PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

# Olympiades de Physique

## Tour final

online, 6 juin 2020

| | | |
|---|---|---|
| **Partie théorique 1** | **:** | **1 problème** |
| Durée | : | 60 minutes |
| Total | : | 16 points |
| Moyens autorisés | : | Calculatrice simple<br>Matériel pour écrire et dessiner<br>Une feuille de notes A4 manuscrite écrite des deux côtés<br>Ordinateur pour accéder à l'examen et contacter le surveillant<br>Téléphone de contact avec le surveillant<br>Imprimante pour imprimer l'examen |

# Bonne chance !


Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik


#8de427cb

# Problèmes théoriques

Durée: 60 minutes
Cotation: 16 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

# Constantes fondamentales

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence de la transition hyperfine du césium | $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ | $=$ | $9\,192\,631\,770$ | $\mathrm{s}^{-1}$ |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c$ | $=$ | $299\,792\,458$ | $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ |
| Constante de Planck | $h$ | $=$ | $6.626\,070\,15\times10^{-34}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ |
| Charge élémentaire | $e$ | $=$ | $1.602\,176\,634\times10^{-19}$ | $\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$ |
| Constante de Boltzmann | $k_{\mathrm{B}}$ | $=$ | $1.380\,649\times10^{-23}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante d'Avogadro | $N_{\mathrm{A}}$ | $=$ | $6.022\,140\,76\times10^{23}$ | $\mathrm{mol}^{-1}$ |
| Efficacité lumineuse | $K_{\mathrm{cd}}$ | $=$ | $683$ | $\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$ |
| Constante magnétique | $\mu_0$ | $=$ | $4\pi\times10^{-7}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante électrique | $\varepsilon_0$ | $\approx$ | $8.854\,187\,82\times10^{-12}$ | $\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ |
| Constante des gaz | $R$ | $\approx$ | $8.314\,462\,618$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante de Stefan-Boltzmann | $\sigma$ | $\approx$ | $5.670\,374\,419\times10^{-8}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$ |
| Constante gravitationnelle | $G$ | $=$ | $6.674\,30(15)\times10^{-11}$ | $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Masse de l'électron | $m_{\mathrm{e}}$ | $=$ | $9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Masse du proton | $m_{\mathrm{n}}$ | $=$ | $1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Masse du neutron | $m_{\mathrm{p}}$ | $=$ | $1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Accélération normale de la pesanteur | $g_{\mathrm{n}}$ | $=$ | $9.806\,65$ | $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |

## Problème 1.1: Pince optique *(16 points)*

Lorsqu'un matériau est exposé à un champ électrique, ses électrons et molécules s'alignent avec le champ. Ce phénomème est utilisé dans les pinces optiques, un instrument utilisé pour tenir ou déplacer des objets à très petites échelles.

### Partie A. Influence *(3.5 points)*

Nous voulons étudier l'effet du champ électrique sur une petite boule métallique non chargée de rayon $R$. Pour cela, nous considérons d'abord la boule dans un champ électrique homogène $\vec{E}_0$.

**i. (1.5 pt.)** Comment les électrons se déplacent-ils dans la boule ? Faites un dessin sur la feuille de réponse et esquissez la répartition des charges.

**ii. (0.5 pt.)** A quoi ressemble le champ électrique à l'intérieur de la boule ?

**iii. (0.5 pt.)** Quelle est l'amplitude de la force électrique résultante sur la boule et dans quelle direction est-elle dirigée ?

D'un calcul plus détaillé, il ressort que l'énergie $E_C$ stockée dans le déplacement de la charge dans un champ temporellement constant est donnée par $E_C = 2\pi R^3 \epsilon_0 \left|\vec{E}_0\right|^2$. En outre, la charge déplacée est $Q = 3\pi R^2 \epsilon_0 \left|\vec{E}_0\right|$.

**iv. (1 pt.)** Ce déplacement des charges et le stockage du travail est analogue à la situation dans un condensateur. Quelle est la capacité équivalente (exprimée en fonction du rayon $R$) ?

### Partie B. Oscillateur *(7 points)*

**i. (1 pt.)** Si nous activons le champ électrique de la partie A instantanément, les électrons ne se distribuent pas immédiatement comme décrit dans la partie A. Outre la masse des électrons, il y a une autre raison, expliquez laquelle.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que la masse et négligerons l'autre raison. Considérons maintenant un champ électrique oscillant et homogène $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$. Ce champ fait osciller la charge de sorte que $Q(t) = Q_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$, où l'amplitude $Q_0(\omega)$ et la phase $\varphi(\omega)$ dépendent de $\omega$.

**ii. (0.5 pt.)** Quelle est l'amplitude du courant ?

**iii. (1 pt.)** Comme pour la capacité, on peut attribuer une inductance $L$ à l'inertie des électrons. Que vaut cette inductance équivalente, si l'énergie cinétique des électrons est $E_L$ ?

**iv. (3.5 pt.)** Cette inductance et cette capacité forment un circuit résonant. Quelle est la fréquence de résonance correspondante $\omega_0$ (en supposant que la résistance soit négligeable) ? Exprimer la fréquence de résonance uniquement avec des constantes naturelles, le rayon de la boule $R$, l'amplitude du champ électrique $\left|\vec{E}_0\right|$ et la densité (homogène) des électrons à l'intérieur de la boule. Négligez les effets en bordure de la boule. *Remarque : supposez que tous les électrons se déplacent à la même vitesse et négligez la résistance ohmique.*

**v. (1 pt.)** Laquelle des images 1.1.1 représente la réponse de phase (phase en fonction de la fréquence) $\varphi(\omega)$ ? Justifiez brièvement.

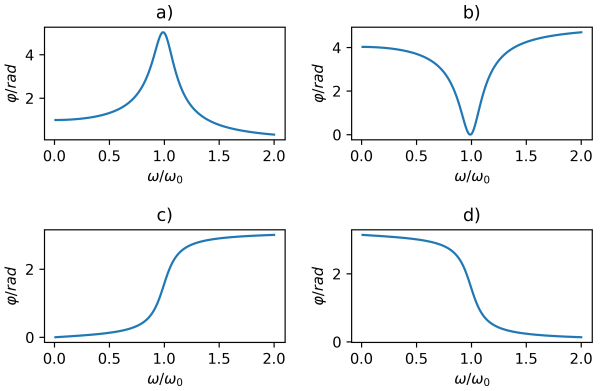



FIGURE 1.1.1: Possibles réponses de phase pour un circuit oscillant avec résistance.

### Partie C. Mise au point *(5.5 points)*

**i. (4 pt.)** Nous générons maintenant un champ électrique inhomogène avec un faisceau laser focalisé. Quelle fréquence du laser choisir de façon à ce que la bille de métal soit attirée par le point focal ? Précisez toutes les gammes de fréquences possibles et justifiez. *Remarque : la fréquence du laser peut être choisie librement.*

**ii. (1 pt.)** Nous sélectionnons une fréquence dans la gamme de fréquences mentionnée ci-dessus et nous plaçons la boule au milieu du faisceau, à proximité du point focal. Décrivez son mouvement (qualitativement).

**iii. (0.5 pt.)** Un laser au $CO_2$ a une longueur d'onde de $\lambda = 10.6\,\mu\text{m}$ (pour un laser c'est une grande longueur d'onde). Quelle est la densité d'électrons minimale $n$ pour attirer la boule vers le point focal ?

# Problèmes théoriques: solutions

## Problème 1.1: Pince optique — *16 pt.*

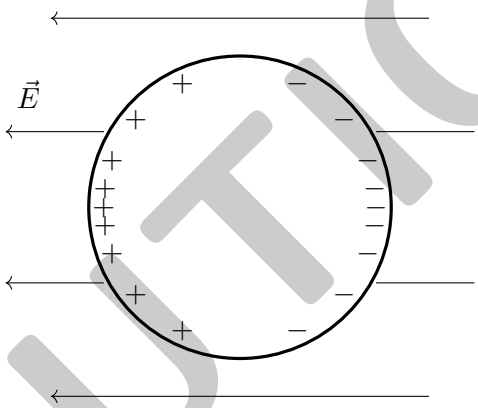
**Lorsqu'un matériau est exposé à un champ électrique, ses électrons et molécules s'alignent avec le champ. Ce phénomème est utilisé dans les pinces optiques, un instrument utilisé pour tenir ou déplacer des objets à très petites échelles.**

### Partie A. Influence — *3.5 pt.*

**Nous voulons étudier l'effet du champ électrique sur une petite boule métallique non chargée de rayon $R$. Pour cela, nous considérons d'abord la boule dans un champ électrique homogène $\vec{E}_0$.**

**i. Comment les électrons se déplacent-ils dans la boule ? Faites un dessin sur la feuille de réponse et esquissez la répartition des charges.** **1.5 pt.**

*tbd : picture, electric field arrows from right to left*




*If the field on the drawing of the students points into another direction, the situation has to be adapted correspondingly.*

Positive charge on the left half ball, negative on the right — 0.5 pt.

Charge only on the surface — 0.5 pt.

More charge on the horizontal extrema than in between — 0.5 pt.

*Drawing electrons instead of charges : max. 0.75pt (more only in very special cases).*

**ii. A quoi ressemble le champ électrique à l'intérieur de la boule ?** **0.5 pt.**

Since the ball is conducting, there must be no electric field inside (static case here). — 0.5 pt.

**iii. Quelle est l'amplitude de la force électrique résultante sur la boule et dans quelle direction est-elle dirigée ?** **0.5 pt.**

The total force is zero. — 0.5 pt.

**D'un calcul plus détaillé, il ressort que l'énergie $E_C$ stockée dans le déplacement de la charge dans un champ temporellement constant est donnée par $E_C = 2\pi R^3 \epsilon_0 \left|\vec{E}_0\right|^2$. En outre, la charge déplacée est $Q = 3\pi R^2 \epsilon_0 \left|\vec{E}_0\right|$.**

SOLUTIONS

**iv. Ce déplacement des charges et le stockage du travail est analogue à la situation dans un condensateur. Quelle est la capacité équivalente (exprimée en fonction du rayon $R$) ?** **1 pt.**

The energy stored in a capacitor is $E_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$.
The capacity is therefore $C = \frac{Q^2}{2E_C}$. (points also given if only one of these formulae is given) 0.5 pt.

Using the given equations we get $C = \frac{9\pi}{4}\epsilon_0 R$. 0.5 pt.

*Use of a formula that leads to a wrong prefactor because the capacitor is non-standard : 0.25pt (formula) + 0.25pt (result)*

## Partie B. Oscillateur *7 pt.*

**i. Si nous activons le champ électrique de la partie A instantanément, les électrons ne se distribuent pas immédiatement comme décrit dans la partie A. Outre la masse des électrons, il y a une autre raison, expliquez laquelle.** **1 pt.**

When the electrons accelerate they change their magnetic field which leads to self induction.
Alternatively one can argue that accelerated charges radiate and for this radiation more energy is needed. 1 pt.

**Dans ce qui suit, nous ne considérerons que la masse et négligerons l'autre raison. Considérons maintenant un champ électrique oscillant et homogène $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$. Ce champ fait osciller la charge de sorte que $Q(t) = Q_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$, où l'amplitude $Q_0(\omega)$ et la phase $\varphi(\omega)$ dépendent de $\omega$.**

**ii. Quelle est l'amplitude du courant ?** **0.5 pt.**

Taking the derivative of the charge, we get $I(t) = -\omega Q_0(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$ and hence an amplitude of $\omega Q_0(\omega)$. 0.5 pt.

**iii. Comme pour la capacité, on peut attribuer une inductance $L$ à l'inertie des électrons. Que vaut cette inductance équivalente, si l'énergie cinétique des électrons est $E_L$ ?** **1 pt.**

The energy stored in an inductance is $E_L = \frac{1}{2}LI^2$ therefore $L = \frac{2E_L}{I^2}$. 1 pt.

**iv. Cette inductance et cette capacité forment un circuit résonant. Quelle est la fréquence de résonance correspondante $\omega_0$ (en supposant que la résistance soit négligeable) ? Exprimer la fréquence de résonance uniquement avec des constantes naturelles, le rayon de la boule $R$, l'amplitude du champ électrique $\left|\vec{E}_0\right|$ et la densité (homogène) des électrons à l'intérieur de la boule. Négligez les effets en bordure de la boule.** ***Remarque : supposez que tous les électrons se déplacent à la même vitesse et négligez la résistance ohmique.*** **3.5 pt.**

At resonance, the whole energy stored in the "capacitor" is now stored in the kinetic energy of the electrons (points also given if directly next formula is applied). 0.5 pt.

Formally this means $E_C = \frac{1}{2}v^2 m_e N$ where $v$ is the velocity, $m_e$ is the mass of the electrons and $N = n\frac{4\pi R^3}{3}$ the number of moving electrons (not to be mistaken with the charge $Q$ or $\frac{Q}{e}$). Hence $v = Q_0(\omega_0)\sqrt{\frac{1}{Cm_e N}}$. 1 pt.

SOLUTIONS

The current density is $j = vne$. 0.5 pt.

And therefore the maximal current is $I = jA$ where $A = \pi R^2$ is the cross section area of the ball. 0.5 pt.

Therefore $I = vne\pi R^2 = ne\pi R^2 Q_0(\omega_0)\sqrt{\frac{1}{Cm_eN}} = eQ_0(\omega_0)\sqrt{\frac{3\pi nR}{4Cm_e}} = eQ_0(\omega_0)\sqrt{\frac{n}{3\epsilon_0 m_e}}$.
(different forms possible) 0.5 pt.

Using $I = \omega_0 Q_0(\omega_0)$ we get $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{3m_e\epsilon_0}}$ 0.5 pt.

*There is also a solution using $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Points are given accordingly.*

**v. Laquelle des images 1.1.1 représente la réponse de phase (phase en fonction de la fréquence) $\varphi(\omega)$ ? Justifiez brièvement.**

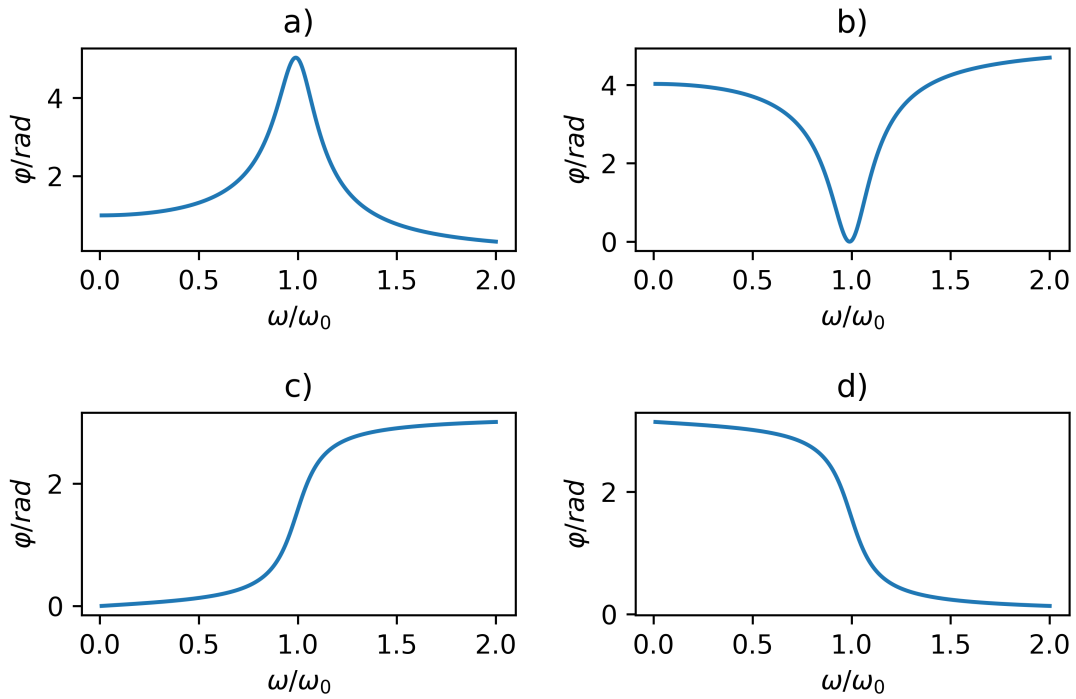



FIGURE 1.1.1: Possibles réponses de phase pour un circuit oscillant avec résistance.

The images a) and b) are resonance curves and do not represent the phase. For $\omega = 0$ we are in phase, so $\varphi = 0$ and hence c). **1 pt.**
If a student argues that electrons are moving and due to their negative charge there is a sign flip, answer d) is also fine (explanation important). 1 pt.

## Partie C. Mise au point *5.5 pt.*

**i. Nous générons maintenant un champ électrique inhomogène avec un faisceau laser focalisé. Quelle fréquence du laser choisir de façon à ce que la bille de métal soit attirée par le point focal ? Précisez toutes les gammes de fréquences possibles et justifiez.** ***Remarque : la fréquence du laser peut être choisie librement.*** **4 pt.**

In case of an inhomogeneous static electric field, a metallic object gets attracted towards higher field strength. 1 pt.

Let $\omega$ be the frequency of the laser. If $\omega < \omega_0$, the electrons are fast enough to follow the external electric field of the laser similar to a static case of a static inhomogeneous electric field. Therefore the ball gets attracted by the focal point. 1 pt.

In case $\omega > \omega_0$, the electrons are out of phase meaning the ball is in average opposite charged that in case of a static field. This means it is repelled from the focus. 1 pt.

At resonance $\omega = \omega_0$, the ball will not move. 0.5 pt.

Therefore we have to choose a frequency smaller than the resonance frequency. 0.5 pt.

**ii. Nous sélectionnons une fréquence dans la gamme de fréquences mentionnée ci-dessus et nous plaçons la boule au milieu du faisceau, à proximité du point focal. Décrivez son mouvement (qualitativement).** **1 pt.**

The ball is attracted by the higher intensities and it is therefore attracted by the focal point. Hence the laser acts as restoring force. 0.5 pt.

and therefore the ball will oscillate around the focal point. 0.5 pt.

**iii. Un laser au $CO_2$ a une longueur d'onde de $\lambda = 10.6\,\mu\text{m}$ (pour un laser c'est une grande longueur d'onde). Quelle est la densité d'électrons minimale $n$ pour attirer la boule vers le point focal ?** **0.5 pt.**

From the condition above we have $\frac{2\pi c}{\lambda} = \omega \leq \omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{3 m_e \epsilon_0}}$.
Therefore $n = \frac{12\pi^2 c^2 m_e \epsilon_0}{\lambda^2 e^2} = 3.00 \times 10^{25}\,\text{m}^{-3}$. 0.5 pt.

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

# Olympiades de Physique

## Tour final

online, 6 juin 2020

| | | |
|---|---|---|
| **Partie théorique 2** | : | **1 problème** |
| Durée | : | 60 minutes |
| Total | : | 16 points |
| Moyens autorisés | : | Calculatrice simple<br>Matériel pour écrire et dessiner<br>Une feuille de notes A4 manuscrite écrite des deux côtés<br>Ordinateur pour accéder à l'examen et contacter le surveillant<br>Téléphone de contact avec le surveillant<br>Imprimante pour imprimer l'examen |

# Bonne chance !


Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

# Problèmes théoriques

Durée: 60 minutes
Cotation: 16 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

# Constantes fondamentales

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence de la transition hyperfine du césium | $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ | $=$ | $9\,192\,631\,770$ | $\mathrm{s}^{-1}$ |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c$ | $=$ | $299\,792\,458$ | $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ |
| Constante de Planck | $h$ | $=$ | $6.626\,070\,15\times10^{-34}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ |
| Charge élémentaire | $e$ | $=$ | $1.602\,176\,634\times10^{-19}$ | $\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$ |
| Constante de Boltzmann | $k_{\mathrm{B}}$ | $=$ | $1.380\,649\times10^{-23}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante d'Avogadro | $N_{\mathrm{A}}$ | $=$ | $6.022\,140\,76\times10^{23}$ | $\mathrm{mol}^{-1}$ |
| Efficacité lumineuse | $K_{\mathrm{cd}}$ | $=$ | $683$ | $\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$ |
| Constante magnétique | $\mu_0$ | $=$ | $4\pi\times10^{-7}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante électrique | $\varepsilon_0$ | $\approx$ | $8.854\,187\,82\times10^{-12}$ | $\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ |
| Constante des gaz | $R$ | $\approx$ | $8.314\,462\,618$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante de Stefan-Boltzmann | $\sigma$ | $\approx$ | $5.670\,374\,419\times10^{-8}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$ |
| Constante gravitationnelle | $G$ | $=$ | $6.674\,30(15)\times10^{-11}$ | $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Masse de l'électron | $m_{\mathrm{e}}$ | $=$ | $9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Masse du proton | $m_{\mathrm{n}}$ | $=$ | $1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Masse du neutron | $m_{\mathrm{p}}$ | $=$ | $1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Accélération normale de la pesanteur | $g_{\mathrm{n}}$ | $=$ | $9.806\,65$ | $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |

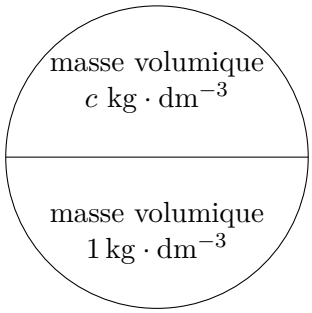
## Problème 2.1: Cylindre non-homogène *(16 points)*

Ce problème étudie un cylindre non-homogène, dont chaque moitié est composée d'un matériau de masse volumique différente.

### Partie A. Centre de masse du cylindre *(4 points)*

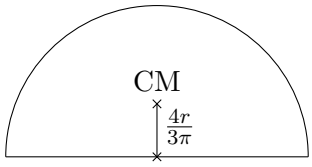
Le cylindre que nous étudions a un rayon $r$ et une longueur $l$.

Voici une section (circulaire) du cylindre :




La moitié inférieure est composée d'un matériau de masse volumique $1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}$, tandis que la moitié supérieure est composée d'un matériau de masse volumique $c\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}$, où $c$ est un paramètre $0 < c < 1$.

On rappelle que dans un demi-cylindre de rayon $r$, le centre de masse se trouve à une distance $\frac{4r}{3\pi}$ de l'axe du demi-cylindre, comme on peut le voir dans cette représentation de la section :




**i. (1 pt.)** Calculez la masse $M$ du cylindre entier non-homogène, et la distance $d$ entre le centre géométrique et le centre de masse du cylindre entier non-homogène en fonction des paramètres $r$, $l$, $c$.

**ii. (3 pt.)** Calculez le moment d'inertie $I$ du cylindre entier non-homogène par rapport à son axe géométrique, et son moment d'inertie $I_{\mathrm{CM}}$ par rapport à l'axe parallèle à l'axe géométrique, mais passant par son centre de masse. Les réponses doivent dépendre de $r$, $l$, $c$.

### Partie B. Petites oscillations *(4 points)*

Supposons que l'axe géométrique est fixé en position horizontale, mais le cylindre peut bouger librement (c'est-à-dire tourner) sans frottement autour de son axe.

**i. (1 pt.)** Quelle est l'unique position d'équilibre stable de ce corps ?

**ii. (3 pt.)** Depuis la position d'équilibre, nous tournons le cylindre de 0.1 rad. Après avoir lâché le cylindre, il oscille autour de sa position d'équilibre. Trouvez l'équation du mouvement pour l'angle $\phi$ et estimez la période d'oscillation du cylindre en fonction de $c$, $r$, $l$.

### Partie C. Roulement sur un plan horizontal *(4 points)*

Maintenant, supposons que le cylindre est libre de bouger sur un plan horizontal sous l'influence de la gravité, de la réaction du plan et de son frottement.

Pour simplifier, nous supposons que le coefficient de frottement statique entre le cylindre et le plan est infini. Par conséquent, tant que le cylindre touche le plan, il ne glisse pas.

Supposons qu'au temps $t_0 = 0$ le cylindre est en position d'équilibre, mais qu'il a une vitesse angulaire $\omega$.

**i. (4 pt.)** Si $\omega$ est suffisamment petite, le cylindre subit un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre. Quelle est la valeur minimum $\omega_0$ de $\omega$ qui permet au cylindre d'échapper à cette boucle et de commencer à rouler infiniment dans la même direction ? La réponse doit être donnée soit en fonction des paramètres $c$, $r$, $l$ soit, par commodité, en fonction des paramètres $M$, $r$, $d$, $I_{\mathrm{CM}}$.

### Partie D. Parcours cahoteux *(4 points)*

Prenons maintenant un scénario différent. Supposons que le cylindre n'est plus libre de bouger sous l'action de la gravité et de la réaction du plan, mais que sa vitesse angulaire est maintenue constante par un agent externe. Cet agent externe n'applique que de la quantité de mouvement au cylindre, la force totale appliquée sur le cylindre par l'agent externe est nulle.

Pour simplifier, nous supposons toujours que le coefficient de frottement statique entre le cylindre et le plan est infini, et que par conséquent, tant que le cylindre touche le plan, il ne glisse pas.

**i. (4 pt.)** Si $\omega$ est suffisamment grand, le mouvement du cylindre sera « cahoteux ». Calculez la valeur minimum $\omega_1$ de $\omega$ qui permet au cylindre de se détacher du sol. La réponse doit être donnée soit en fonction des paramètres $c$, $r$, $l$ soit, par commodité, en fonction des paramètres $M$, $d$, $I_{\mathrm{CM}}$.

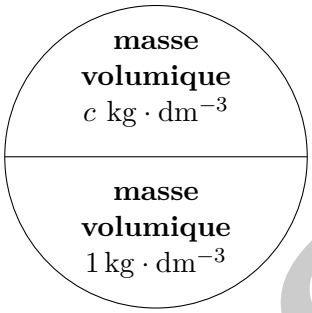
# Problèmes théoriques: solutions

## Problème 2.1: Cylindre non-homogène *16 pt.*

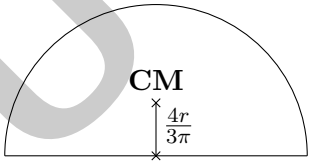
**Ce problème étudie un cylindre non-homogène, dont chaque moitié est composée d'un matériau de masse volumique différente.**

### Partie A. Centre de masse du cylindre *4 pt.*

**Le cylindre que nous étudions a un rayon $r$ et une longueur $l$.**
**Voici une section (circulaire) du cylindre :**




**La moitié inférieure est composée d'un matériau de masse volumique $1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}$, tandis que la moitié supérieure est composée d'un matériau de masse volumique $c\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}$, où $c$ est un paramètre $0 < c < 1$.**
**On rappelle que dans un demi-cylindre de rayon $r$, le centre de masse se trouve à une distance $\frac{4r}{3\pi}$ de l'axe du demi-cylindre, comme on peut le voir dans cette représentation de la section :**




**i. Calculez la masse $M$ du cylindre entier non-homogène, et la distance $d$ entre le centre géométrique et le centre de masse du cylindre entier non-homogène en fonction des paramètres $r$, $l$, $c$.** **1 pt.**

The mass of the cylinder is

$$M = \frac{\pi r^2 l}{2}\,(1+c)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}.$$

The center of mass is inside the heavier part of the cylinder, and its distance from the center is given by the formula

$$d = \frac{4r}{3\pi}\cdot\frac{1-c}{1+c}.$$

The length $l$ plays no role in this second computation. 1 pt.

**ii. Calculez le moment d'inertie $I$ du cylindre entier non-homogène par rapport à son axe géométrique, et son moment d'inertie $I_{\mathrm{CM}}$ par rapport à l'axe parallèle à l'axe géométrique, mais passant par son centre de masse. Les réponses doivent dépendre de $r$, $l$, $c$.** **3 pt.**

SOLUTIONS

In order to compute the moment of inertia with respect to the geometrical axis, we observe that for a homogeneous half-cylinder the moment of inertia is half the moment of inertia of a full homogeneous cylinder.
In particular, if $M_\mathrm{f}$ is the mass of a full homogeneous cylinder of radius $r$, its moment of inertia w.r.t. the geometrical axis of the cylinder is

$$I_\mathrm{f} = \frac{1}{2} M_\mathrm{f} r^2.$$

For a half homogeneous cylinder, the moment of inertia is half of the corresponding inertia for the full cylinder. Notice that if $M_\mathrm{f}$ is the mass of the full cylinder, then the mass of the half-cylinder is $M_\mathrm{h} = \frac{M_\mathrm{f}}{2}$.

$$I_\mathrm{h} = \frac{1}{2}\frac{M_\mathrm{f}}{2} r^2 = \frac{1}{2} M_\mathrm{h} r^2$$

Moments of inertia are additive, so in our case we have that the moment of inertia of the non-homogeneous cylinder w.r.t. the geometrical axis is

$$I = \frac{1}{2}\left(M_\mathrm{u} + M_\mathrm{b}\right) r^2,$$

where $M_\mathrm{b}$ is the mass of the bottom part, and $M_\mathrm{u}$ is the mass of the upper part of the cylinder, which can be expressed as

$$I = \frac{1}{2}\frac{\pi r^2 l}{2}(1+c)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3} r^2 = \frac{\pi r^4 l}{4}(1+c)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}.$$

The moment of inertia w.r.t. the axis passing through the center of mass can be obtained with Steiner's theorem :

$$I_\mathrm{CM} = I - Md^2,$$

where $d$ is the distance between the axis of the cylinder and the center of mass, so :

$$\begin{aligned} I_\mathrm{CM} &= \frac{\pi r^4 l}{4}(1+c)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3} - \pi r^2 l \frac{1+c}{2}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}\left(\frac{4r}{3\pi}\cdot\frac{1-c}{1+c}\right)^2 \\ &= \pi r^4 l \frac{1+c}{2}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\frac{(1-c)^2}{(1+c)^2}\right). \end{aligned}$$

3 pt.

*The distribution of points depends on the solution path ; for example :*
- *Moment of inertia of a full cylinder w.r.t. its geometrical axis : 0.5 points*
- *Moment of inertia of a half-cylinder w.r.t. the geometrical axis of the (whole) cylinder : 0.5 points*
- *Moment of inertia of the inhomogeneous cylinder w.r.t. its geometrical axis : 1 point*
- *Moment of inertia of the inhomogeneous cylinder w.r.t. an axis parallel to the geometrical one passing through the center of mass, using Steiner's theorem : 1 point*

## Partie B. Petites oscillations

*4 pt.*

**Supposons que l'axe géométrique est fixé en position horizontale, mais le cylindre peut bouger librement (c'est-à-dire tourner) sans frottement autour de son axe.**

**i. Quelle est l'unique position d'équilibre stable de ce corps ?** **1 pt.**

SOLUTIONS

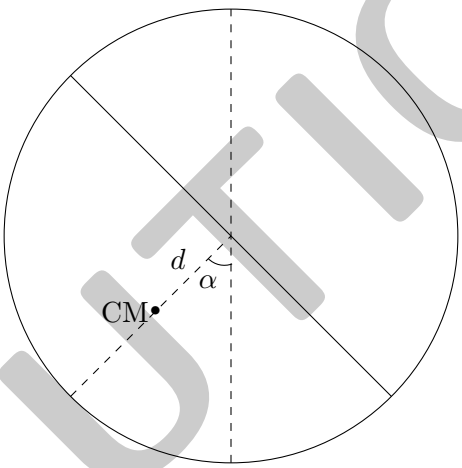
The only stable equilibrium position is the one where the center of mass is directly below the geometrical axis. 1 pt.

**ii. Depuis la position d'équilibre, nous tournons le cylindre de $0.1\,\mathrm{rad}$. Après avoir lâché le cylindre, il oscille autour de sa position d'équilibre. Trouvez l'équation du mouvement pour l'angle $\phi$ et estimez la période d'oscillation du cylindre en fonction de $c$, $r$, $l$.** **3 pt.**

In order to study the motion of this body, we apply the law

$$\mu = I\gamma,$$

where $\mu$ is the moment of the forces acting on the cylinder w.r.t. the geometrical axis (which is fixed in this motion), $I$ is the moment of inertia of the cylinder w.r.t. the geometrical axis, and $\gamma$ is the angular acceleration of the cylinder.
If the angle between the center of mass and the negative vertical direction is $\alpha$, as seen in this picture :




then the moment of gravity acting on the cylinder is

$$\mu = -Mgd\sin(\alpha)\,,$$

so we have

$$\gamma = -\frac{Mgd}{I}\sin(\alpha)\,.$$

For small oscillations, we can approximate $\sin(\alpha) \approx \alpha$, and get the approximate equation of angular motion

$$\gamma \approx -\frac{Mgd}{I}\alpha.$$

This is a harmonic oscillation with period

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2I}{\pi r^2 l\,(1+c)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^{-3}gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi r\,(1+c)}{8g\,(1-c)}}.$$

3 pt.

*The distribution of points depends on the solution path ; for example :*

SOLUTIONS

- *Computing the right momentum of forces acting on the cylinder as a function of $\alpha$ (gravitational force w.r.t. the geometrical center) : 0.5 points*
- *Applying the fundamental law of rotational mechanics, i.e., $\mu = I\gamma$, to compute the angular acceleration : 0.5 points*
- *Using the approximation $\sin(\alpha) \approx \alpha$ for small $\alpha$ : 0.5 points*
- *Computing the period of small oscillations recognizing that the angular acceleration follows the harmonic oscillator law : 1.5 points*

## Partie C. Roulement sur un plan horizontal

*4 pt.*

**Maintenant, supposons que le cylindre est libre de bouger sur un plan horizontal sous l'influence de la gravité, de la réaction du plan et de son frottement. Pour simplifier, nous supposons que le coefficient de frottement statique entre le cylindre et le plan est infini. Par conséquent, tant que le cylindre touche le plan, il ne glisse pas.**
**Supposons qu'au temps $t_0 = 0$ le cylindre est en position d'équilibre, mais qu'il a une vitesse angulaire $\omega$.**

**i. Si $\omega$ est suffisamment petite, le cylindre subit un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre. Quelle est la valeur minimum $\omega_0$ de $\omega$ qui permet au cylindre d'échapper à cette boucle et de commencer à rouler infiniment dans la même direction ? La réponse doit être donnée soit en fonction des paramètres $c$, $r$, $l$ soit, par commodité, en fonction des paramètres $M$, $r$, $d$, $I_{\mathrm{CM}}$.** **4 pt.**

During the motion, the sum of kinetic and (gravitational) potential energy is constant. In order to escape an infinite loop, the cylinder must have enough kinetic energy to allow its center of mass to reach the position directly above the geometrical axis (not below).
Thus, we compute the kinetic energy of the body at time $t_0$, which can be split into the sum of two components : translational energy of the CM and rotational energy around the CM.
The first component is

$$K_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2 = \frac{1}{2} M \omega_0^2 (r-d)^2 ,$$

while the rotational energy is

$$K_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega_0^2 .$$

Assuming for convention that the zero of the potential energy coincides with the height of the ground, we have that at time $t_0$ the potential energy is

$$P_0 = Mg(r-d) ,$$

while at the threshold point, i.e., when the CM is directly above the geometrical axis, the potential energy is

$$P_1 = Mg(r+d) .$$

Thus the conservation of energy gives the threshold condition

$$K_{\mathrm{t}} + K_{\mathrm{r}} + P_0 = P_1 ,$$

$$|\omega_0| = \sqrt{\frac{4Mgd}{M(r-d)^2 + I_{\mathrm{CM}}}} .$$

4 pt.

*The distribution of points depends on the solution path ; for example :*

SOLUTIONS

- *Recognizing that the total energy is conserved : 1 point*
- *Computing the right formula for the kinetic energy at the lowest point of motion : 0.5 points*
- *Computing the right formula for the potential energy of the cylinder (at any point of the motion) : 0.5 points*
- *Realizing that the threshold angular speed is the one which allows the center of mass of the cylinder to reach its highest possible point with zero angular speed : 1 point*
- *Writing the right formula for the threshold angular speed using conservation of energy : 1 point*

## Partie D. Parcours cahoteux

~~4 pt.~~

**Prenons maintenant un scénario différent. Supposons que le cylindre n'est plus libre de bouger sous l'action de la gravité et de la réaction du plan, mais que sa vitesse angulaire est maintenue constante par un agent externe. Cet agent externe n'applique que de la quantité de mouvement au cylindre, la force totale appliquée sur le cylindre par l'agent externe est nulle.**
**Pour simplifier, nous supposons toujours que le coefficient de frottement statique entre le cylindre et le plan est infini, et que par conséquent, tant que le cylindre touche le plan, il ne glisse pas.**

**i. Si $\omega$ est suffisamment grand, le mouvement du cylindre sera « cahoteux ». Calculez la valeur minimum $\omega_1$ de $\omega$ qui permet au cylindre de se détacher du sol. La réponse doit être donnée soit en fonction des paramètres $c$, $r$, $l$ soit, par commodité, en fonction des paramètres $M$, $d$, $I_{\mathbf{CM}}$.** **4 pt.**

As long as the cylinder does not detach from the ground, the center of mass undergoes a motion which is the composition of a uniform translation along the direction of motion of the cylinder, and a rotation around the geometrical center of the cylinder.
The cylinder detaches from the ground if the gravitational force is not strong enough to generate sufficient centripetal force to maintain the rotation of the center of mass.
If the angle between the center of mass and the negative vertical direction is $\alpha$, then the vertical centripetal acceleration needed for the center of mass to stay on course is given by

$$\omega^2 d\cos(\alpha),$$

where the positive direction is upwards. The strongest downward centripetal force is

$$a = -\omega^2 d,$$

which must be smaller than gravity (in absolute value) if we want the cylinder not to detach from the ground. Thus we get the condition

$$|\omega_1| = \sqrt{\frac{g}{d}}.$$

4 pt.

*The distribution of points depends on the solution path ; for example :*

- *Realizing that the condition for the cylinder to detach from the ground is that the required angular acceleration of the center of mass to stay on a circular course must be bigger than the gravitational force (the threshold being equality) : 1.5 points*
- *Computing the right centripetal acceleration for the (center of mass of the) inhomogeneous cylinder : 0.5 points*
- *Realizing that the threshold angular speed is given by studying the motion of the CM at its highest point on the circular trajectory : 0.5 points*
- *Computing the right threshold for the angular speed : 1.5 points*

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

# Olympiades de Physique

## Tour final

online, 6 juin 2020

| | | |
|---|---|---|
| **Partie théorique 3** | : | **1 problème** |
| Durée | : | 60 minutes |
| Total | : | 16 points |
| Moyens autorisés | : | Calculatrice simple<br>Matériel pour écrire et dessiner<br>Une feuille de notes A4 manuscrite écrite des deux côtés<br>Ordinateur pour accéder à l'examen et contacter le surveillant<br>Téléphone de contact avec le surveillant<br>Imprimante pour imprimer l'examen |

# Bonne chance !


Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

# Problèmes théoriques

Durée: 60 minutes
Cotation: 16 points

Commencez chaque problème sur une nouvelle feuille afin de faciliter la correction.

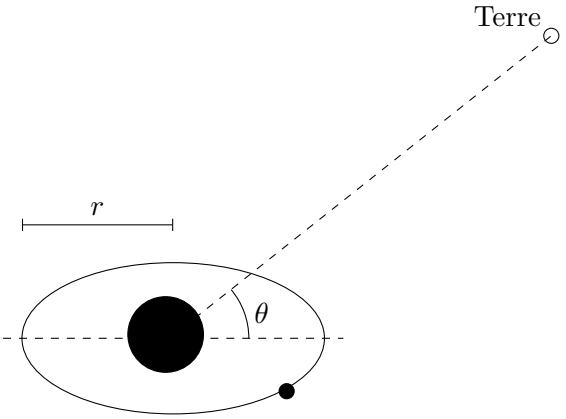
# Constantes fondamentales

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence de la transition hyperfine du césium | $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ | $=$ | $9\,192\,631\,770$ | $\mathrm{s}^{-1}$ |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c$ | $=$ | $299\,792\,458$ | $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ |
| Constante de Planck | $h$ | $=$ | $6.626\,070\,15\times10^{-34}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ |
| Charge élémentaire | $e$ | $=$ | $1.602\,176\,634\times10^{-19}$ | $\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$ |
| Constante de Boltzmann | $k_{\mathrm{B}}$ | $=$ | $1.380\,649\times10^{-23}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante d'Avogadro | $N_{\mathrm{A}}$ | $=$ | $6.022\,140\,76\times10^{23}$ | $\mathrm{mol}^{-1}$ |
| Efficacité lumineuse | $K_{\mathrm{cd}}$ | $=$ | $683$ | $\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$ |
| Constante magnétique | $\mu_0$ | $=$ | $4\pi\times10^{-7}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante électrique | $\varepsilon_0$ | $\approx$ | $8.854\,187\,82\times10^{-12}$ | $\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ |
| Constante des gaz | $R$ | $\approx$ | $8.314\,462\,618$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Constante de Stefan-Boltzmann | $\sigma$ | $\approx$ | $5.670\,374\,419\times10^{-8}$ | $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$ |
| Constante gravitationnelle | $G$ | $=$ | $6.674\,30(15)\times10^{-11}$ | $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |
| Masse de l'électron | $m_{\mathrm{e}}$ | $=$ | $9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Masse du proton | $m_{\mathrm{n}}$ | $=$ | $1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Masse du neutron | $m_{\mathrm{p}}$ | $=$ | $1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$ | $\mathrm{kg}$ |
| Accélération normale de la pesanteur | $g_{\mathrm{n}}$ | $=$ | $9.806\,65$ | $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ |

## Problème 3.1: Spectroscopie Doppler *(16 points)*

Le prix Nobel de physique 2019 a été décerné pour moitié aux astrophysiciens suisses Michel Mayor et Didier Queloz pour la première découverte, en 1995, d'une exoplanète (gravitant autour d'une étoile de la séquence principale).

La méthode utilisée est appelée spectroscopie Doppler, ou méthode des vitesses radiales, et consiste à observer les mouvements de l'étoile causés par sa planète satellite. L'observation des fluctuations du spectre de l'étoile permet, par effet Doppler, de déduire les fluctuations de la vitesse de l'étoile le long de l'axe d'observation.




On admet que l'exoplanète se déplace sur un cercle de rayon $r$, vu sous un angle $\theta$ depuis la Terre, autour du centre de masse qui lui est commun avec l'étoile. On note $M$ la masse de l'étoile et $m$ celle de la planète.

**i. (5 pt.)** Déterminez la période $T$ de l'oscillation du spectre de l'étoile en fonction des paramètres donnés.

**ii. (3 pt.)** Déterminez la variation maximale relative $\frac{\Delta f_{\text{rec}}}{f_{\text{em}}}$ de l'oscillation du spectre de l'étoile en fonction des paramètres donnés.

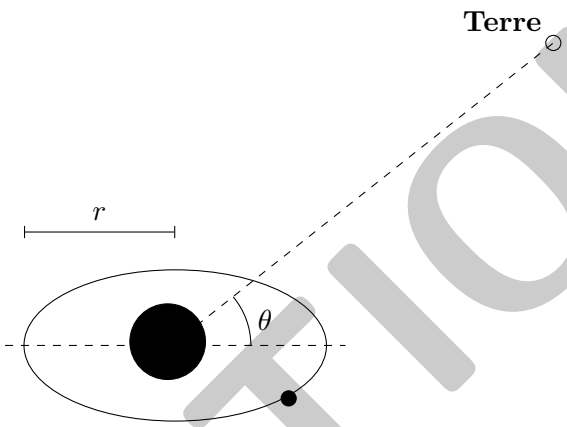
**iii. (4 pt.)** Discutez la praticité de cette méthode en fonction des valeurs possibles des paramètres.

**iv. (4 pt.)** Dans le cas de 51 Pegasi b, la première planète découverte, la période $T$ est d'environ quatre jours et $\frac{\Delta f_{\text{rec}}}{f_{\text{em}}} \approx 3.74 \times 10^{-7}$. La masse de son étoile a été estimée à $M \approx 2.23 \times 10^{30}$ kg. Que peut-on dire concernant la masse de la planète, que l'on suppose beaucoup plus petite que la masse de l'étoile ?

# Problèmes théoriques: solutions

## Problème 3.1: Spectroscopie Doppler *16 pt.*

**Le prix Nobel de physique 2019 a été décerné pour moitié aux astrophysiciens suisses Michel Mayor et Didier Queloz pour la première découverte, en 1995, d'une exoplanète (gravitant autour d'une étoile de la séquence principale).**
**La méthode utilisée est appelée spectroscopie Doppler, ou méthode des vitesses radiales, et consiste à observer les mouvements de l'étoile causés par sa planète satellite. L'observation des fluctuations du spectre de l'étoile permet, par effet Doppler, de déduire les fluctuations de la vitesse de l'étoile le long de l'axe d'observation.**




**On admet que l'exoplanète se déplace sur un cercle de rayon $r$, vu sous un angle $\theta$ depuis la Terre, autour du centre de masse qui lui est commun avec l'étoile. On note $M$ la masse de l'étoile et $m$ celle de la planète.**

**i. Déterminez la période $T$ de l'oscillation du spectre de l'étoile en fonction des paramètres donnés.** **5 pt.**

*From symmetry arguments, the trajectory of the star is circular as well (with same center and period as the planet). Let's name the radius $R$.*

*The gravitational force $F_G$ on the planet is equal to the centripetal force $F_{CP}$ acting on the planet :*

$$F_G = \frac{GMm}{(r+R)^2},$$
$$F_{CP} = m\omega^2 r,$$

$$\frac{GMm}{(r+R)^2} = m\omega^2 r, \tag{1}$$

*where $\omega$ is the angular velocity with which the planet orbits around the center of mass. Solving equation (1) for $\omega$ we find*

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{(r+R)^2\, r}}.$$

SOLUTIONS

*The period of the planet is related to the angular velocity by* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *:*

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(r+R)^2\, r}{GM}}. \tag{2}$$

*Since* $R$ *is not a given parameter, we need to eliminate it by considering the forces acting on the star. Similarly to the planet, the gravitational force is the same as the centripetal force acting on the star :*

$$\frac{GMm}{(r+R)^2} = M\omega^2 R,$$

*where the circular motion of the star has radius* $R$ *and the same angular velocity* $\omega$ *as the planet. Using equation* (1)*, we find that* $m\omega^2 r = M\omega^2 R$ *and thus*

$$R = \frac{m}{M} r.$$

*Inserting this relation into equation* (2)*, we obtain*

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\left(r + \frac{m}{M} r\right)^2 r}{GM}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \left(1 + \frac{m}{M}\right). \end{aligned}$$

*This is a generalization of Kepler's third law.*

| | |
|---|---|
| (A1) Circular concentric trajectory or conservation of momentum | 1 pt. |
| (A2) Dynamics equations | 0.5 pt. |
| (A3) Circular movement kinematics equations | 0.5 pt. |
| (A4) Equating the period | 1 pt. |
| (A5) Correct calculations | 1 pt. |
| (A6) Correct final answer (or equivalent) for $T$ (if the simpler Kepler's third law is found without motivation, do not give the point ; if it is motivated (additional hypothesis $m \ll M$), give 0.5 point) | 1 pt. |

**ii. Déterminez la variation maximale relative $\frac{\Delta f_{\mathrm{rec}}}{f_{\mathrm{em}}}$ de l'oscillation du spectre de l'étoile en fonction des paramètres donnés.** **3 pt.**

*The speed of the star can be obtained by using* $V = \frac{2\pi R}{T}$ *since the star travels the circumference in one period. Using the result from question i) we find*

$$V = R\sqrt{\frac{GM}{r^3}}\frac{M}{M+m}.$$

*Now we use again* $R = \frac{m}{M} r$ *to find*

$$V = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{GM}{r}}\frac{M}{M+m} = \sqrt{\frac{GM}{r}}\frac{m}{M+m}.$$

SOLUTIONS

*The extrema of this velocity projected onto the line of sight from the point of the earth are* $V_{em} = \pm V \cos\theta$.

*Next, we use the Doppler effect for a static receiver* ($v_{rec} = 0$)*:*

$$f_{rec} = \frac{c}{c - V_{em}} f_{em},$$

*where* $f_{em}$ *is the emitted frequency and* $f_{rec}$ *is the received frequency and* $c$ *is the speed of light. Note that it is permissible to use the classical Doppler effect if we assume* $V_{em}$ *to be small - we will verify this in question iv). The variation in frequency is given as the difference of the received frequencies for velocities* $+V_{em}$ *and* $-V_{em}$*:*

$$\frac{f_{rec,\ max} - f_{rec,\ min}}{f_{em}} = \frac{c}{c - |V_{em}|} - \frac{c}{c + |V_{em}|} = \frac{2c\,|V_{em}|}{c^2 - V_{em}^2}.$$

*Inserting the expression for* $V_{em}$ *we find*

$$\frac{\Delta f_{rec}}{f_{em}} = \frac{2c\sqrt{\frac{GM}{r}}\frac{m}{m+M}\cos(\theta)}{c^2 - \frac{GM}{r}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2\cos^2(\theta)}.$$

| | |
|---|---|
| (B1) Correct velocity norm | 1 pt. |
| (B2) $\cos(\theta)$ from the projection | 1 pt. |
| (B3) Using Doppler's effect | 0.5 pt. |
| (B4) Correct application of Doppler's effect, including (possibly implicitly) $v_{\text{rec}} = 0$ | 0.5 pt. |

**iii. Discutez la praticité de cette méthode en fonction des valeurs possibles des paramètres.** **4 pt.**

*For* $m \ll M$*,* $T$ *doesn't change much (Kepler's law) but* $\frac{\Delta f_{rec}}{f_{em}} \sim \frac{m}{M} \to 0$.

*For large* $r$*,* $T$ *gets large but* $\frac{\Delta f_{rec}}{f_{em}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \to 0$.

*For* $\theta \to \frac{\pi}{2}$*,* $T$ *doesn't change but* $\frac{\Delta f_{rec}}{f_{em}} \sim \cos(\theta) \to 0$.

*So this method performs better for massive planets close to their star (so-called "hot Jupiters") with a small enough inclination* $\theta$.

| | |
|---|---|
| (C1) Influence of small mass ratio | 1 pt. |
| (C2) Influence of large planet distance | 1 pt. |
| (C3) Commenting on both the period $T$ and $\frac{\Delta f_{\text{rec}}}{f_{\text{em}}}$ | 1 pt. |
| (C4) Influence of high inclination | 1 pt. |

**iv. Dans le cas de 51 Pegasi b, la première planète découverte, la période** $T$ **est d'environ quatre jours et** $\frac{\Delta f_{\text{rec}}}{f_{\text{em}}} \approx 3.74 \times 10^{-7}$**. La masse de son étoile a**

SOLUTIONS

**été estimée à $M \approx 2.23 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Que peut-on dire concernant la masse de la planète, que l'on suppose beaucoup plus petite que la masse de l'étoile ?** **4 pt.**

*From question iii), we observe that if $m \ll M$, the ratio $\frac{\Delta f_{rec}}{f_{em}}$ is also small. Hence, we can approximate*

$$\frac{\Delta f_{rec}}{f_{em}} \approx 2\frac{V_{em}}{c}.$$

*Solving for $V_{em}$ we find*

$$V_{em} = \frac{c}{2}\frac{\Delta f_{rec}}{f_{em}} = 56.1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

*Thus as long as $\theta$ is not too large, the velocity can be treated non-relativistically and we can justify the classical Doppler equation in question ii).*

*Using $VT = 2\pi R$, $MR = mr$ and inserting in the equation for the velocity of question ii), we find*

$$V = \sqrt{2\pi\frac{Gm}{VT}}\frac{m}{m+M}.$$

*Solving for $M$ and bringing to standard form, this would give a cubic equation that is not practical to solve. However, with $m$ much smaller than $M$, we have*

$$\frac{m}{m+M} \approx \frac{m}{M}.$$

*This simplifies the above formula to*

$$V^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2\pi\frac{G}{T}}\frac{m^{\frac{3}{2}}}{M}.$$

*Solving for $m$ and using $V_{em} = V cos(\theta)$ yields*

$$m = \frac{V_{em}}{cos(\theta)}M^{\frac{2}{3}}\left(\frac{T}{2\pi G}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$\cos(\theta)$ *is positive and monotonically decreasing in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ with values in $[0, 1]$. Therefore $m$ grows monotonically with $\theta$, thus the value at $\theta = 0$ is a minimum. For $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $m \to \infty$.*

*Therefore all we can say is that $m \geq m(\theta = 0)$ (together with the assumption on the mass ratio).*

*Numerically :*

$$m(\theta = 0) \approx 8.97 \times 10^{26}\,\mathrm{kg}.$$

| | |
|---|---|
| (D1a) Simplification of $\frac{\Delta f_{\mathrm{rec}}}{f_{\mathrm{em}}}$ for small velocity | 1 pt. |
| (D1b) Correct calculation | 1 pt. |
| (D2) Reasonable numerical value | 1 pt. |
| (D3) Value is a minimum | 1 pt. |

SOLUTIONS