



**PHYSICS.  
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE  
OLYMPIADES DE PHYSIQUE  
OLIMPIADI DELLA FISICA

# Olympiades de Physique

## Tour final

Aarau, 19 - 20 mars 2022

**Partie théorique 1 : 3 problèmes**

Durée : 180 minutes

Total : 48 points ( $3 \times 16$ )

---

Moyens autorisés : Calculatrice sans base de données

Matériel pour écrire et dessiner

## Bonne chance !

Supported by :



## Constantes fondamentales

Fréquence hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	$\text{s}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c$	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e$	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	$k_{\text{B}}$	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	$N_{\text{A}}$	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
Efficacité lumineuse d'un rayonnement	$K_{\text{cd}}$	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Constante magnétique	$\mu_0$	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante électrique	$\varepsilon_0$	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Constante des gaz	$R$	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	$G$	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	$m_e$	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	$\text{kg}$
Masse du proton	$m_{\text{n}}$	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	$\text{kg}$
Masse du neutron	$m_{\text{p}}$	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	$\text{kg}$
Accélération normale de la pesanteur	$g_{\text{n}}$	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

## Problèmes théoriques

Durée : 180 minutes

Cotation : 48 points ( $3 \times 16$ )

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

*Remarque générale : les problèmes sont composés de parties partiellement indépendantes. En cas de blocage, il est conseillé de continuer à lire et de faire les parties plus faciles.*

### Problème 1.1: Profondeur de champ (16 points)

Vous venez de recevoir un appareil photo. Il se compose comme suit : une lentille mince de focale  $f = 100$  mm pourvue d'un diaphragme de diamètre variable  $d$  et un capteur situé à une distance variable  $s$ . On caractérise souvent le diamètre du diaphragme par le *nombre d'ouverture*  $N = \frac{f}{d}$ .

#### Partie A. Introduction à la photo (3.5 points)

**i. (1 pt.)** À quelle distance  $x(f, s)$  (mesurée depuis la lentille) de l'objet à photographier faut-il placer l'appareil photo pour obtenir une image nette ?

**ii. (1.5 pt.)** Quel sera le grandissement transversal de l'image produite sur le capteur en fonction de  $s$  et  $x$ , avec quel signe et pourquoi ?

**iii. (1 pt.)** Si vous souhaitez prendre une photo d'un objet très éloigné (par exemple la Lune), comment devez-vous choisir  $s$  ?

#### Partie B. Flou et netteté (8 points)

Si vous ne respectez pas la relation dérivée en A.i. et placez l'objet en  $x' \neq x(f, s)$ , vous obtiendrez une image floue. Concrètement, si l'objet à photographier est un point, son image sur le capteur sera un disque de diamètre  $c$  appelé *cercle de confusion*.

**i. (3 pt.)** Dérivez une expression pour  $c(f, N, s, x')$ . *Indice : considérez initialement les cas  $x' < x$  et  $x' > x$  séparément.*

**ii. (0.5 pt.)** Comment pouvez-vous augmenter la netteté globale de l'image sans déplacer ni l'objet, ni l'appareil, ni son capteur ?

**iii. (2 pt.)** Vous considérez qu'une image est nette si le diamètre de son cercle de confusion ne dépasse pas une certaine valeur  $h$ . Quelle plage de valeurs de  $x'$  respecte cette condition pour des  $f, N, s, h$  donnés ?

**iv. (2.5 pt.)** Vous souhaitez photographier un éléphant devant un croissant de Lune. Vous ouvrez le diaphragme à  $N = 10$ . Le capteur de 36 mm par 24 mm est constitué de cellules carrées de côté 10  $\mu\text{m}$ . À quelle distance minimale  $x'_{\text{min}}$  de l'éléphant pouvez-vous approcher l'appareil pour avoir tant l'éléphant que la Lune nets, c'est-à-dire que leurs cercles de confusion soient de taille plus petite ou égale aux cellules du capteur ?

#### Partie C. Petite ouverture (2.5 points)

**i. (2.5 pt.)** La scène est majoritairement dans un bleu ciel de longueur d'onde 473 nm. Si l'on augmente trop  $N$ , l'image sera dégradée même pour des temps de pose suffisamment longs. Dans le cas  $s = f$ , quelle est la valeur  $N$  maximale possible pour votre appareil photo sans que ce problème n'apparaisse ?

#### Partie D. Lentille épaisse (2 points)

**i. (2 pt.)** En réalité, les lentilles ne sont pas infiniment minces. Identifiez un problème qui résulte de ce fait et une manière de le résoudre.

**Problème 1.2 : Échelle glissante (16 points)****Partie A. Échelle sans appui (4 points)**

Une échelle de masse  $M$  et de longueur  $L$  est placée à la verticale au milieu de la pièce (voir la figure 1.2.1). À l'instant  $t = 0$ , elle commence à glisser sans friction.

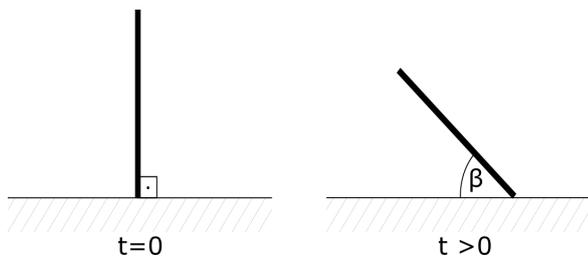


Fig. 1.2.1 : Échelle sans appui

**i. (4 pt.)** Trouvez l'accélération du centre de masse de l'échelle juste avant qu'elle ne touche le sol ( $\beta = 0$ ).

**Partie B. Échelle contre un mur (12 points)**

La même échelle est posée à la verticale contre un mur (voir la figure 1.2.2). À l'instant  $t = 0$ , elle commence à glisser sans friction. Lorsqu'elle forme un certain angle  $\alpha_0$ , elle se détache du mur.

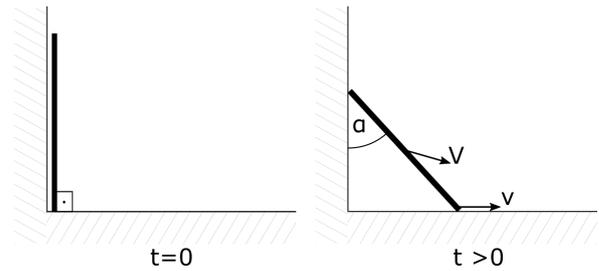


Fig. 1.2.2 : Échelle contre un mur

**i. (2 pt.)** Quelle est la trajectoire du centre de masse de l'échelle avant qu'elle ne se détache du mur ( $\alpha < \alpha_0$ ) ?

**ii. (5.5 pt.)** Déterminez la vitesse  $v$  de l'extrémité inférieure de l'échelle et la vitesse  $V$  du centre de masse lorsqu'elle forme un angle  $\alpha < \alpha_0$  avec la verticale.

**iii. (3.5 pt.)** Déterminez l'angle  $\alpha_0$ .

**iv. (1 pt.)** L'accélération du centre de masse de l'échelle au moment de toucher le sol est-elle la même que dans la partie A.i. ?

**Problème 1.3 : Bêtatron (16 points)**

Des électrons de haute énergie sont nécessaires pour des expériences de collisions et pour la production de rayons X. Ces électrons de haute énergie peuvent être produits en les accélérant dans un tube à vide sur plusieurs tours sur une orbite circulaire de rayon  $R_2$ .

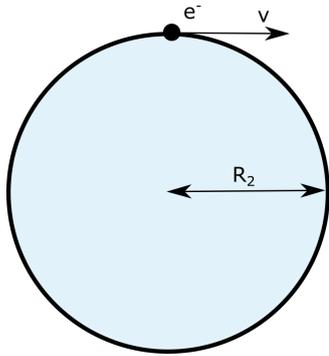


Fig. 1.3.1 : Vue schématique du bêtatron avec orbite circulaire des électrons.

Une possibilité de transférer l'énergie aux électrons est d'utiliser un champ magnétique variant dans le temps dans un accélérateur appelé bêtatron. Comme le montre schématiquement la figure 1.3.2, des spires de bobine conduisant du courant s'étendent dans un bêtatron parallèlement au tube à vide et génèrent, à l'aide du joug en fer, un champ magnétique dans le tube à vide et dans l'espace du joug en fer. L'espace dans le joug en fer peut être divisé en deux zones. Une zone intérieure jusqu'à un rayon  $R_1$  avec un vide de distance  $d_1$  et un champ magnétique  $B_1(t)$  et une zone extérieure avec un vide  $d_2$  et un champ magnétique  $B_2(t)$ . Pour cette tâche, nous supposons, en simplifiant quelque peu, que les champs magnétiques  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$  sont perpendiculaires au plan contenant l'orbite de l'électron.

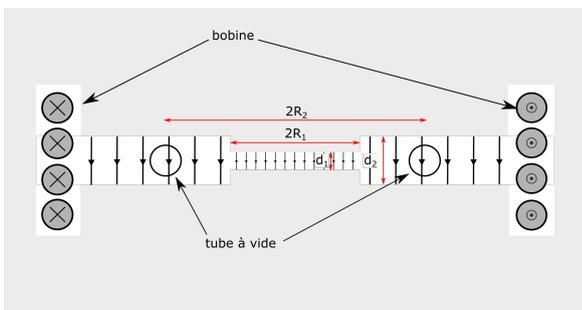


Fig. 1.3.2 : Coupe transversale schématique d'un bêtatron. Les électrons se trouvent dans le tube à vide qui est entouré d'un joug en fer (gris).

**Partie A. Orbite stable (7 points)**

Nous voulons d'abord trouver comment les intensités des champs magnétiques  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$  doivent être liées pour que nous puissions accélérer les électrons de manière stable.

*Indice : vous pouvez effectuer les calculs de la partie A de manière non relativiste.*

- i. (2 pt.)** Quelle doit être la vitesse des électrons pour qu'ils soient sur une orbite circulaire stable de rayon  $R_2$  ?
- ii. (1 pt.)** Donnez le flux magnétique  $\Phi(t)$  à travers la surface entourée par l'orbite électronique (surface bleue sur la figure 1.3.1) en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$ .
- iii. (1.5 pt.)** Quelle est l'accélération tangentielle subie par les électrons dans le bêtatron ? Donnez le résultat en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\frac{dB_1(t)}{dt}$  et  $\frac{dB_2(t)}{dt}$ .
- iv. (2.5 pt.)** Supposons que le champ magnétique  $B_2(t)$  est donné. Quel doit être le champ magnétique  $B_1(t)$  pour que les électrons restent sur l'orbite circulaire de rayon  $R_2$  ?

**Partie B. Transfert d'énergie (4 points)**

Nous alimentons maintenant les bobines avec un courant alternatif de fréquence  $f = 50$  Hz. Le champ magnétique a la forme

$$B_i(t) = B_{0,i} \sin(2\pi ft)$$

avec  $B_{0,i} > 0$  pour  $i = 1, 2$ . Nous supposons qu'au temps  $t = 0$ , les électrons dans le bêtatron sont au repos.

- i. (2 pt.)** À quel moment les électrons doivent-ils être extraits pour avoir une énergie maximale ?
- ii. (2 pt.)** Quelle est l'énergie des électrons dans ce cas ? Nous supposons  $R = 1.2$  m et  $B_{0,2} = 0.8$  T.  
*Indice : pour obtenir le résultat correct, ce calcul doit être effectué de manière relativiste.*

**Partie C. Champ magnétique et courant (5 points)**

Dans cette partie, nous voulons trouver quelle intensité du courant est nécessaire pour créer le champ magnétique souhaité. Pour cela, nous prenons les valeurs numériques suivantes :  $R_1 = 1$  m,  $d_2 = 2$  cm et la bobine a  $n = 40$  spires.

- i. (3.5 pt.)** De quelle intensité de courant avons-nous besoin pour créer un champ magnétique de  $B_2 = 0.8$  T dans le tube à vide ? Supposez que la perméabilité magnétique du fer  $\mu \gg 1$ .
- ii. (1.5 pt.)** Quelle doit être la distance  $d_1$  pour que la condition de A.iv. soit remplie ?

## Problèmes théoriques : solutions

### Problème 1.1 : Profondeur de champ

16 pt.

Vous venez de recevoir un appareil photo. Il se compose comme suit : une lentille mince de focale  $f = 100$  mm pourvue d'un diaphragme de diamètre variable  $d$  et un capteur situé à une distance variable  $s$ . On caractérise souvent le diamètre du diaphragme par le *nombre d'ouverture*  $N = \frac{f}{d}$ .

#### Partie A. Introduction à la photo

3.5 pt.

i. À quelle distance  $x(f, s)$  (mesurée depuis la lentille) de l'objet à photographier faut-il placer l'appareil photo pour obtenir une image nette ?

1 pt.

Using the thin lens formula :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f},$$

0.5 pt.

we can derive :

$$x(f, s) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{fs}{s - f}.$$

0.5 pt.

ii. Quel sera le grandissement transversal de l'image produite sur le capteur en fonction de  $s$  et  $x$ , avec quel signe et pourquoi ?

1.5 pt.

The linear (or transverse) magnification is given by the ratio of the (signed) image size to the object size,

$$\gamma_t = \frac{h_i}{h_o}.$$

By similar triangles,

$$\gamma_t = -\frac{s}{x}.$$

1 pt.

The sign is negative, because the image is inverted.

0.5 pt.

The case  $|\gamma_t| \approx 1$  is called close-up or proxiphotography and the case  $|\gamma_t| > 1$  macrophotography.

iii. Si vous souhaitez prendre une photo d'un objet très éloigné (par exemple la Lune), comment devez-vous choisir  $s$  ?

1 pt.

For very far objects ( $x \rightarrow \infty$ ), the thin lens formula leads to  $s = f$ .

1 pt.

Alternatively, one can say that parallel rays (parallel to the optical axis) going through the lens cross at the focal point of the lens, or that the focal point conjugates with the infinity.

#### Partie B. Flou et netteté

8 pt.

Si vous ne respectez pas la relation dérivée en A.i. et placez l'objet en  $x' \neq x(f, s)$ , vous obtiendrez une image floue. Concrètement, si l'objet à photographier est un point, son image sur le capteur sera un disque de diamètre  $c$  appelé *cercle de confusion*.

**i. Dérivez une expression pour  $c(f, N, s, x')$ . Indice : considérez initialement les cas  $x' < x$  et  $x' > x$  séparément.**

3 pt.

The image of  $x'$  is given by  $s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{x'}} = \frac{fx'}{x' - f}$  from the thin lens equation.

0.5 pt.

Assume first that  $x' < x$ , so  $s' > s$ . By similar triangles,

$$\frac{c_{x' < x}}{s' - s} = \frac{d}{s'}$$

0.5 pt.

If instead  $x' > x$ , so  $s' < s$  and

$$\frac{c_{x' > x}}{s - s'} = \frac{d}{s'}$$

so both formulae are equal, up to the sign (we want  $c$  to be positive, as it is a radius).

0.5 pt.

We can combine both equations into one:

$$c = \left| d \frac{s' - s}{s'} \right|$$

0.5 pt.

So

$$c = \frac{f}{N} \left| 1 - s \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{x'} \right) \right|$$

1 pt.

Award half of the points if only one of the cases is considered or if the absolute value is missing in the final expression.

**ii. Comment pouvez-vous augmenter la netteté globale de l'image sans déplacer ni l'objet, ni l'appareil, ni son capteur ?**

0.5 pt.

The goal is to reduce  $c$  with  $f$ ,  $s$  and  $x'$  kept constant. The only possibility is to augment  $N$ , that is to reduce the aperture  $d$ .

0.5 pt.

Note that, at equal exposure time and sensitivity, this will result in a darker image.

**iii. Vous considérez qu'une image est nette si le diamètre de son cercle de confusion ne dépasse pas une certaine valeur  $h$ . Quelle plage de valeurs de  $x'$  respecte cette condition pour des  $f$ ,  $N$ ,  $s$ ,  $h$  donnés ?**

2 pt.

We want to find all  $x'$  that fulfill  $c \leq h$ .

$$\begin{aligned} -h &\leq \frac{f}{N} \left( 1 - s \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{x'} \right) \right) && \leq h \\ -\frac{Nh}{f} &\leq 1 - s \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{x'} \right) && \leq \frac{Nh}{f} \\ \frac{1}{s} - \frac{Nh}{fs} &\leq \frac{1}{f} - \frac{1}{x'} && \leq \frac{1}{s} + \frac{Nh}{fs} \\ \frac{1}{f} - \frac{1}{s} - \frac{Nh}{fs} &\leq \frac{1}{x'} && \leq \frac{1}{f} - \frac{1}{s} + \frac{Nh}{fs} \end{aligned}$$

1 pt.

The lower bound of the range is

$$\frac{fs}{s - f + Nh} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s} + \frac{Nh}{fs}} \leq x'$$

if  $s - f \geq -Nh$ , else

$$0 \leq x'.$$

0.5 pt.

The upper bound of the range is

$$x' \leq \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s} - \frac{Nh}{fs}} = \frac{fs}{s - f - Nh}$$

if  $s - f \geq Nh$ , else

$$x' \leq \infty.$$

0.5 pt.

**iv. Vous souhaitez photographier un éléphant devant un croissant de Lune. Vous ouvrez le diaphragme à  $N = 10$ . Le capteur de 36 mm par 24 mm est constitué de cellules carrées de côté 10  $\mu\text{m}$ . À quelle distance minimale  $x'_{\min}$  de l'éléphant pouvez-vous approcher l'appareil pour avoir tant l'éléphant que la Lune nets, c'est-à-dire que leurs cercles de confusion soient de taille plus petite ou égale aux cellules du capteur ?**

2.5 pt.

We want to impose  $h = 10 \mu\text{m}$  and  $x'_{\max} \rightarrow \infty$  (that is,  $\frac{1}{x'_{\max}} = 0$ ). This means that we focus at the smallest possible  $x$  such that the Moon (at infinity) is still sharp with the maximum allowed circle of confusion.

0.5 pt.

This leads to the condition  $s - f - Nh = 0$ , so  $s = f + Nh$ .

0.5 pt.

Plugging this into the other part of the (in)equation, we find

$$x'_{\min} = \frac{f^2 + fNh}{f + Nh - f + Nh} = \frac{f^2}{2Nh} + \frac{f}{2}.$$

1 pt.

Numerically ( $f \gg Nh$  so we can neglect the  $\frac{f}{2}$  part):

$$x'_{\min} \approx \frac{f^2}{2Nh} = 50 \text{ m.}$$

0.5 pt.

*This is not asked for, but remarkably, the distance  $x$  that we actually have to focus at is  $x = 2x'_{\min}$ .*

**Partie C. Petite ouverture**

2.5 pt.

**i. La scène est majoritairement dans un bleu ciel de longueur d'onde 473 nm. Si l'on augmente trop  $N$ , l'image sera dégradée même pour des temps de pose suffisamment longs. Dans le cas  $s = f$ , quelle est la valeur  $N$  maximale possible pour votre appareil photo sans que ce problème n'apparaisse ?**

2.5 pt.

The degrading is caused by diffraction at the edge of the aperture. The problem will arise if the diffraction limit gets larger than the pixel size.

0.5 pt.

Therefore we have (small angle approximation) :

$$\theta_{\max} s = \theta_{\max} f = h$$

0.5 pt.

and (Rayleigh criterion)

$$\theta_{\max} = \frac{1.22\lambda}{d_{\min}} = \frac{1.22\lambda N_{\max}}{f}$$

0.5 pt.

So

$$N_{\max} = \frac{h}{f} \frac{f}{1.22\lambda} = \frac{h}{1.22\lambda}$$

0.5 pt.

Numerically :

$$N_{\max} \approx 17.3.$$

0.5 pt.

**Partie D. Lentille épaisse**

2 pt.

**i. En réalité, les lentilles ne sont pas infiniment minces. Identifiez un problème qui résulte de ce fait et une manière de le résoudre.**

2 pt.

Thick lenses cause chromatic aberration, because the focal length depends on the refractive index, which in turn depends on the wavelength. So different colors are focused at different distances and the image cannot be made sharp for all of them.

1 pt.

One way to solve (or at least, mitigate) this issue is to use several lenses. A system of two lenses is called *achromatic*, three *apochromatic*, etc. The more lenses the better with respect to chromatic aberration (but then other issues arise, such as the weight of the system, the mechanical complexity, the imperfections in lens grinding, etc.).

1 pt.

*Other issues include spherical aberrations (most lenses are ground spherical for ease of manufacturing), coma (light coming at an angle w.r.t. the optical axis do not focus at a point, even for a perfectly ground lens), field curvature (flat surfaces are imaged to a curved virtual surface), etc.*

*Some of these issues can be mitigated or solved by using systems of several lenses or (more rarely) by adapting the sensor shape.*

*Points are awarded if the identified issue resp. solution makes sense.*

**Problème 1.2 : Échelle glissante****16 pt.****Partie A. Échelle sans appui****4 pt.**

Une échelle de masse  $M$  et de longueur  $L$  est placée à la verticale au milieu de la pièce (voir la figure 1.2.1). À l'instant  $t = 0$ , elle commence à glisser sans friction.

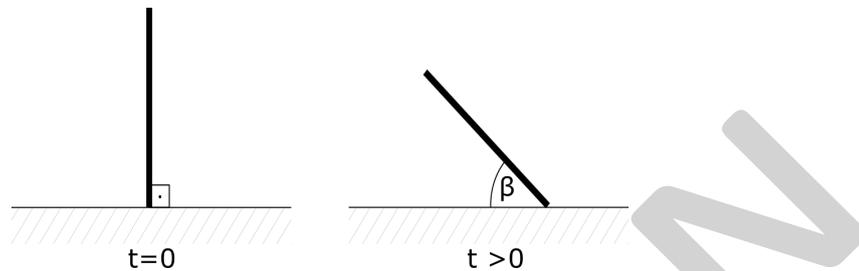


Fig. 1.2.1: Échelle sans appui

**i. Trouvez l'accélération du centre de masse de l'échelle juste avant qu'elle ne touche le sol ( $\beta = 0$ ).**

**4 pt.**

Just before the ladder touches the floor, Newton's law says

$$Ma = Mg - N_{\text{floor}},$$

1 pt.

the torque equation says

$$I\epsilon = N_{\text{floor}} \frac{L}{2},$$

where  $\epsilon$  is the angular acceleration.

1 pt.

We can model the ladder as a thin rod and get the moment of inertia  $I = \frac{1}{12}ML^2$ .

1 pt.

At the moment the ladder touches the floor we have the relation

$$a = \epsilon \frac{L}{2} \implies N_{\text{floor}} = \frac{1}{3}aM.$$

0.5 pt.

Solving the equations for  $a$  gives

$$a = \frac{3}{4}g.$$

0.5 pt.

**Partie B. Échelle contre un mur****12 pt.**

La même échelle est posée à la verticale contre un mur (voir la figure 1.2.2). À l'instant  $t = 0$ , elle commence à glisser sans friction. Lorsqu'elle forme un certain angle  $\alpha_0$ , elle se détache du mur.

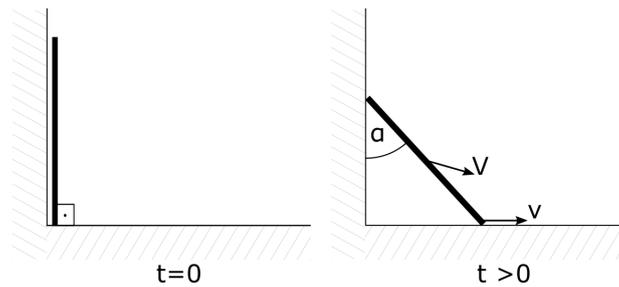


Fig. 1.2.2: Échelle contre un mur

i. Quelle est la trajectoire du centre de masse de l'échelle avant qu'elle ne se détache du mur ( $\alpha < \alpha_0$ ) ?

The coordinates of the center of the ladder are

$$(x, y) = \left( \frac{L}{2} \sin(\alpha), \frac{L}{2} \cos(\alpha) \right).$$

1 pt.

Hence, the center of mass moves on the circle with radius  $\frac{L}{2}$  centered at the corner where the wall meets the floor.

1 pt.

If this solution is obtained without parametrisation of the coordinates or other mathematical reasoning only 1 out of 2 points are awarded for this question.

ii. Déterminez la vitesse  $v$  de l'extrémité inférieure de l'échelle et la vitesse  $V$  du centre de masse lorsqu'elle forme un angle  $\alpha < \alpha_0$  avec la verticale.

The velocity components of the center of mass are

$$v_x = \frac{L}{2} \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{L}{2} \cos(\alpha) \omega$$

0.5 pt.

and

$$v_y = \frac{L}{2} \sin(\alpha) \omega.$$

0.5 pt.

We can conclude

$$\omega = \frac{2}{L} V.$$

1 pt.

This relation can also be seen directly by geometric considerations. Indeed, note that the angular velocity of the ladder is the same as the angular velocity of the center of mass motion around the corner. This is because the triangle formed by the corner, the center of mass and the bottom of the ladder is isosceles. Give all the points above if argued like this.

The potential energy of the ladder at an angle  $\alpha$  is

$$E_{\text{pot}} = Mg \frac{L}{2} \cos(\alpha).$$

0.5 pt.

Energy conservation reads

$$Mg \frac{L}{2} = Mg \frac{L}{2} \cos(\alpha) + \frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

where  $I = \frac{ML^2}{12}$  is the moment of inertia with respect to the center of mass.

Give the points for  $I$  from part A if it is not already mentioned there.

Solving for  $V$  yields

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{3gL(1 - \cos(\alpha))}.$$

0.5 pt.

The bottom of the ladder is at the position  $x_{\text{bot}} = \sin(\alpha)L = 2x$ .

0.5 pt.

Yielding

$$v = 2v_x = 2V \cos(\alpha) = \sqrt{3gL(1 - \cos(\alpha))} \cos(\alpha).$$

1 pt.

**iii. Déterminez l'angle  $\alpha_0$ .**

**3.5 pt.**

Newton's law implies that

$$Ma_x = N_{\text{wall}}$$

where  $a_x$  is the horizontal acceleration of the center of mass of the ladder, and  $N_{\text{wall}}$  is the normal reaction at the wall.

0.5 pt.

The top of the ladder detaches from the wall when  $N_{\text{wall}} = 0$ , and hence  $a_x = 0$ .

1 pt.

We compute

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{3gL}}{2} \left( \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{2\sqrt{1 - \cos(\alpha)}} - \sqrt{1 - \cos(\alpha)} \sin(\alpha) \right) \omega \\ &= \frac{\sqrt{3gL}\omega \sin(\alpha)}{4\sqrt{1 - \cos(\alpha)}} (\cos(\alpha) - 2(1 - \cos(\alpha))). \end{aligned}$$

1 pt.

Hence,  $a_x$  vanishes when  $\cos(\alpha_0) = \frac{2}{3}$  or  $\alpha_0 = 48^\circ$ .

1 pt.

**iv. L'accélération du centre de masse de l'échelle au moment de toucher le sol est-elle la même que dans la partie A.i. ?**

**1 pt.**

In the inertial coordinate system in which the horizontal velocity of the center of mass is zero, the arguments of part A apply verbatim. Hence, the acceleration will be the same.

1 pt.

**Problème 1.3 : Bêtatron**

16 pt.

Des électrons de haute énergie sont nécessaires pour des expériences de collisions et pour la production de rayons X. Ces électrons de haute énergie peuvent être produits en les accélérant dans un tube à vide sur plusieurs tours sur une orbite circulaire de rayon  $R_2$ .

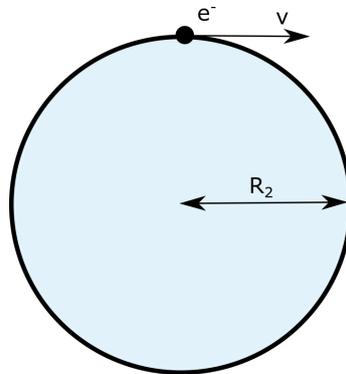


Fig. 1.3.1: Vue schématique du bêtatron avec orbite circulaire des électrons.

Une possibilité de transférer l'énergie aux électrons est d'utiliser un champ magnétique variant dans le temps dans un accélérateur appelé bêtatron. Comme le montre schématiquement la figure 1.3.2, des spires de bobine conduisant du courant s'étendent dans un bêtatron parallèlement au tube à vide et génèrent, à l'aide du joug en fer, un champ magnétique dans le tube à vide et dans l'espace du joug en fer. L'espace dans le joug en fer peut être divisé en deux zones. Une zone intérieure jusqu'à un rayon  $R_1$  avec un vide de distance  $d_1$  et un champ magnétique  $B_1(t)$  et une zone extérieure avec un vide  $d_2$  et un champ magnétique  $B_2(t)$ . Pour cette tâche, nous supposons, en simplifiant quelque peu, que les champs magnétiques  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$  sont perpendiculaires au plan contenant l'orbite de l'électron.

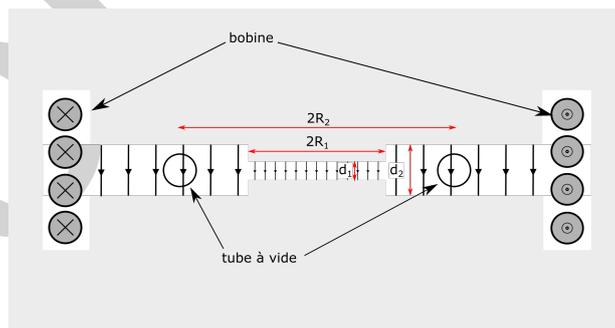


Fig. 1.3.2: Coupe transversale schématique d'un bêtatron. Les électrons se trouvent dans le tube à vide qui est entouré d'un joug en fer (gris).

**Partie A. Orbite stable**

7 pt.

Nous voulons d'abord trouver comment les intensités des champs magnétiques  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$  doivent être liées pour que nous puissions accélérer les électrons de manière stable.

*Indice : vous pouvez effectuer les calculs de la partie A de manière non relativiste.*

**i. Quelle doit être la vitesse des électrons pour qu'ils soient sur une orbite circulaire stable de rayon  $R_2$  ?** **2 pt.**

To have a stable orbit the Lorentz force needs to be equal to the centripetal force. 0.5 pt.

For the centripetal force we have

$$|\vec{F}_c| = \frac{mv^2}{R}.$$
0.5 pt.

The Lorentz force is

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B}_2(t)$$

and therefore  $|\vec{F}_L| = evB_2(t)$ , because the magnetic field is perpendicular to the velocity. 0.5 pt.

We get the final result

$$v = \frac{e}{m} B_2(t) R.$$
0.5 pt.

**ii. Donnez le flux magnétique  $\Phi(t)$  à travers la surface entourée par l'orbite électronique (surface bleue sur la figure 1.3.1) en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$ .** **1 pt.**

We have two contributions, one from the inner part of the betatron

$$\Phi_1(t) = \pi B_1(t) R_1^2$$
0.5 pt.

and one from the annular shaped area

$$\Phi_2(t) = \pi B_2(t) (R_2^2 - R_1^2).$$
0.5 pt.

Yielding a total magnetic flux of

$$\Phi(t) = \pi B_1(t) R_1^2 + \pi B_2(t) (R_2^2 - R_1^2).$$

**iii. Quelle est l'accélération tangentielle subie par les électrons dans le bêtatron ? Donnez le résultat en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\frac{dB_1(t)}{dt}$  et  $\frac{dB_2(t)}{dt}$ .** **1.5 pt.**

We get a voltage along the electron orbit from the time varying magnetic induction within the betatron. 0.5 pt.

The change of the magnetic induction relates to the voltage by

$$U = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \pi \frac{dB_1(t)}{dt} R_1^2 + \pi \frac{dB_2(t)}{dt} (R_2^2 - R_1^2).$$
0.5 pt.

From this we get the acceleration

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{2\pi R_2 m} = \frac{e}{2m} \left( \frac{dB_1(t)}{dt} \frac{R_1^2}{R_2} + \frac{dB_2(t)}{dt} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2} \right).$$

iv. Supposons que le champ magnétique  $B_2(t)$  est donné. Quel doit être le champ magnétique  $B_1(t)$  pour que les électrons restent sur l'orbite circulaire de rayon  $R_2$  ?

0.5 pt.  
2.5 pt.

Since the velocity is increasing during acceleration, the magnetic field also needs to increase to keep the electron on a circular orbit. We can quantify this with the two expressions derived from above,

$$\frac{e}{m} \frac{dB_2(t)}{dt} R_2 = \frac{dv}{dt} = a = \frac{e}{2m} \left( \frac{dB_1(t)}{dt} \frac{R_1^2}{R_2} + \frac{dB_2(t)}{dt} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2} \right).$$

1 pt.

Since the magnetic field is produced by the same coil there had to be a time  $t_s$  (before switching the currents on) where  $B_1(t_s) = B_2(t_s) = 0$ . By integration we get

$$B_2(t) R_2 = \frac{1}{2} B_1(t) \frac{R_1^2}{R_2} + B_2(t) \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2}.$$

1 pt.

We can solve for  $B_1(t)$ ,

$$B_1(t) = \frac{2R_2}{R_1^2} \left( R_2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2} \right) B_2(t) = \left( 1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) B_2(t).$$

0.5 pt.  
4 pt.

Partie B. Transfert d'énergie

Nous alimentons maintenant les bobines avec un courant alternatif de fréquence  $f = 50$  Hz. Le champ magnétique a la forme

$$B_i(t) = B_{0,i} \sin(2\pi ft)$$

avec  $B_{0,i} > 0$  pour  $i = 1, 2$ . Nous supposons qu'au temps  $t = 0$ , les électrons dans le bêatron sont au repos.

i. À quel moment les électrons doivent-ils être extraits pour avoir une énergie maximale ?

2 pt.

The sign of the induced voltage changes when  $\frac{dB_i(t)}{dt} = 0$ .

1 pt.

This happens at phase of  $\frac{\pi}{2} = 2\pi ft_{ex}$

0.5 pt.

and we get  $t_{ex} = \frac{1}{4f} = 5$  ms.

0.5 pt.

ii. Quelle est l'énergie des électrons dans ce cas ? Nous supposons  $R = 1.2$  m et  $B_{0,2} = 0.8$  T. *Indice : pour obtenir le résultat correct, ce calcul doit être effectué de manière relativiste.*

2 pt.

We get the maximal momenta

$$p = \gamma mv = eB_{max}R = eB_0(R) R.$$

1 pt.

From this we get the final energy

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

We get a result of  $E = 288 \text{ MeV}$ .

1 pt.

### Partie C. Champ magnétique et courant

5 pt.

Dans cette partie, nous voulons trouver quelle intensité du courant est nécessaire faut pour créer le champ magnétique souhaité. Pour cela, nous prenons les valeurs numériques suivantes :  $R_1 = 1 \text{ m}$ ,  $d_2 = 2 \text{ cm}$  et la bobine a  $n = 40$  spires.

**i. De quelle intensité de courant avons-nous besoin pour créer un champ magnétique de  $B_2 = 0.8 \text{ T}$  dans le tube à vide ? Supposez que la perméabilité magnétique du fer  $\mu \gg 1$ .**

3.5 pt.

We use Ampère's law along a line through the iron yoke and along a straight line at radius  $R$  through the gap.

$$nI = \oint H ds = d_2 \frac{B(R)}{\mu_0} + \int_{\text{yoke}} H ds$$

2 pt.

In the iron yoke itself we have  $H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \approx 0$  yielding

$$\frac{B(R) d_2}{\mu_0} = nI.$$

1 pt.

We get  $I = \frac{B(R) d_2}{\mu_0 n} = 318 \text{ A}$ .

0.5 pt.

**ii. Quelle doit être la distance  $d_1$  pour que la condition de A.iv. soit remplie ?**

1.5 pt.

From the previous results we get

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

0.5 pt.

We can solve for  $d_1$  :

$$d_1 = \frac{R_1^2 d_2}{R^2 + R_1^2}.$$

0.5 pt.

The numerical value is  $d_1 = 8 \text{ mm}$ .

0.5 pt.



**PHYSICS.  
OLYMPIAD.CH**

PHYSIK-OLYMPIADE  
OLYMPIADES DE PHYSIQUE  
OLIMPIADI DELLA FISICA

# Olympiades de Physique

## Tour final

Aarau, 19 - 20 mars 2022

**Partie théorique 2 : 6 questions courtes**

Durée : 60 minutes

Total : 24 points ( $6 \times 4$ )

Moyens autorisés : Calculatrice sans base de données

Matériel pour écrire et dessiner

## Bonne chance !

Supported by :



## Constantes fondamentales

Fréquence hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^9$	$\text{s}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c$	2.997 924 58	$\times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e$	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	$k_{\text{B}}$	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	$N_{\text{A}}$	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
Efficacité lumineuse d'un rayonnement	$K_{\text{cd}}$	6.83	$\times 10^2$	$\text{cd} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{sr}$
Constante magnétique	$\mu_0$	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\text{A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante électrique	$\varepsilon_0$	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$
Constante des gaz	$R$	8.314 462 618...		$\text{K}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	5.670 374 419...	$\times 10^{-8}$	$\text{K}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Constante gravitationnelle	$G$	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	$m_e$	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	$\text{kg}$
Masse du proton	$m_{\text{n}}$	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	$\text{kg}$
Masse du neutron	$m_{\text{p}}$	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	$\text{kg}$
Accélération normale de la pesanteur	$g_{\text{n}}$	9.806 65		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

## Questions courtes

Durée : 60 minutes

Cotation : 24 points ( $6 \times 4$ )

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

### Problème 2.1 : Collisions de sphères (4 points)

Emmy veut envoyer des objets dans l'espace sans utiliser de carburant. Pour les tests préliminaires de son idée, elle prend une tour de sphères et la laisse tomber d'une hauteur de  $h = 5$  m.

Elle fait varier les masses des sphères. Supposez que toutes les collisions sont élastiques. Si nécessaire, vous pouvez supposer que la masse supérieure tombe avec un retard de  $\epsilon \ll 1$  s. Quel est le gain de hauteur maximal possible de la sphère supérieure par rapport à la position de départ,

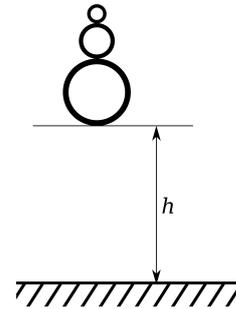


Fig. 2.1.1 : Une tour de trois sphères.

i. (2 pt.) si Emmy utilise 2 sphères ?

ii. (1 pt.) si Emmy utilise 3 sphères ?

iii. (1 pt.) Commentez les hypothèses que vous avez faites. En raison de quelles limitations physiques la hauteur maximale ne sera pas atteinte ? Emmy pense à utiliser plus de sphères et à augmenter  $h$  pour arriver encore plus haut. Pourquoi est-ce (ou n'est-ce pas) une bonne méthode pour lancer un satellite dans l'espace ?

### Problème 2.2 : Hauteur de l'eau dans une piscine (4 points)

Archimède installe un nouveau système pour remplir sa piscine jusqu'à une hauteur maximale de  $h_{\max} = 1$  m. Il était important pour lui de pouvoir la remplir exactement jusqu'à un certain niveau. Il a donc installé un émetteur d'ondes radio non dirigées de fréquence  $f$  à  $H = 2$  m au-dessus du sol sur le bord avant de la piscine. Un récepteur est installé à  $H = 2$  m au-dessus du sol à l'extrémité arrière de la piscine. La distance entre l'émetteur et le récepteur est de  $L = 30$  m. Le récepteur mesure l'interférence du signal direct et du signal réfléchi par l'eau. À partir du motif d'interférence, on peut

mesurer le déphasage (à un multiple de  $2\pi$  près) entre les deux signaux. Le déphasage permet de déterminer la hauteur de l'eau dans la piscine.

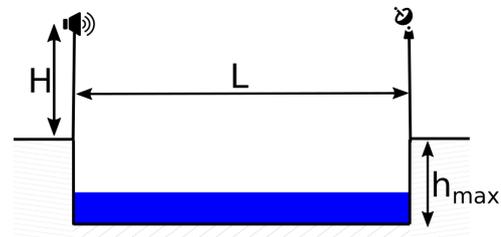


Fig. 2.2.1 : Schéma de la configuration d'Archimède.

i. (2.5 pt.) Quelle est la fréquence maximale  $f_{\max}$  qu'il peut choisir, s'il veut connaître la hauteur de l'eau sans ambiguïté ?

ii. (1.5 pt.) Archimède décide d'utiliser la fréquence  $0.4 \text{ GHz} < f_{\max}$ . À quelle hauteur d'eau les deux signaux interfèrent-ils de façon destructive et qu'ainsi nous n'avons pas de signal ?

**Problème 2.3 : Baromètre (4 points)**

On a initialement un tube en U, ouvert à gauche et fermé à droite, rempli d'eau. On retire une partie déterminée de l'eau. Le niveau d'eau baisse alors inégalement des deux côtés.

La partie de droite a été graduée de manière à ce que le niveau d'eau représente la pression atmosphérique, mais lors de la graduation on a oublié de tenir compte de l'évaporation, qui fait que le vide au sommet de la partie de droite se remplit de vapeur d'eau.

La pression de vapeur saturante  $P_s$  pour l'eau peut être modélisée par l'équation d'Antoine (où  $T$  est en kelvin) :

$$\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_o}\right) = A - \frac{B}{T + C}.$$

On considère l'expérience à  $T = 20^\circ\text{C}$ , et les

- i. (2 pt.) Quelle est la valeur réelle de la pression atmosphérique  $P_a$  ?
- ii. (2 pt.) Si la vapeur d'eau peut être assimilée à un gaz parfait, combien y a-t-il de molécules d'eau par  $\text{cm}^3$  de vapeur ? Que peut-on en conclure sur le calcul de  $P_a$  ci-dessus ?

**Problème 2.4 : Tuyau (4 points)**

Nous considérons un tuyau dont le diamètre de départ  $2R_0$  est réduit de moitié, puis augmente à nouveau jusqu'à sa taille d'origine (voir la figure 2.4.1).

L'eau qui s'écoule à travers ce tuyau est freinée par les parois du tube. Ainsi on considère que l'eau coule plus lentement près des parois qu'au milieu du tuyau. Le profil de vitesse peut s'exprimer comme une fonction de la distance  $r$  par rapport au centre :  $v(r) = k(R)(R^2 - r^2)$  où  $R$  est le rayon du tube (attention, il n'est pas constant !).

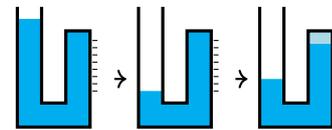
- i. (0.5 pt.) Que vaut  $k(R_0)$  pour la portion du tube avant le rétrécissement ?
- ii. (1 pt.) Calculez  $k\left(\frac{R_0}{2}\right)$  au point le plus étroit, en fonction de  $v_0$  et  $R_0$ .  
Au point le plus étroit du tube, on place maintenant une très petite sphère de rayon  $r_0$  ( $r_0 \ll R_0$ ). Le long du courant, une ficelle de diamètre négligeable tient la sphère en place (les mouvements latéraux restent possibles).
- iii. (1 pt.) En admettant que le fluide se déplace très lentement, quelle est la résistance de la sphère dans l'eau ? Indication : la viscosité de l'eau est environ  $\eta = 9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .
- iv. (1 pt.) Pour de plus grandes vitesses du fluide, il faut considérer un écoulement turbulent. Que vaut la résistance ? Indication : le coefficient de résistance à l'écoulement d'une sphère est environ  $c_W = 0.4$ .
- v. (0.5 pt.) Considérons que la vitesse du fluide est faible et que la sphère a la même densité que l'eau. La sphère sera-t-elle plutôt au centre ou plutôt au bord du tuyau ? Justifiez.

constantes valent dans ce cas :

$$\begin{aligned} P_o &= 1000 \text{ hPa} \\ A &= 5.40221 \\ B &= 1838.675 \text{ K} \\ C &= -31.737 \text{ K} \end{aligned}$$

Dans cette expérience, on néglige la capillarité et tout échange liquide-gaz à l'interface de la partie gauche du tube.

On lit la valeur  $P'_a = 990 \text{ hPa}$  sur la graduation.



La vitesse au centre du tuyau avant et après le rétrécissement est  $v_0$ .

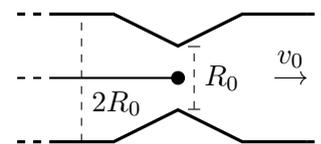


Fig. 2.4.1 : L'eau coule à travers un tuyau qui se ressert. La sphère est positionnée au point le plus étroit.

**Problème 2.5 : Bombe atomique (4 points)**

La première explosion d'une bombe atomique a eu lieu lors de l'essai Trinity au Nouveau-Mexique en 1945. Plusieurs années plus tard, une série de photos de l'explosion, accompagnées d'une échelle de taille et d'un horodatage, ont été publiées dans un magazine populaire. Sur la base de ces photos, un physicien britannique nommé G. I. Taylor a pu estimer la puissance libérée par l'explosion (qui était encore secrète à l'époque). Répétons ce calcul.

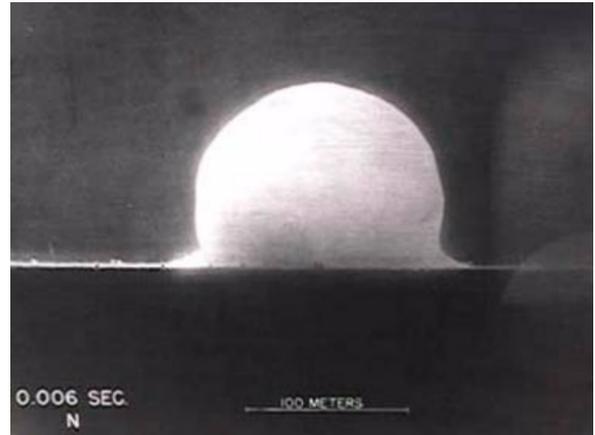


Fig. 2.5.1 : Image de l'essai Trinity.

**i. (2 pt.)** Taylor a soutenu que l'énergie de la bombe atomique ne dépend que du rayon de la boule de feu  $R$ , de la masse volumique de l'air  $\rho$  et du temps  $t$  après la détonation. Trouvez une équation pour  $E$  en fonction des variables mentionnées

$$E = Kf(\rho, R, t)$$

où  $K$  est une constante sans unité.

**ii. (1 pt.)** Avec une analyse plus approfondie on trouve la valeur de la constante  $K = 0.851$ . Trouvez l'énergie en kilotonnes de TNT (1 kt de TNT =  $4.184 \times 10^{12}$  J) de la bombe atomique représentée sur la photo. La masse volumique de l'air est de  $1.225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**iii. (1 pt.)** Quelle est la vitesse de propagation de la boule de feu au moment où la photo a été prise ?

**Problème 2.6 : Pistolet à air comprimé (4 points)**

**i. (1 pt.)** Un piston cylindrique avec un volume de 20 mL contient un gaz idéal avec trois degrés de liberté à pression atmosphérique. Avant de tirer, on comprime le piston de manière isotherme. Quelle est l'énergie interne du gaz après la compression ?

**ii. (3 pt.)** On tire ensuite une balle de 1 g, qui accélère de  $150 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  grâce à l'expansion soudaine du piston. Calculez le volume comprimé  $V_0$  avant le tir. *Indice : quel type de processus décrit le mieux l'expansion rapide du piston ?*

## Questions courtes : solutions

### Problème 2.1 : Collisions de sphères

4 pt.

Emmy veut envoyer des objets dans l'espace sans utiliser de carburant. Pour les tests préliminaires de son idée, elle prend une tour de sphères et la laisse tomber d'une hauteur de  $h = 5$  m.

Elle fait varier les masses des sphères. Supposez que toutes les collisions sont élastiques. Si nécessaire, vous pouvez supposer que la masse supérieure tombe avec un retard de  $\epsilon \ll 1$  s. Quel est le gain de hauteur maximal possible de la sphère supérieure par rapport à la position de départ,

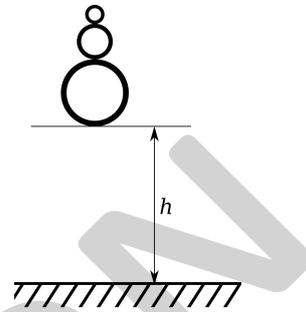


Fig. 2.1.1 : Une tour de trois sphères.

#### i. si Emmy utilise 2 sphères ?

2 pt.

For a demonstration of the effect see : <https://iruntheinternet.com/07674>. The full calculation of the height as a function of the masses is not needed, but is correct as well.

The maximum is achieved if  $\frac{m_{\text{top}}}{m_{\text{bottom}}} \rightarrow 0$ , that is, if the mass of the top sphere is much smaller than the mass of the bottom sphere.

0.75 pt

The spheres hit each other in sequence, that is the bottom one first collides with the ground, then moves upwards and hits the top sphere.

0.25 pt

The speed of the bottom sphere just before it hits the ground is  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , so is the speed of the top sphere just before it hits the bottom sphere. The maximal height a sphere reaches when launched with an initial velocity  $v$  (in a homogeneous gravitational field) is  $h_{\text{max}} = \frac{v^2}{2g}$ .

0.25 pt

The bottom sphere bounces off the ground and has upwards velocity  $v_0$ . Then it collides with the top sphere which has downwards velocity  $v_0$ . In the reference frame of the bottom sphere (which is also the center of mass reference frame, if  $m_{\text{top}} \ll m_{\text{bottom}}$ ), the top sphere approaches with velocity  $2v_0$ , and after the collision it leaves with velocity  $2v_0$ . In the reference frame of the Earth, it therefore has an upwards velocity of  $3v_0$ . With this velocity it reaches the height  $9h$  measured from the lowest point of its trajectory, i.e.  $8h$  from the starting position. Both  $9h = 45$  m and  $8h = 40$  m give full points.

0.75 pt

#### ii. si Emmy utilise 3 sphères ?

1 pt.

The full calculation is again not needed, and would be much more tedious than for 2 spheres, but using the limit from part i. twice simplifies the calculation a lot.

The maximum is achieved if  $\frac{m_{\text{top}}}{m_{\text{middle}}} \rightarrow 0$  and  $\frac{m_{\text{middle}}}{m_{\text{bottom}}} \rightarrow 0$ , in other words, if  $m_{\text{top}} \ll m_{\text{middle}} \ll m_{\text{bottom}}$ .

0.25 pt

From the previous problem, we know that the middle sphere will have upwards velocity  $3v_0$  after colliding with the bottom sphere. Therefore, after the collision, the top sphere will have upwards velocity  $3v_0 + v_0$

in the reference frame of the middle sphere and  $2 \cdot 3v_0 + v_0 = 7v_0$  in the reference frame of the Earth. The maximum height gain is therefore  $49h - h = 48h$ . Again both  $49h = 245$  m and  $48h = 240$  m are correct. 0.75 pt.

**iii. Commentez les hypothèses que vous avez faites. En raison de quelles limitations physiques la hauteur maximale ne sera pas atteinte ? Emmy pense à utiliser plus de sphères et à augmenter  $h$  pour arriver encore plus haut. Pourquoi est-ce (ou n'est-ce pas) une bonne méthode pour lancer un satellite dans l'espace ?** 1 pt.

Give 0.25 points for each valid physical limitation up to a maximum of 1 point. Examples are :

- The collisions will not be perfectly elastic.
- The involved speeds get extremely high (if we want to launch something into space), which makes e.g. the assumption of elastic collisions break down.
- We neglected the air resistance (especially as the top mass should be small).
- The top mass cannot be arbitrarily small, we still want to launch something into space.
- The masses needed grows a lot with the number of spheres, so does the energy needed to lift all spheres to  $h$ .
- The accelerations on the top sphere get extremely large, which is bad if we want to launch a satellite.
- Very sensitive to deflections, would need to find a way of keeping the balls perfectly aligned. See hamster (<https://iruntheinternet.com/07674>).
- For large heights, the gravitational field can no longer be assumed homogeneous.
- This method only launches mass upwards, a satellite also needs quite a lot of tangential velocity to orbit the Earth (otherwise it would just fall down again).

1 pt.

**Problème 2.2 : Hauteur de l'eau dans une piscine**

**4 pt.**

Archimède installe un nouveau système pour remplir sa piscine jusqu'à une hauteur maximale de  $h_{\max} = 1 \text{ m}$ . Il était important pour lui de pouvoir la remplir exactement jusqu'à un certain niveau. Il a donc installé un émetteur d'ondes radio non dirigées de fréquence  $f$  à  $H = 2 \text{ m}$  au-dessus du sol sur le bord avant de la piscine. Un récepteur est installé à  $H = 2 \text{ m}$  au-dessus du sol à l'extrémité arrière de la piscine. La distance entre l'émetteur et le récepteur est de  $L = 30 \text{ m}$ . Le récepteur mesure l'interférence du signal direct et du signal réfléchi par l'eau. À partir du motif d'interférence, on peut mesurer le déphasage (à un multiple de  $2\pi$  près) entre les deux si-

gnaux. Le déphasage permet de déterminer la hauteur de l'eau dans la piscine.

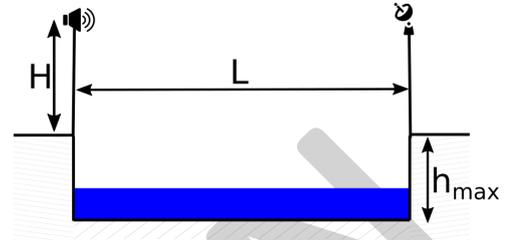


Fig. 2.2.1 : Schéma de la configuration d'Archimède.

**i. Quelle est la fréquence maximale  $f_{\max}$  qu'il peut choisir, s'il veut connaître la hauteur de l'eau sans ambiguïté ?**

**2.5 pt**

The path length for the filled and empty pool are

$$\Delta S_f = 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - L,$$

0.5 pt.

$$\Delta S_e = 2\sqrt{(H + h_{\max})^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - L.$$

0.5 pt.

0.5 pt.

The difference between these two cannot be higher than the wavelength  $\lambda$ , which gives

$$f_{\max} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\Delta S_e - \Delta S_f}.$$

0.5 pt.

The numerical value is 0.91 GHz.

0.5 pt.

**ii. Archimède décide d'utiliser la fréquence  $0.4 \text{ GHz} < f_{\max}$ . À quelle hauteur d'eau les deux signaux interfèrent-ils de façon destructive et qu'ainsi nous n'avons pas de signal ?**

**1.5 pt**

This means the path length difference needs to be

$$\lambda \left(n + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{(H + h_{\max} - h_s)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - L.$$

0.5 pt.

Solving for  $h_s$  gives

$$h_s = H + h_{\max} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(L + \lambda \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

0.5 pt.

0.5 pt.

We have to find the  $n$  for which  $0 < h_s < h_{\max}$ , which gives  $h_s = 0.62 \text{ m}$ .

**Problème 2.3 : Baromètre**

**4 pt.**

On a initialement un tube en U, ouvert à gauche et fermé à droite, rempli d'eau. On retire une partie déterminée de l'eau. Le niveau d'eau baisse alors inégalement des deux côtés.

La partie de droite a été graduée de manière à ce que le niveau d'eau représente la pression atmosphérique, mais lors de la graduation on a oublié de tenir compte de l'évaporation, qui fait que le vide au sommet de la partie de droite se remplit de vapeur d'eau.

La pression de vapeur saturante  $P_s$  pour l'eau peut être modélisée par l'équation d'Antoine (où  $T$  est en kelvin) :

$$\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_o}\right) = A - \frac{B}{T + C}$$

On considère l'expérience à  $T = 20^\circ\text{C}$ , et les

constantes valent dans ce cas :

$$P_o = 1000 \text{ hPa}$$

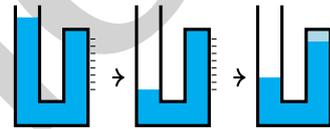
$$A = 5.40221$$

$$B = 1838.675 \text{ K}$$

$$C = -31.737 \text{ K}$$

Dans cette expérience, on néglige la capillarité et tout échange liquide-gaz à l'interface de la partie gauche du tube.

On lit la valeur  $P'_a = 990 \text{ hPa}$  sur la graduation.



i. Quelle est la valeur réelle de la pression atmosphérique  $P_a$  ?

**2 pt.**

Antoine's law transforms to

$$P_s = P_o 10^{A - \frac{B}{T+C}}$$

0.5 pt.

The pressure from the vapor on the right leads to a lowering of the water level compared to the situation where the part above the water would be totally empty (the vapor pressure on the right counteracts the atmospheric pressure on the left).

This means that the actual pressure is higher, by  $P_s$ , than the measured  $P'_a$  :

$$P_a = P'_a + P_s$$

1 pt.

Numerically :

$$P_s = 1000 \text{ hPa} \cdot 10^{5.40221 - \frac{1838.675}{20 + 273.15 - 31.737}} \approx 23.37 \text{ hPa}$$

$$P_a \approx 1013.37 \text{ hPa}$$

0.5 pt.

ii. Si la vapeur d'eau peut être assimilée à un gaz parfait, combien y a-t-il de molécules d'eau par  $\text{cm}^3$  de vapeur ? Que peut-on en conclure sur le calcul de  $P_a$  ci-dessus ?

**2 pt.**

From the ideal gas law, we have

$$N = \frac{PV}{k_B T}.$$

1 pt.

With  $V = 1 \text{ cm}^3$  and  $P$  set to  $P_s$  from above, this gives

$$N \approx 5.773 \times 10^{17}.$$

0.5 pt.

In liquid water, the density of molecules is of the order  $3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ . Thus the change of water level due to the loss of molecules (which go into vapor) is negligible ( $\approx 3$  orders of magnitude for equal vapor and water volumes) compared to the change due to vapor pressure.

0.5 pt.

SOLUTION

**Problème 2.4 : Tuyau**

**4 pt.**

Nous considérons un tuyau dont le diamètre de départ  $2R_0$  est réduit de moitié, puis augmente à nouveau jusqu'à sa taille d'origine (voir la figure 2.4.1).

L'eau qui s'écoule à travers ce tuyau est freinée par les parois du tube. Ainsi on considère que l'eau coule plus lentement près des parois qu'au milieu du tuyau. Le profil de vitesse peut s'exprimer comme une fonction de la distance  $r$  par rapport au centre :  $v(r) = k(R) (R^2 - r^2)$  où  $R$  est le rayon du tube (attention, il n'est pas constant!).

La vitesse au centre du tuyau avant et après

le rétrécissement est  $v_0$ .

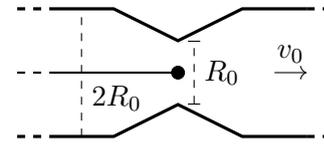


Fig. 2.4.1: L'eau coule à travers un tuyau qui se ressert. La sphère est positionnée au point le plus étroit.

**i. Que vaut  $k(R_0)$  pour la portion du tube avant le rétrécissement ?**

**0.5 pt**

By definition of  $v_0$ , we get for  $r = 0$ :  $v_0 = k(R_0) R_0^2$ .

0.25 pt

And therefore  $k(R_0) = \frac{v_0}{R_0^2}$ .

0.25 pt

**ii. Calculez  $k(\frac{R_0}{2})$  au point le plus étroit, en fonction de  $v_0$  et  $R_0$ .**

**1 pt.**

We have to use the continuity equation.

0.25 pt

For a radius of the pipe  $R$ , the volume of water flowing through that cross section area per time is

$$\int_0^R v(r) 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R k(R) (R^2 r - r^3) dr = 2\pi k(R) \left( \frac{1}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^4 \right) = \frac{\pi}{2} k(R) R^4$$

0.5 pt.

This quantity must be the same at the wide and narrow sections of the pipe. Using  $k(R_0) = \frac{v_0}{R_0^2}$  we get

$$\frac{\pi}{2} \frac{v_0}{R_0^2} R_0^4 = \frac{\pi}{2} k\left(\frac{R_0}{2}\right) \frac{R_0^4}{2^4}$$

$$k\left(\frac{R_0}{2}\right) = 16 \frac{v_0}{R_0^2}$$

0.25 pt

*Note : From an intuitive point of view this result was expected because we get an  $R^2$  dependence due to the continuity equation and an additional  $R^2$  dependence because the maximal velocity (for a given  $k(R)$ ) is proportional to  $R^2$ . If someone guesses this result, full points. There is even an easier approach by comparing only the velocity in the center of the pipe and the cross section area of the pipe :  $v_0 R_0^2 \pi R_0^2 = k\left(\frac{R_0}{2}\right) \frac{R_0^2}{4} \pi \frac{R_0^2}{4}$  leading to the same result. Also here full points.*

**Au point le plus étroit du tube, on place maintenant une très petite sphère de rayon  $r_0$  ( $r_0 \ll R_0$ ). Le long du courant, une ficelle de diamètre négligeable tient la sphère en place (les mouvements latéraux restent possibles).**

iii. En admettant que le fluide se déplace très lentement, quelle est la résistance de la sphère dans l'eau ? Indication : la viscosité de l'eau est environ  $\eta = 9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

1 pt.

We have laminar flow so  $F_r = 6\pi\eta Rv$ .

1 pt.

If the pre factor  $6\pi$  is wrong, but the other dependences correct, give 0.5pt.

iv. Pour de plus grandes vitesses du fluide, il faut considérer un écoulement turbulent. Que vaut la résistance ? Indication : le coefficient de résistance à l'écoulement d'une sphère est environ  $c_W = 0.4$ .

1 pt.

For turbulent flow, we have  $F_r = c_W A \rho \frac{v^2}{2} = c_W \pi r_0^2 \rho \frac{v^2}{2}$ .

1 pt.

If the pre factor  $\frac{c_W}{2}$  is wrong, but the other dependences correct, give 0.5pt. Furthermore if the area  $A = \pi r_0^2$  is not specified, punishment of 0.25pt.

v. Considérons que la vitesse du fluide est faible et que la sphère a la même densité que l'eau. La sphère sera-t-elle plutôt au centre ou plutôt au bord du tuyau ? Justifiez.

0.5 pt.

As the velocity of the water is bigger in the middle of the pipe, there will be a smaller pressure due to Bernoulli.

0.25 pt.

Hence the ball will be pushed towards the middle (give these points also if no explanation is given).

0.25 pt.

**Problème 2.5 : Bombe atomique****4 pt.**

La première explosion d'une bombe atomique a eu lieu lors de l'essai Trinity au Nouveau-Mexique en 1945. Plusieurs années plus tard, une série de photos de l'explosion, accompagnées d'une échelle de taille et d'un horodatage, ont été publiées dans un magazine populaire. Sur la base de ces photos, un physicien britannique nommé G. I. Taylor a pu estimer la puissance libérée par l'explosion (qui était encore secrète à l'époque). Répétons ce calcul.

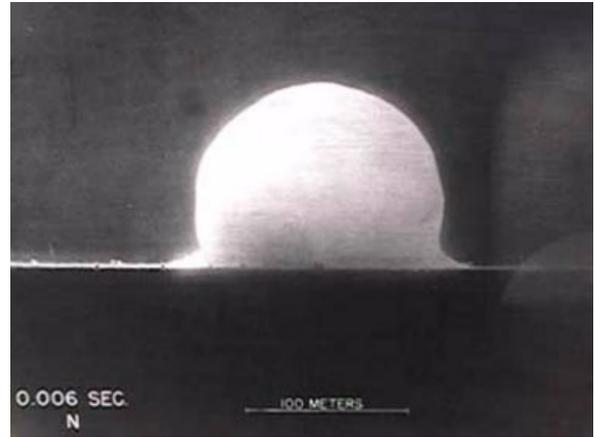


Fig. 2.5.1 : Image de l'essai Trinity.

i. Taylor a soutenu que l'énergie de la bombe atomique ne dépend que du rayon de la boule de feu  $R$ , de la masse volumique de l'air  $\rho$  et du temps  $t$  après la détonation. Trouvez une équation pour  $E$  en fonction des variables mentionnées

$$E = K f(\rho, R, t)$$

où  $K$  est une constante sans unité.

**2 pt.**

We can use dimension analysis and make the ansatz

$$E = KR^x \rho^y t^z.$$

**1 pt.**

For the units kg, m and s we get the equations

$$y = 1,$$

$$x - 3y = 2,$$

$$z = -2.$$

(0.25 points for each equation)

**0.75 pt**

We finally find  $x = 5$  leading to the equation

$$E = KR^5 \rho t^{-2}.$$

**0.25 pt**

ii. Avec une analyse plus approfondie on trouve la valeur de la constante  $K = 0.851$ . Trouvez l'énergie en kilotonnes de TNT (1 kt de TNT =  $4.184 \times 10^{12}$  J) de la bombe atomique représentée sur la photo. La masse volumique de l'air est de  $1.225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**1 pt.**

By constructing the center of the fire ball with two secants, the radius is estimated to be 78 m. All solutions within [68 m, 88 m] should give full points. 0.5 pt.

The energy then is 20 kt of TNT. Give points if the solution lies within [10 kt of TNT, 37 kt of TNT]. 0.5 pt.

**iii. Quelle est la vitesse de propagation de la boule de feu au moment où la photo a été prise ?** **1 pt.**

From our formula we get

$$R = \left( \frac{E}{K\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$$

and therefore

$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5} \left( \frac{E}{K\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} = \frac{2R}{5t}.$$

The numerical value gives  $v = 5200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Give full points for the solution if it is consistent with the result from question ii. 0.5 pt.

**Problème 2.6 : Pistolet à air comprimé****4 pt.**

i. Un piston cylindrique avec un volume de 20 mL contient un gaz idéal avec trois degrés de liberté à pression atmosphérique. Avant de tirer, on comprime le piston de manière isotherme. Quelle est l'énergie interne du gaz après la compression ?

**1 pt.**

Since the process is isothermic the internal energy  $E$  is the same as before compression

$$E = \frac{3}{2}p_i V_i$$

where  $V_i$  is the initial volume of 20 mL and  $p_i$  is atmospheric pressure.

0.5 pt.

We get  $E = 3 \text{ J}$ .

0.5 pt.

ii. On tire ensuite une balle de 1 g, qui accélère de  $150 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  grâce à l'expansion soudaine du piston. Calculez le volume comprimé  $V_0$  avant le tir. *Indice : quel type de processus décrit le mieux l'expansion rapide du piston ?*

**3 pt.**

Let  $J$  be the change in internal energy during the expansion

$$J = \frac{3}{2}(p_0 V_0 - pV) = E - \frac{3}{2}pV$$

where  $p_0$ ,  $V_0$  are the pressure and the volume before the shot and  $p$ ,  $V$  the pressure and volume after the shot.

0.5 pt.

Solving for  $V$  gives

$$V = \frac{2}{3} \frac{E - J}{p}$$

0.5 pt.

Since the expansion is happening very fast we can approximate it by an adiabatic process.

$$p_0 V_0^{\frac{5}{3}} = pV^{\frac{5}{3}}$$

0.5 pt.

We can solve for  $V_0$

$$V_0 = \frac{2}{3p} \frac{(E - J)^{\frac{5}{2}}}{E^{\frac{3}{2}}}$$

0.5 pt.

In an adiabatic process no heat is transferred therefore

$$\frac{1}{2}mv_b^2 = E_{\text{kin},b} = J$$

0.5 pt.

The numerical value of  $V_0$  is 8.5 mL. Again the final pressure  $p$  has to be equal to the atmospheric pressure.

0.5 pt.