Challenge 3, Waves and Oscillations: Soluzioni

Un pendolo in un condensatore — *14 pt.*

In questo esercizio esaminiamo il comportamento di un pendolo in un campo elettrico. A questo scopo consideriamo un condensatore piatto (ideale) con una superficie dei piatti $A = 1\,\mathrm{m}^2$, ad una distanza $d = 20\,\mathrm{cm}$, e una piccola sfera di massa $m = 5\,\mathrm{g}$, che è collegata ad una corda si lunghezza $l = 10\,\mathrm{cm}$.

Parte A. Campo elettrico — *3 pt.*

i. Calcola la capacità C del condensatore. **1 pt.**

We have

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

0.5 pt.

The numerical result is $C = 44.27\,\mathrm{pF}$. 0.5 pt.

ii. Quanto valgono la tensione e il campo elettrico quando sulle piastre del condensatore si trova una carica $Q = \pm 2\,\mu\mathrm{C}$? **2 pt.**

We have

$$U = \frac{Q}{C}$$

0.5 pt.

and therefore

$$E = \frac{U}{d}$$

0.5 pt.

the numerical results are

$$U = 44.52\,\mathrm{kV} \text{ and } E = 226\,\mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

(0.5 points each) 1 pt.

Parte B. Oscillazioni — *11 pt.*

Se non sei riuscito a risolvere i compiti precedenti, usa un campo elettrico di $E = 2.26\,\mathrm{MV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ per i seguenti compiti.

i. Il pendolo viene posizionato in mezzo al condensatore, le cui piastre sono parallele al piano yz (ovvero in verticale, rispetto al campo gravitazionale). La sferetta viene caricata con $q = 200\,\mathrm{nC}$. Disegna le forze che agiscono sulla sfera, e indica la forza risultante **2 pt.**

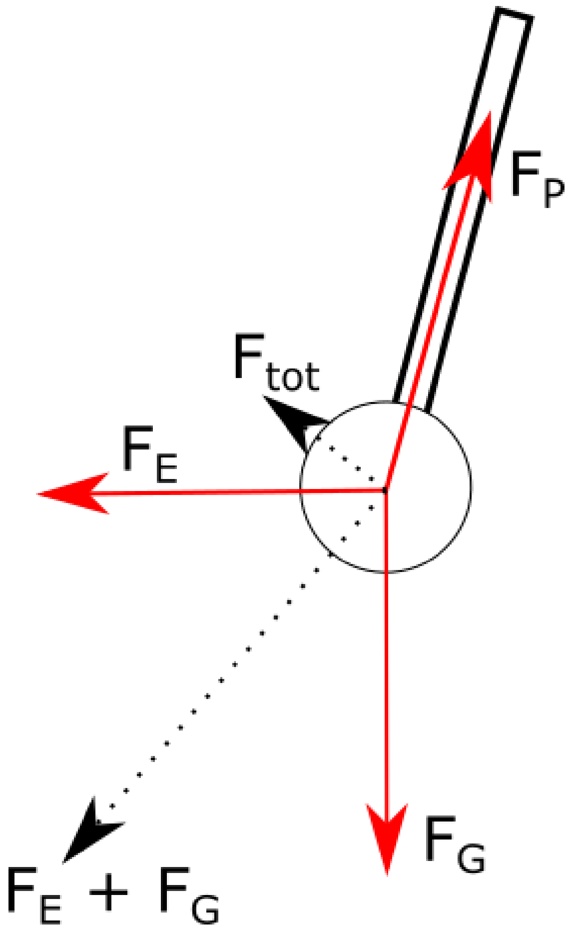

Figura 1:

For the electrical force. 0.5 pt.

For the gravititional force. 0.5 pt.

For the force in the pendulum. 0.5 pt.

For the resulting force. 0.5 pt.

ii. Che angolo si forma rispetto alla verticale, quando il pendolo è lasciato a riposo? 2 pt.

In x-direction we have the electrical force $F_{el} = qE$ and in z direction the gravitational force $F_g = mg$ 0.5 pt.

Therefore we get the angle

$$\theta = \arctan\left(\frac{F_{el}}{F_g}\right)$$

1 pt.

The numerical result is $\theta = 83.8°$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV \cdot m^{-1}}$) or $\theta = 42.65°$ (for $E = 226\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$). 0.5 pt.

iii. Se si sposta il pendolo di un piccolo angolo dalla sua posizione di riposo comincerà quest'ultimo a oscillare (approssimando si assuma un'oscillazione armonica). Calcola la frequenza di questa oscillazione.
Consiglio: Per $x \ll 1$ ***vale*** $\sin x \approx x$. **5 pt.**

At every point we have the same force $F_{el+g} = \sqrt{F_{el}^2 + F_g^2}$ acting on the charge under an the angle θ, which we calculated above. Around the equilbrium point the force becomes

$$F_r = -F_{el+g}\sin(\phi)$$

where ϕ deflection from equilbrium. 1 pt.

We make a Taylor approximation for small ϕ

$$F_r \approx -F_{el+g}\phi$$

0.5 pt.

We get the equation of motion

$$ml\ddot{\phi} = -F_{el+g}\phi$$

and therefore

$$\ddot{\phi} = -\frac{F_{el+g}}{ml}\phi$$

1 pt.

From $\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$ we can identify

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{el+g}}{ml}}$$

1 pt.

With $\omega = 2\pi f$ 0.5 pt.

the frequency becomes

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left((qE)^2 + (mg)^2\right)^{1/4} = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left(\left(\frac{qQ}{\epsilon_0 A}\right)^2 + (mg)^2\right)^{1/4}$$

0.5 pt.

The numerical value of f is $4.8\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV \cdot m^{-1}}$) or $1.838\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 226\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$) 0.5 pt.

iv. Come cambia la frequenza dell'oscillazione, se la distanza tra la piastre viene aumentata di $\Delta d = 5\,\text{cm}$ e la tensione viene mantenuta costante? **2 pt.**

The charge changes by

$$Q' = Q\frac{d}{d + \Delta d}$$

1 pt.

Therefore we can use the formula

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left(\left(\frac{qQ}{\epsilon_0 A}\right)^2 + (mg)^2\right)^{1/4}$$

again. 0.5 pt.

The numerical value is $f = 4.3\,\text{Hz}$ (for $E = 2.26\,\text{MV}\cdot\text{m}^{-1}$) or $f = 1.757\,\text{Hz}$ (for $E = 226\,\text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$) 0.5 pt.