm{U}}{^{207}\mathrm{Pb}} = 0.1$. Quelle limite inférieure de l'âge de la Terre peut-on en déduire ? (« a » est le symbole SI de l'année)

a) 1.0 Ga
b) 1.5 Ga
c) 2.0 Ga
d) 2.4 Ga
e) 4.5 Ga
f) 5.1 Ga

Question 9

On se munit d'un ressort de longueur 1 m au repos et de masse négligeable, et d'un objet de masse 1 kg. Sur Terre, on suspend le ressort et on y accroche la masse. Le ressort s'allonge d'1 m. Si l'on déplaçait l'expérience sur la Lune et qu'on faisait osciller le système verticalement, quelle serait la période d'oscillation ? L'accélération de pesanteur sur la Lune vaut $1.6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) $0.3\,\mathrm{s}$ b) $2.0\,\mathrm{s}$ c) $5.0\,\mathrm{s}$ d) $6.1\,\mathrm{s}$ e) $12.3\,\mathrm{s}$

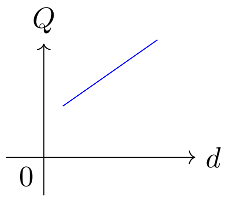
Question 10

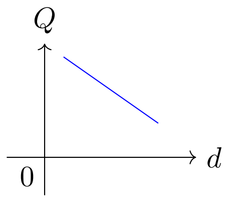
On dispose d'un cylindre de rayon r et de hauteur l, ainsi que d'un récipient cylindrique de rayon $2r$ et de hauteur $2l$ rempli à moitié d'un fluide de masse volumique ρ. On plonge le cylindre verticalement dans le fluide. A l'équilibre, le niveau du fluide est monté de $\frac{l}{6}$. Quelle est la masse volumique du cylindre ?

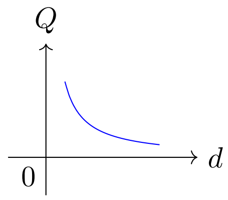
a) $\frac{2}{3}\rho$ b) $\frac{3}{4}\rho$ c) $\frac{4}{5}\rho$ d) $\frac{5}{6}\rho$ e) ρ

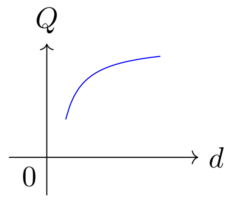
Question 11

Les armatures d'un condensateur plan sont branchées à une pile électrique. Quel diagramme représente le mieux l'évolution de la charge Q emmagasinée dans l'armature positive du condensateur si l'on fait varier la distance d entre les armatures ?

a)


b)


c)


d)


Question 12

Quelle est la meilleure approximation polynomiale de $\sin(x)$ d'ordre 3 autour du point $-\frac{\pi}{2}$?

a) $x - \frac{x^3}{6}$
b) $x + \frac{x^3}{6}$
c) $\sin(x)$
d) $\frac{\pi^2}{8} - 1 + \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{2}$
e) $-1 + x^3$
f) -1

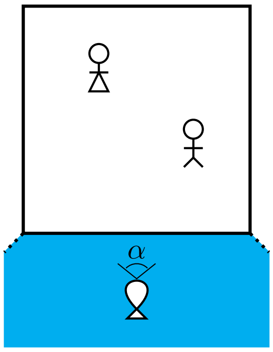
Question 13

On se munit d'une lentille mince convexe de longueur focale f. A quelle distance de la lentille faut-il placer un objet pour obtenir une image réelle droite ?

a) $\frac{f}{2}$
b) f
c) $\frac{3f}{2}$
d) $2f$
e) $\frac{5f}{2}$
f) Aucune de ces réponses.

Question 14

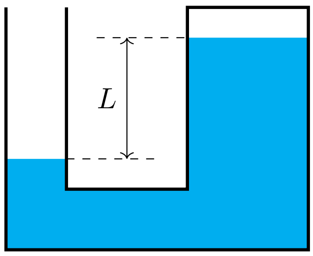
Au zoo, les visiteurs se trouvent dans une salle carrée. L'un des côtés de la salle est en fait la vitre d'un aquarium rempli d'eau ($n = 1.333$). Depuis cet aquarium, un poisson observe la salle. Il se tient proche de la vitre de l'aquarium, à égale distance des murs latéraux de la pièce. Sous quel angle α voit-il l'entier la pièce ? Négligez l'influence de la vitre de l'aquarium.



a) 0° b) 78° c) 90° d) 97° e) 111° f) 180°

Question 15

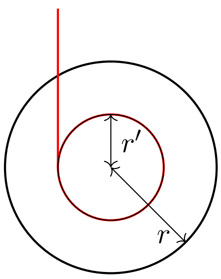
Le schéma ci-contre représente un récipient contenant de l'eau. La partie de gauche est ouverte en haut dans l'atmosphère (conditions de pression et de température normales). La partie de droite est fermée en haut, le vide règne au-dessus de la surface de l'eau. A l'équilibre, que vaut L ? Négligez la capillarité.



a) 1 m
b) 2 m
c) 4 m
d) 10 m
e) 12 m
f) Aucune de ces réponses.

Question 16

On considère un yoyo de masse m, rayon r et moment d'inertie $\frac{1}{2}mr^2$. La ficelle du yoyo est enroulée autour d'un rayon intérieur $r' = r/2$. On lâche le yoyo tout en tenant la ficelle fixe par son extrémité. Quel est le rapport $E_{\text{rot.}}/E_{\text{trans.}}$ entre les énergies cinétiques de rotation et de translation lorsque le yoyo roule vers le bas ?



a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e) 2

Question 17

On maintient initialement un proton et un électron à une distance de 1 m l'un de l'autre. On les libère simultanément. Quelles seront leurs accélérations initiales respectives ?

a) $a_\mathrm{e} = 253\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $a_\mathrm{p} = 0.138\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, l'un à l'opposé de l'autre
b) $a_\mathrm{e} = 253\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $a_\mathrm{p} = 0.138\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, l'un vers l'autre
c) $a_\mathrm{e} = a_\mathrm{p} = 2.307 \times 10^{-28}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, l'un à l'opposé de l'autre
d) $a_\mathrm{e} = a_\mathrm{p} = 2.307 \times 10^{-28}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, l'un vers l'autre
e) $a_\mathrm{e} = 2.82 \times 10^{-8}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $a_\mathrm{p} = 1.53 \times 10^{-11}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, l'un à l'opposé de l'autre
f) $a_\mathrm{e} = 2.82 \times 10^{-8}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $a_\mathrm{p} = 1.53 \times 10^{-11}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, l'un vers l'autre

Question 18

Quelle est l'ordre de grandeur du nombre de molécules contenues dans un verre d'eau ?

a) 10^{25} b) 10^{28} c) 10^{31} d) 10^{34} e) 10^{37}

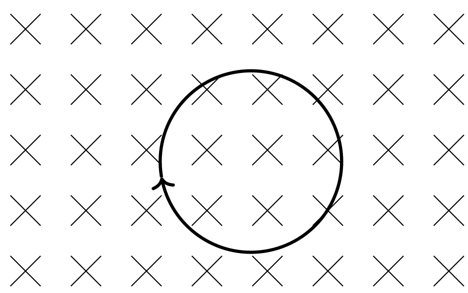
Question 19

Je suis immobile. Un véhicule s'approche à très haute vitesse. Il émet un son que je perçois à la fréquence du la naturel. Après son passage, le véhicule s'éloigne, toujours à la même vitesse. Le même son est désormais perçu une octave plus basse. Quelle est la vitesse du véhicule ? Le son se propage dans l'air à $343\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) $172\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
b) $309\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
c) $343\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
d) $412\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
e) $617\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

Question 20

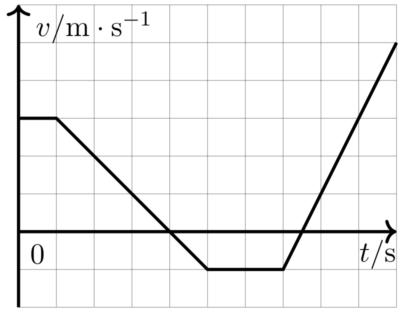
Quelle particule est représentée par la trajectoire dans le champ magnétique uniforme ci-contre ?



a) Un proton.
b) Un antimuon.
c) Un électron.
d) Un photon.
e) Un neutron.

Question 21

Le diagramme ci-contre représente la vitesse d'un véhicule au cours du temps. Quelle affirmation est fausse ?



a) La position du véhicule à $t = 5\,\mathrm{s}$ est la même qu'à $t = 9\,\mathrm{s}$.

b) Entre $t = 0\,\mathrm{s}$ et $t = 6\,\mathrm{s}$, la vitesse moyenne est de $1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

c) La distance entre les positions initiale et finale mesure $11\,\mathrm{m}$.

d) Entre $t = 5\,\mathrm{s}$ et $t = 7\,\mathrm{s}$, le véhicule est à l'arrêt.

e) A $t = 2\,\mathrm{s}$, le véhicule décélère.

Question 22

La centrale nucléaire de Mühleberg, qui a été débranchée le 20 décembre dernier, avait une production annuelle d'électricité de $3\,\mathrm{TWh}$. Elle était refroidie directement par l'eau de l'Aar (rivière de $150\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$ de débit), sans tour de refroidissement. Ce faisant, l'eau en sortie était réchauffée d'environ $3\,°\mathrm{C}$. Les centrales nucléaires ont communément un rendement d'environ 33%. En admettant que les quatre cinquièmes des pertes d'énergie étaient évacués dans l'eau de l'Aar, quel pourcentage du débit de cette rivière passait par le système de refroidissement ? La capacité thermique massique de l'eau dans les conditions normales de température et de pression vaut $4185.5\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

a) 8%   b) 12%   c) 25%   d) 30%   e) 33%

Multiple choice : solutions

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Question 1	□	□	■	□		
Question 2	■	□	□	□	□	□
Question 3	■	□	□	□	□	
Question 4	■	□	□	□	□	
Question 5	□	□	■	□		
Question 6	□	□	■	□	□	□
Question 7	□	□	■	□		
Question 8	□	□	□	■	□	□
Question 9	□	■	□	□	□	
Question 10	■	□	□	□	□	
Question 11	□	□	■	□		
Question 12	□	□	□	■	□	□
Question 13	□	□	□	□	□	■
Question 14	□	□	□	■	□	□
Question 15	□	□	□	■	□	□
Question 16	□	□	□	□	■	
Question 17	□	■	□	□	□	□
Question 18	■	□	□	□	□	
Question 19	□	□	□	■	□	
Question 20	□	□	■	□	□	
Question 21	□	□	□	■	□	
Question 22	□	□	□	■	□	

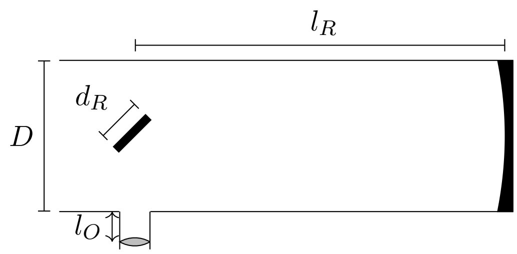
Problèmes théoriques

Durée : 120 minutes
Cotation : 48 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

Problème 1 : Télescope *(16 points)*

Observez le schéma ci-dessous qui représente un télescope réflecteur utilisant une lentille comme oculaire. L'esquisse n'est pas à l'échelle.



Ce télescope a une longueur totale de $L = 2\,\text{m}$ et le diamètre de l'ouverture, comme celui du miroir parabolique, mesure $D = 50\,\text{cm}$. A l'intérieur du télescope se trouve un miroir secondaire plan de diamètre $d_R = 9\,\text{cm}$. Ce miroir secondaire se trouve à une distance $l_R = 1.8\,\text{m}$ du miroir parabolique et est incliné à 45°. L'oculaire, de diamètre $d_O = 1\,\text{cm}$, se trouve à une distance variable l_O à l'extérieur du bâti, de façon à ce qu'une image nette se forme. La distance focale du miroir parabolique mesure $f_P = 2.1\,\text{m}$ et celle de l'oculaire $f_O = 3\,\text{cm}$.

Partie A. Optique géométrique *(8.75 points)*

i. (1 P.) Esquissez le trajet des rayons de lumière provenant d'une étoile très éloignée et traversant le télescope. Utilisez une feuille de papier séparée.

ii. (1.75 P.) A quelle distance l_O doit-on placer l'oculaire de façon à ce que les rayons provenant d'une étoile très lointaine soient parallèles après l'oculaire ?

iii. (1.5 P.) Déterminez le grossissement du télescope.

iv. (2.5 P.) Un système binaire de deux étoiles se trouve à une distance $l = 15\,\text{ly}$. Quelle doit être la distance d entre les deux étoiles de façon à ce que l'on puisse tout juste les distinguer l'une de l'autre ?

v. (2 P.) Quelle distance d'oculaire l'_O doit-on choisir si l'on veut projeter une image nette du Soleil ($D_S \approx 1.4 \times 10^9\,\text{m}$) sur un capteur CCD derrière l'oculaire, et que cette image ait une taille de 1 cm ?

Partie B. Optique ondulatoire *(7.25 points)*

Le spectre électromagnétique d'une étoile contient beaucoup d'informations sur elle, de sa vitesse relative à l'intensité de son champ magnétique en passant par sa composition atomique. C'est pourquoi l'on équipe des télescopes (comme celui-ci) d'un spectromètre.

i. (1 P.) Tracez une esquisse commentée d'un spectromètre permettant de réaliser une telle mesure. Utilisez pour ce faire un réseau de diffraction en réflexion comportant $n = 1000$ lignes par mm.

ii. (1.25 P.) Sous quel angle peut-on observer le premier maximum de la raie rouge H-α (656.281 nm) ? Pour simplifier, on admet que la lumière frappe le réseau perpendiculairement.

iii. (2.5 P.) Le champ magnétique d'une étoile peut se manifester dans la séparation en deux de cette raie spectrale. Pour la raie H-α, quelle est la séparation absolue la plus petite que l'on puisse mesurer ?

iv. (2.5 P.) Dans ce but, à quelle distance minimale doit-on placer un photodétecteur, sachant que sa résolution est limitée à 0.6 mm ?
Indication :

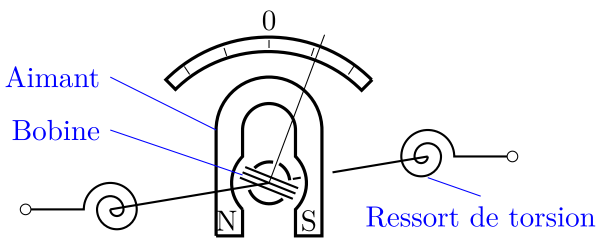
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Problème 2 : Mesures électriques *(16 points)*

Dans cet exercice, nous allons étudier différents aspects des instruments de mesure électrique.

Partie A. Galvanomètre *(5 points)*

La figure ci-dessous représente un galvanomètre à cadre mobile, également appelé galvanomètre magnéto-électrique ou galvanomètre d'Arsonval-Weston.



i. (0.5 P.) Que mesure un galvanomètre ?

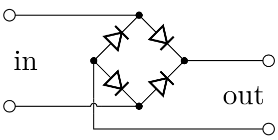
ii. (2 P.) Expliquez le fonctionnement du galvanomètre représenté ci-dessus.

iii. (1.5 P.) Pourquoi la partie centrale de l'aimant a-t-elle une forme circulaire ? Pensez à la forme du champ magnétique.

iv. (1 P.) Pourquoi ne peut-on pas utiliser ce galvanomètre dans un circuit AC ?

Partie B. Pont de diodes *(5 points)*

Pour remédier à ce problème, on peut intercaler le pont de diodes suivant dans le circuit :



On admet que les diodes sont idéales et ont une tension de seuil nulle.

i. (1 P.) Esquissez ou décrivez le courant passant à travers une diode en fonction de la tension à ses bornes.

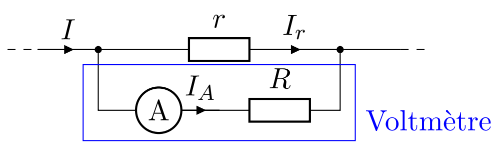
On applique une tension oscillante $U_{\text{in}}(t) = U_0 \sin(\omega t)$ aux bornes d'entrée du pont.

ii. (1.5 P.) Expliquez le parcours du courant dans le pont au minimum et au maximum de la tension d'entrée U_{in}. Esquissez la tension en sortie $U_{\text{out}}(t)$.

iii. (2.5 P.) Qu'apporte le pont de diodes ? Calculez la valeur moyenne $\bar{U}_{\text{out}}$ de la tension en sortie puis trouvez une valeur numérique en prenant $U_0 = 5.0\,\text{V}$.

Partie C. Voltmètre *(4 points)*

Une façon de construire un voltmètre est de connecter en série un ampèremètre (par hypothèse, sans résistance interne) et une résistance R. Le diagramme ci-dessous représente ce montage, lorsque l'on souhaite mesurer la tension aux bornes d'un élément de résistance r.



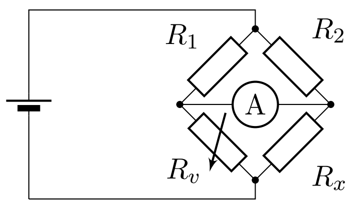
i. (0.25 P.) Calculez la tension aux bornes de l'élément en fonction de la résistance R et du courant I_A mesuré dans l'ampèremètre.

ii. (1.75 P.) Le courant qui entre dans le système vaut I. Calculez le courant I_r passant dans l'élément en fonction de I, r et R.

iii. (2 P.) On souhaite minimiser les perturbations induites par le voltmètre sur le système. Comment doit-on choisir R et quelle incidence cela a-t-il sur l'ampèremètre ?

Partie D. Pont de Wheatstone *(2 points)*

Une façon de mesurer les résistances est d'utiliser un montage appelé pont de Wheatstone :

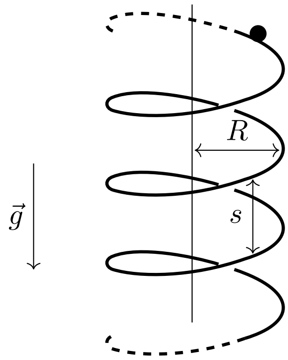


Pour calculer la résistance inconnue R_x, on fait varier R_v jusqu'à ce que l'ampèremètre indique zéro.

i. (2 P.) Dans cette condition, calculez R_x en fonction de R_1, R_2 et R_v. Expliquez votre raisonnement.

Problème 3 : Piste hélicoïdale *(16 points)*

Considérons une piste hélicoïdale (en forme de colimaçon). L'axe de l'hélice est vertical, son rayon R (la distance horizontale de chaque point de la piste à l'axe) est constant. La pente de la piste est également constante et telle que la distance verticale entre deux spires (distance que l'on appelle le « pas » de l'hélice) vaut s.



On étudie le mouvement d'une bille de masse m qui roule sur la piste. On repère la position de la bille sur l'hélice par sa distance $l(t)$ le long de la piste depuis sa position initiale.

Partie A. Un point matériel sur une ligne matérielle *(7 points)*

Dans un premier temps, on considère que la piste est infiniment étroite et la bille un point matériel qui se déplace sans frottement et sans quitter la piste.

i. (1 P.) Quelle est la longueur L d'une spire, c'est-à-dire la distance parcourue par la bille lorsqu'elle se retrouve pour la première fois à la verticale de sa position initiale si on la laisse rouler ?

ii. (1 P.) Quel angle α la piste fait-elle avec l'horizontale ?

iii. (1 P.) Dessinez les forces qui agissent sur la bille dans le réferentiel de votre choix.

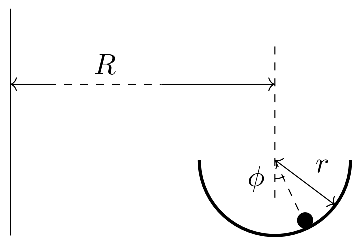
iv. (1.5 P.) Calculez l'accélération tangentielle à la piste $a(t)$ de la bille en fonction du temps.

v. (0.5 P.) On laisse rouler la bille le long de l'hélice en lui imprimant une vitesse initiale v_0 (tangentielle à la piste). Calculez la position $l(t)$ de la bille en fonction du temps.

vi. (2 P.) Si cette vitesse initiale est dirigée dans le sens **ascendant** de l'hélice, après quel temps τ la bille repassera-t-elle par sa position initiale ? Trouvez une valeur numérique pour τ en posant $R = s = 20\,\mathrm{cm}$ et $v_0 = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Partie B. Comme un toboggan *(9 points)*

Nous considérons maintenant que la piste a une section en demi-cercle de rayon r, les deux rebords étant à la même hauteur. La bille est elle toujours considérée comme un point matériel qui se déplace sans frottement. On repère la position de la bille sur la piste par l'angle $\phi(t)$ (pris dans le plan vertical contenant l'axe de l'hélice) et par la distance $l(t)$ depuis sa position initiale, mesurée le long du fond de la piste (où $\phi = 0$).



i. (5 P.) Trouvez une équation qui relie les grandeurs $\phi(t)$, R, r, s, $l(t)$ et L si la bille a initialement $v_0 = 0$ et $\phi_0 = 0$. Aucune autre variable que ces six ne doit apparaître dans l'équation. **Il n'est pas demandé de résoudre cette équation.**

ii. (1 P.) La bille va-t-elle sauter hors de la piste ?

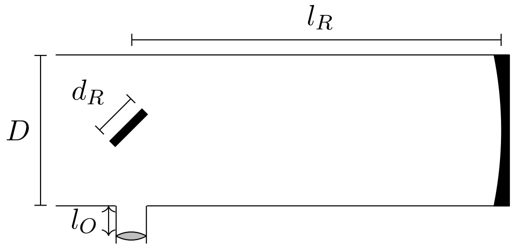
iii. (2 P.) Comment cette équation se simplifie-t-elle si l'on pose $R \gg r$?

iv. (1 P.) Donnez la valeur numérique de $\phi(t)$ lorsque la bille a parcouru 5 spires (avec $R = 10\,\mathrm{m}$, $r = 2\,\mathrm{cm}$ et $s = 2\,\mathrm{m}$).

Problèmes théoriques : solutions

Problème 1 : Télescope *(16 points)*

Observez le schéma ci-dessous qui représente un télescope réflecteur utilisant une lentille comme oculaire. L'esquisse n'est pas à l'échelle.



Ce télescope a une longueur totale de $L = 2\,\mathrm{m}$ et le diamètre de l'ouverture, comme celui du miroir parabolique, mesure $D = 50\,\mathrm{cm}$. A l'intérieur du télescope se trouve un miroir secondaire plan de diamètre $d_R = 9\,\mathrm{cm}$. Ce miroir secondaire se trouve à une distance $l_R = 1.8\,\mathrm{m}$ du miroir parabolique et est incliné à 45°. L'oculaire, de diamètre $d_O = 1\,\mathrm{cm}$, se trouve à une distance variable l_O à l'extérieur du bâti, de façon à ce qu'une image nette se forme. La distance focale du miroir parabolique mesure $f_P = 2.1\,\mathrm{m}$ et celle de l'oculaire $f_O = 3\,\mathrm{cm}$.

Partie A. Optique géométrique *(8.75 points)*

i. (1 P.) Esquissez le trajet des rayons de lumière provenant d'une étoile très éloignée et traversant le télescope. Utilisez une feuille de papier séparée.

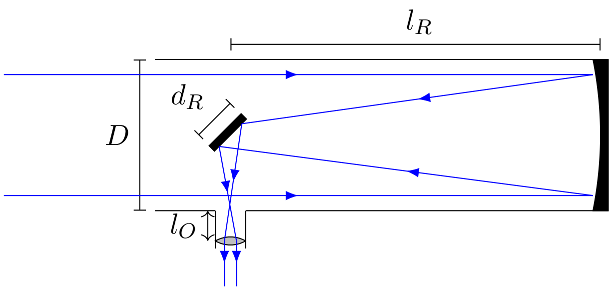
[0.25 P.] Quasi Parallele Strahlen vom Stern vor dem Spiegel

[0.25 P.] Konvergierende Strahlen nach Parabolspiegel

[0.25 P.] Strahlen kreuzen sich nach Planarspiegel, vor Okular

[0.25 P.] Strahlen quasi parallel nach Okular

Kein Abzug, falls Strahlen im schematischen Aufbau skizziert, dies so klar deklariert und Aufgabenblatt klar mit diesen Lösungen abgegeben wird. Der Skizze muss nicht nachgerennt werden. Strahlen können mit Lineal oder freihand gezogen werden, wichtig ist, dass die Skizze soweit klar ist.



ii. (1.75 P.) A quelle distance l_O doit-on placer l'oculaire de façon à ce que les rayons provenant d'une étoile très lointaine soient parallèles après l'oculaire ?

[0.75 P.] Damit müssen die Brennpunkte aufeinander liegen.

[0.25 P.] Daher :

$$f_P + f_O = l_R + \frac{1}{2}D + l_O$$

[0.25 P.] Somit :

$$l_O = f_P + f_O - l_R - \frac{1}{2}D$$

[0.5 P.] Numerisch :

$$l_O = 8\,\mathrm{cm}$$

Wenn jemand das Ganze versteht, kann das Endresultat direkt im Kopf berechnet werden. Dies gibt auch volle Punktzahl.

iii. (1.5 P.) Déterminez le grossissement du télescope.

[1 P.] Die (Winkel-)Vergrösserung für ein Teleskop (afokal) ist definiert als :

$$M = \frac{f_P}{f_O}$$

[0.5 P.] Numerisch :

$$M = 70$$

Ein negatives Vorzeichen wird erlaubt, es hängt vom gewählten Koordinatensystem nach dem Sekundärspiegel ab.

iv. (2.5 P.) Un système binaire de deux étoiles se trouve à une distance $l = 15\,\mathrm{ly}$. Quelle doit être la distance d entre les deux étoiles de façon à ce que l'on puisse tout juste les distinguer l'une de l'autre ?

[0.75 P.] Winkelauflösung

$$\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$

[0.75 P.] Verwende $\tan\theta \approx \theta$ for $\theta \ll 1$:

$$\frac{d}{l} \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$
$$d \approx 1.22\frac{\lambda l}{D}$$

[0.5 P.] Für λ muss eine sinnvolle Wellenlänge angenommen werden : $\lambda \approx 500\,\mathrm{nm}$

[0.5 P.] Damit der numerische Wert : (genauer Wert hängt vom angenommenen λ ab) (keine bevorzügte Einheit)

$$d \approx 1.2\,\mathrm{au} \approx 1.7 \times 10^8\,\mathrm{km}$$

v. (2 P.) Quelle distance d'oculaire l'_O doit-on choisir si l'on veut projeter une image nette du Soleil ($D_S \approx 1.4 \times 10^9\,\mathrm{m}$) sur un capteur CCD derrière l'oculaire, et que cette image ait une taille de $1\,\mathrm{cm}$?

[0.5 P.] Für die Distanz l' zwischen reelem Bild des Parabolspiegels und Okular muss gelten :

$$B' = \frac{f_O}{f_O - l'} B_1 = \frac{f_O}{f_O - l'} \frac{f_P}{f_P - l_0} D_S$$

[0.5 P.] und somit :

$$\begin{aligned} f_O - l' &= f_O \frac{f_P}{f_P - l_0} \frac{D_S}{B'} \\ l' &= f_O \left(1 + \frac{f_P}{l_0 - f_P} \frac{D_S}{B'}\right) \end{aligned}$$

[0.5 P.] und daraus :

$$\begin{aligned} l_R + \frac{1}{2} D + l'_O &= l' + l_1 \\ l'_O &= f_O \left(1 + \frac{f_P}{l_0 - f_P} \frac{D_S}{B'}\right) + f_P \frac{l_0}{l_0 - f_P} - l_R - \frac{1}{2} D \end{aligned}$$

[0.5 P.] Durch einsetzen der Zahlen ($l_0 = 1\,\mathrm{au}$) :

$$l'_O = 14\,\mathrm{cm}$$

Partie B. Optique ondulatoire *(7.25 points)*

Le spectre électromagnétique d'une étoile contient beaucoup d'informations sur elle, de sa vitesse relative à l'intensité de son champ magnétique en passant par sa composition atomique. C'est pourquoi l'on équipe des télescopes (comme celui-ci) d'un spectromètre.

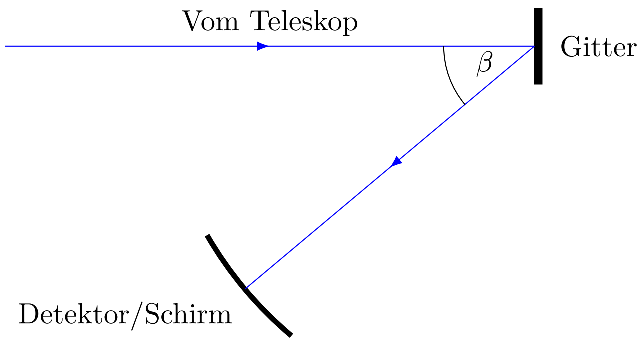
i. (1 P.) Tracez une esquisse commentée d'un spectromètre permettant de réaliser une telle mesure. Utilisez pour ce faire un réseau de diffraction en réflexion comportant $n = 1000$ lignes par mm.

[0.25 P.] Gitter klar und richtig

[0.25 P.] Strahlweg klar und richtig

[0.25 P.] Schirm/Detektor klar und richtig

[0.25 P.] Sinnvoll beschriftet



ii. (1.25 P.) Sous quel angle peut-on observer le premier maximum de la raie rouge H-α (656.281 nm) ? Pour simplifier, on admet que la lumière frappe le réseau perpendiculairement.

[0.75 P.] Konstruktive Interferenz für

$$\sin\beta = \lambda n$$
$$\beta = \arcsin(\lambda n)$$

[0.5 P.] Und der numerische Wert :

$$\beta = 41.017°$$

iii. (2.5 P.) Le champ magnétique d'une étoile peut se manifester dans la séparation en deux de cette raie spectrale. Pour la raie H-α, quelle est la séparation absolue la plus petite que l'on puisse mesurer ?

[0.75 P.] Die relative Auflösung ergibt sich aus :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N}$$

wobei N die Anzahl bestrahlte Linien sind.

[0.5 P.] Bei parallel ausfallenden Strahlen aus dem Okular werden insgesamt

$$N = d_O n$$

Linien bestrahlt. Das ist zwar nur eine Näherung aber gibt doch die richtige Grössenordnung.

[0.25 P.] Damit ist

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{d_O n}$$

[0.5 P.] Und es folgt die absolute Auflösung und die H-α

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{d_O n}$$

[0.5 P.] und numerisch :

$$\delta\lambda = 0.07\,\text{nm}$$

iv. (2.5 P.) Dans ce but, à quelle distance minimale doit-on placer un photodétecteur, sachant que sa résolution est limitée à $0.6\,\text{mm}$?
Indication :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[0.5 P.] Die oben berechnete Auflösung $\delta\lambda$ entspricht einer Winkelauflösung von

$$\delta\beta = \frac{\partial\beta}{\partial\lambda}\delta\lambda$$

[0.5 P.] Damit

$$\begin{aligned}\delta\beta &= \delta\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\arcsin(\lambda n)\\ &= \delta\lambda\frac{n}{\sqrt{1-(n\lambda)^2}}\end{aligned}$$

Dabei wird der Zusammenhang aus B.ii verwendet.

[0.5 P.] Bei bekannter Positionsauflösung entspricht dies einem Radius von

$$R = \frac{\delta x}{\delta\beta}$$

[0.5 P.]

$$\begin{aligned}R &= \frac{\sqrt{1-(n\lambda)^2}}{n}\frac{\delta x}{\delta\lambda}\\ &= \sqrt{1-(n\lambda)^2}\frac{d_o}{\lambda}\delta x\end{aligned}$$

[0.5 P.] und numerisch :

$$R = 6.9\,\text{m}$$

[-1 P.] Die Näherung $\sin x \approx x$ ist hier nicht zulässig, da wir deutlich weg von einer Nullstelle sind. Dieser Fehler vereinfacht die nachfolgenden Rechnungen, sodass 1P anstatt nur 0.5P abgezogen werden.

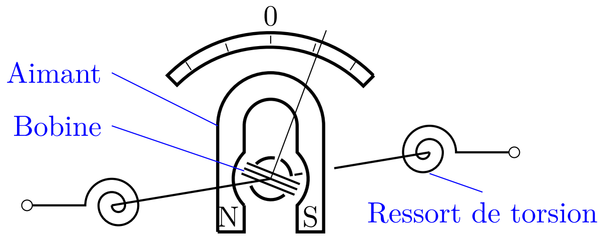
Allenfalls kann man auch zwei konkrete Winkel für die Berechnung verwendet und ein korrektes Resultat erhalten werden. Dies (wenn komplet richtig) wird mit der vollen Punktzahl bewertet.

Problème 2 : Mesures électriques *(16 points)*

Dans cet exercice, nous allons étudier différents aspects des instruments de mesure électrique.

Partie A. Galvanomètre *(5 points)*

La figure ci-dessous représente un galvanomètre à cadre mobile, également appelé galvanomètre magnéto-électrique ou galvanomètre d'Arsonval-Weston.



i. (0.5 P.) Que mesure un galvanomètre ?

[0.5 P.] Ein Galvanometer ist ein analoges Ampèremeter, das heisst es misst den Strom.

ii. (2 P.) Expliquez le fonctionnement du galvanomètre représenté ci-dessus.

[1 P.] Wenn ein Strom durch die Spule fliesst, übt der Magnet ein Paar Biot-Savart-/Lorentz-/Laplacekräfte auf die Spule aus, was ein Drehmoment auf die Spule/Zeiger erzeugt.

Alternative Beschreibung : Wenn ein Strom durch die Spule fliesst, entsteht ein magnetisches Feld (Oerstedsche Gesetz) (0.5 Punkt). Das magnetische Feld interagiert mit dem Feld des Permanentmagnetens, was ein Drehmoment auf die Spule/Zeiger erzeugt (0.5 Punkt).
[0.5 P.] Die Torsionsfedern gleichen das Drehmoment aus.

[0.5 P.] Im Gleichgewicht (konstanter Strom) hat der Zeiger ein fixe Auslenkung. Der Zeiger bestimmt den Wert des Stromes auf einer kalibrierten Skala.

iii. (1.5 P.) Pourquoi la partie centrale de l'aimant a-t-elle une forme circulaire ? Pensez à la forme du champ magnétique.

[0.5 P.] Somit ist das Magnetfeld radialsymmetrisch, und das Drehmoment des Magnetfeldes (linear zum Strom wegen Biot-Savart-/Lorentz-/Laplacekraft), unabhängig von der Winkelauslenkung.

[0.5 P.] Das Drehmoment der Torsionsfedern ist linear zur Winkelauslenkung.

[0.5 P.] Damit ist mit einem kreisförmigen Magnet die Auslenkung des Zeigers linear im Strom. Dies vereinfacht die Kalibration.

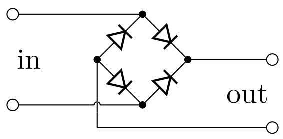
Wir können 0.5 Punkte geben für eine korrekte Zeichnung des Magnetfeldes (das Total der Frage sollte aber bei maximal 1.5 Punkte liegen).

iv. (1 P.) Pourquoi ne peut-on pas utiliser ce galvanomètre dans un circuit AC ?

[1 P.] Der Strom wechselt die Richtung und somit das induzierte Magnetfeld auch. Der Zeiger steht damit bei 0 (ein solches Instrument ist nicht sensitiv genug um den schnellen Änderungen des Stromes zu folgen).

Partie B. Pont de diodes *(5 points)*

Pour remédier à ce problème, on peut intercaler le pont de diodes suivant dans le circuit :

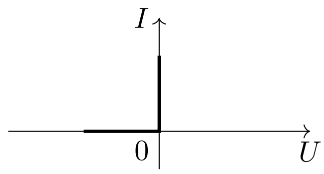


On admet que les diodes sont idéales et ont une tension de seuil nulle.

i. (1 P.) Esquissez ou décrivez le courant passant à travers une diode en fonction de la tension à ses bornes.

Falls skizziert :
[0.5 P.] Achsen beschriftet.

[0.5 P.] 0 für negative Spannung, unendliche für positive Spannung.



Falls beschrieben : 0.5 Punkt dafür, dass null Strom (oder, äquivalent dazu, unendlicher Widerstand) bei negativer Spannung, 0.5 Punkt dafür, dass unendlicher Strom (oder äquivalent dazu, null Widerstand) bei positiver Spannung.
Falls Skizze und Beschreibung vorhanden sind, können respektive Punkte aufsummiert werden, aber die Summe darf maximal ein voller Punkt sein.
On applique une tension oscillante $U_{\mathbf{in}}(t) = U_0 \sin(\omega t)$ aux bornes d'entrée du pont.

ii. (1.5 P.) Expliquez le parcours du courant dans le pont au minimum et au maximum de la tension d'entrée $U_{\mathbf{in}}$. Esquissez la tension en sortie $U_{\mathbf{out}}(t)$.

Die Eingangsspannung sei die Spannung des oberen Eingang minus die des unteren Eingangs.
[0.25 P.] Bei maximaler Eingangsspannung kann der Strom vom oberen Eingang nur durch die Diode oben rechts durchfliessen. Ebenso kann der Strom nur durch die Diode unten links in den unteren Eingang fliessen. Kein Strom fliesst durch die anderen beiden Dioden.

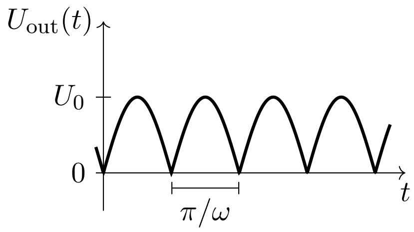
[0.25 P.] Bei minimaler Spannung (negative) kann der Strom vom unteren Eingang nur durch die Diode unten rechts fliessen. Ebenso kann der Strom nur in den oberen Eingang durch die Diode oben links fliessen. Kein Strom fliesst durch die anderen Dioden.

[0.5 P.] Achsen beschriftet ; ω, U_0 und 0 Spannung vorhanden.

[0.5 P.] Die Figur sollte mehr oder weniger aussehen wie :

$$U_0 \left|\sin(\omega t)\right|$$

(Die nächste Teilaufgabe erklärt, wie man zu dieser Formel kommt.)



iii. (2.5 P.) Qu'apporte le pont de diodes ? Calculez la valeur moyenne $\bar{U}_{\text{out}}$ de la tension en sortie puis trouvez une valeur numérique en prenant $U_0 = 5.0\,\text{V}$.

[0.5 P.] Den zwei ersten Teilaufgaben nach wird die Ausgangsspannung beitragsmässig immer gleich der Eingangsspannung sein. Der obere Ausgang wird aber immer die höhere Spannung haben. Das heisst, dass die Ausgangsspannung ist (angenommen, U_0 ist positiv) :

$$U_0\,|\sin(\omega t)|$$

[0.5 P.] Die Diodenbrücke ist nützlich, da die Ausgangsspannung positiv bleibt. Deswegen wir die Wechselstrom zu einem Gleichstrom. Die Brücke agiert als ein Gleichrichter.

[0.5 P.] Dieser Mittelwert ist der Durschnitt von $U_{\text{out}}(t)$ über $\frac{\pi}{\omega}$ (das ist die Periode von $|\sin(\omega t)|$ respektive die halbe Periode von $\sin(\omega t)$).

[0.5 P.]

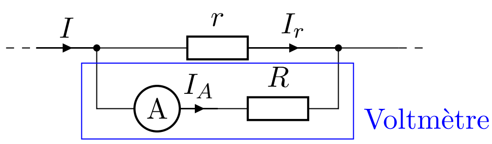
$$\begin{aligned}\bar{U}_{\text{out}} &= U_0\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= U_0\frac{\omega}{\pi}\left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= U_0\frac{1}{\pi}\left(-(-1)+1\right) \\ &= \frac{2}{\pi}U_0\end{aligned}$$

[0.5 P.] Numerisch :

$$\bar{U}_{\text{out}} \approx 3.2\,\text{V}$$

Partie C. Voltmètre *(4 points)*

Une façon de construire un voltmètre est de connecter en série un ampèremètre (par hypothèse, sans résistance interne) et une résistance R. Le diagramme ci-dessous représente ce montage, lorsque l'on souhaite mesurer la tension aux bornes d'un élément de résistance r.



i. (0.25 P.) Calculez la tension aux bornes de l'élément en fonction de la résistance R et du courant I_A mesuré dans l'ampèremètre.

[0.25 P.] Ohm'sches Gesetz.

$$U = RI_A$$

ii. (1.75 P.) Le courant qui entre dans le système vaut I. Calculez le courant I_r passant dans l'élément en fonction de I, r et R.

[0.5 P.] Ohm'sches Gesetz über dem Element :

$$U = rI_r$$

[0.5 P.] Zweites Kirchhoff'sches Gesetz :

$$I = I_A + I_r$$

[0.75 P.] Somit :

$$\begin{aligned} I_r &= I - I_A \\ &= I - \frac{U}{R} \\ &= I - \frac{r}{R} I_r \end{aligned}$$

Umgeformt :

$$I_r = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} I$$

(Jede algebraische Umformung, welche zum korrekten Ergebnis führt gibt 0.75 Punkte. Man muss nicht genau den obigen Schritten folgen.)

iii. (2 P.) On souhaite minimiser les perturbations induites par le voltmètre sur le système. Comment doit-on choisir R et quelle incidence cela a-t-il sur l'ampèremètre ?

[0.25 P.] Wir wollen I_r möglichst nahe an I haben.

[0.75 P.] Deswegen wählen wir $R \gg r$.

[0.25 P.] Aber : (Ohm'sches Gesetz bei fixem U)

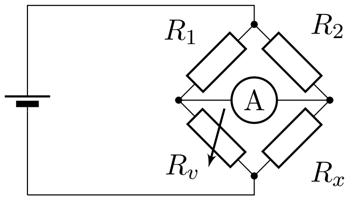
$$I_A \propto \frac{1}{R}$$

I_A wird sehr klein, falls R gross wird.

[0.75 P.] Also brauchen wir ein hochsensibles Ampèremeter.

Partie D. Pont de Wheatstone *(2 points)*

Une façon de mesurer les résistances est d'utiliser un montage appelé pont de Wheatstone :



Pour calculer la résistance inconnue R_x, on fait varier R_v jusqu'à ce que l'ampèremètre indique zéro.

i. (2 P.) Dans cette condition, calculez R_x en fonction de R_1, R_2 et R_v. Expliquez votre raisonnement.

[0.5 P.] Das Ampèremeter zeigt null an, wenn kein Strom durchfliesst. Dies bedeutet es ist keine Spannung über dem Ampèremeter.

[0.5 P.] Damit haben wir :

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

[0.5 P.] Und :

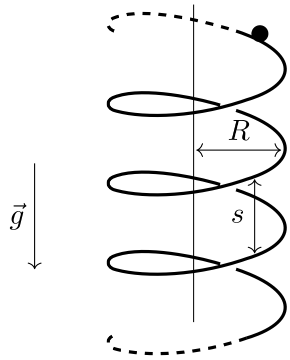
$$I_1 R_v = I_2 R_x$$

[0.5 P.] Schlussendlich :

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{I_1}{I_2} R_v \\ &= \frac{R_2}{R_1} R_v \end{aligned}$$

Problème 3 : Piste hélicoïdale *(16 points)*

Considérons une piste hélicoïdale (en forme de colimaçon). L'axe de l'hélice est vertical, son rayon R (la distance horizontale de chaque point de la piste à l'axe) est constant. La pente de la piste est également constante et telle que la distance verticale entre deux spires (distance que l'on appelle le « pas » de l'hélice) vaut s.



On étudie le mouvement d'une bille de masse m qui roule sur la piste. On repère la position de la bille sur l'hélice par sa distance $l(t)$ le long de la piste depuis sa position initiale.

Partie A. Un point matériel sur une ligne matérielle *(7 points)*

Dans un premier temps, on considère que la piste est infiniment étroite et la bille un point matériel qui se déplace sans frottement et sans quitter la piste.

i. (1 P.) Quelle est la longueur L d'une spire, c'est-à-dire la distance parcourue par la bille lorsqu'elle se retrouve pour la première fois à la verticale de sa position initiale si on la laisse rouler ?

[1 P.] One can 'unroll' the helix and use the Pythagorean theorem :

$$L = \sqrt{(2\pi R)^2 + s^2}$$

ii. (1 P.) Quel angle α la piste fait-elle avec l'horizontale ?

[0.5 P.] Again by unrolling :

$$\tan(\alpha) = \frac{s}{2\pi R}$$

[0.5 P.] And thus :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{s}{2\pi R}\right)$$

iii. (1 P.) Dessinez les forces qui agissent sur la bille dans le réferentiel de votre choix.

The forces are the gravity, the normal force from the ramp. The normal force is not vertical, there is a component in the radial direction towards the center. Alternatively the students can also break the normal force into its vertical and radial component.

[0.25 P.] Referential (origin and axes labelled)

[0.25 P.] Gravity

[0.25 P.] Normal force (or both its projections)

[0.25 P.] Correct drawing of the forces in the referential

iv. (1.5 P.) Calculez l'accélération tangentielle à la piste $a(t)$ de la bille en fonction du temps.

[0.5 P.] The tangential acceleration is constant.

[0.5 P.] And, as there is no friction, it is given by projecting $\vec{g}$ onto the trajectory.

$$a = g\sin(\alpha)$$

[0.5 P.] Which can be rewritten (the full half-point is also given if this rewriting appears only later)

$$a = \frac{gs}{L}$$

v. (0.5 P.) On laisse rouler la bille le long de l'hélice en lui imprimant une vitesse initiale v_0 (tangentielle à la piste). Calculez la position $l(t)$ de la bille en fonction du temps.

[0.5 P.] The (scalar) acceleration is constant, so l behaves like in a uniformly accelerated movement ; general equation :

$$r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

So we have, from the way l is defined :

$$l(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

vi. (2 P.) Si cette vitesse initiale est dirigée dans le sens ascendant de l'hélice, après quel temps τ la bille repassera-t-elle par sa position initiale ? Trouvez une valeur numérique pour τ en posant $R = s = 20\,\mathrm{cm}$ et $v_0 = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

[0.5 P.] We want $l(\tau) = 0$.

[1 P.]

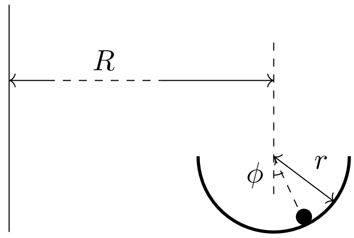
$$\begin{aligned}
0 &= v_0 + \frac{1}{2}a\tau \\
\tau &= \frac{2v_0}{a} \\
&= \frac{2v_0}{gs}\sqrt{(2\pi R)^2 + s^2} \\
&= \frac{2v_0}{g}\sqrt{\left(2\pi\frac{R}{s}\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

[0.5 P.] Numerically :

$$\tau \approx 1.3\,\mathrm{s}$$

Partie B. Comme un toboggan *(9 points)*

Nous considérons maintenant que la piste a une section en demi-cercle de rayon r, les deux rebords étant à la même hauteur. La bille est elle toujours considérée comme un point matériel qui se déplace sans frottement. On repère la position de la bille sur la piste par l'angle $\phi(t)$ (pris dans le plan vertical contenant l'axe de l'hélice) et par la distance $l(t)$ depuis sa position initiale, mesurée le long du fond de la piste (où $\phi = 0$).



i. (5 P.) Trouvez une équation qui relie les grandeurs $\phi(t)$, R, r, s, $l(t)$ et L si la bille a initialement $v_0 = 0$ et $\phi_0 = 0$. Aucune autre variable que ces six ne doit apparaître dans l'équation. Il n'est pas demandé de résoudre cette équation.

[1 P.] One can consider that the radial velocity is always much smaller that the tangential one (and changes very little), therefore does not contribute an acceleration. (This does not need to be explicitly written, the point can be given if the calculations are correct or clearly use this assumption.)

[1 P.] Forces are the normal force $\vec{N}$ and gravity $m\vec{g}$

$$N\cos(\phi) - mg = 0$$

$$N\sin(\phi) = ma_c = m\frac{v^2}{R + r\sin(\phi)}$$

[1 P.] Normal condition (Newton) : (the developped form is not requested for the full point)

$$\frac{v^2}{(R + r\sin(\phi))} = g\tan(\phi)$$

[1 P.] Energy conservation :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(s\frac{l}{L} - r\left(1 - \cos(\phi)\right)\right)$$

[1 P.] Merging both equations via v^2 and cancelling the g (not requested for the full point, as it is not necessarily clear whether g is a variable or a constant...) (the exact form of the equation is not relevant, it should only be equivalent to this one) :

$$\tan(\phi)\left(R + r\sin(\phi)\right) = 2\left(s\frac{l}{L} - r\left(1 - \cos(\phi)\right)\right)$$

ii. (1 P.) La bille va-t-elle sauter hors de la piste ?

[1 P.] Not in a finite distance, as from the previous task $\tan(\phi)$ will remain finite for a finite distance.

Note : the following precisions are valid but not required for the full point :
- The marble will come so close to the edge of the ramp that in reality even a small perturbation could make it jump off.
- The conclusion is only valid for $R > r$.

Note : more complete mathematical treatment, not asked for : the equation can be simplified using the half-angle formula, with $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$\left(4\frac{r}{R} - 2\frac{sl}{RL}\right)x^4 - 2x^3 - 2x + 2\frac{sl}{RL} = 0$$

For $0 \leq r < R$, the branch of $x(l)$ starting at 0 converges towards 1 for growing l. For $r > R$ there is a gap of forbidden values for l indicating that the marble will jump off. For $r = R$ there is an instability leading to possible jump off at each $l \geq \frac{R}{s}L$.

iii. (2 P.) Comment cette équation se simplifie-t-elle si l'on pose $R \gg r$?

[1 P.] Dividing by R : (if this was already done above, the full point is also given)

$$\tan(\phi)\left(1 + \frac{r}{R}\sin(\phi)\right) = \frac{2sl}{LR} - 2\frac{r}{R}\left(1 - \cos(\phi)\right)$$

[1 P.] $\sin(\phi)$ and $\cos(\phi)$ are bounded, so :

$$\tan(\phi) \approx \frac{2sl}{LR}$$

iv. (1 P.) Donnez la valeur numérique de $\phi(t)$ lorsque la bille a parcouru 5 spires (avec $R = 10\,\mathrm{m}$, $r = 2\,\mathrm{cm}$ et $s = 2\,\mathrm{m}$).

[1 P.] We use the simplified formula ($R \gg r$) and $\frac{l}{L} = 5$ (either of the radian or degree numerical value gives the full point, but only if identified as such, e.g. not 1.1°) :

$$\begin{aligned}\phi &\approx \arctan\left(\frac{2sl}{LR}\right)\\ &\approx 1.1\\ &\approx 63°\end{aligned}$$