PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

Aarau, 19. - 20. März 2022

Theorie Teil 1	**:**	**3 Aufgaben**
Dauer	:	180 Minuten
Total	:	48 Punkte (3×16)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Bärbel und Paul Geissbühler Stiftung
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#e624ed02

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618…		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419…	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Theoretische Probleme

Zeit: 180 Minuten
Maximalpunktzahl: 48 Punkte (3×16)

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiter zu lesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Aufgabe 1.1: Tiefenschärfe *(16 Punkte)*

Du hast soeben eine Kamera erhalten. Sie besteht aus einer dünnen Linse mit der Brennweite $f = 100\,\mathrm{mm}$, die mit einer Blende mit variablem Durchmesser d versehen ist, sowie einem Sensor, der sich in einem variablen Abstand s befindet. Der Durchmesser der Blende wird häufig durch die *Blendenzahl* $N = \frac{f}{d}$ charakterisiert.

Teil A. Einführung in die Fotografie *(3.5 Punkte)*

i. (1 pt.) In welchem Abstand $x(f, s)$ (von der Linse aus gemessen) muss die Kamera vom zu fotografierenden Objekt platziert werden, um ein scharfes Bild zu erhalten?

ii. (1.5 pt.) Wie gross ist die transversale Vergrösserung des Bildes auf dem Sensor in Abhängigkeit von s und x, mit welchem Vorzeichen und warum?

iii. (1 pt.) Wenn du ein Foto von einem sehr weit entfernten Objekt (z. B. dem Mond) machen möchtest, wie wählst du s?

Teil B. Unschärfe und Schärfe *(8 Punkte)*

Wenn du die in A.i. hergeleitete Beziehung nicht befolgst und das Objekt in $x' \neq x(f, s)$ platzierst, erhältst du ein unscharfes Bild. Konkret heisst das: Wenn das zu fotografierende Objekt ein Punkt ist, wird sein Bild auf dem Sensor eine Scheibe mit dem Durchmesser c sein, die als *Zerstreuungskreis* bezeichnet wird.

i. (3 pt.) Leite einen Ausdruck für $c(f, N, s, x')$ her. *Hinweis: Betrachte die Fälle $x' < x$ und $x' > x$ anfangs getrennt.*

ii. (0.5 pt.) Wie kannst du die Gesamtschärfe des Bildes erhöhen, ohne das Objekt, die Kamera oder den Sensor zu bewegen?

iii. (2 pt.) Du hältst ein Bild für scharf, wenn der Durchmesser seines Zerstreuungskreises einen bestimmten Wert h nicht überschreitet. Welcher Wertebereich von x' erfüllt diese Bedingung für gegebene Werte f, N, s, h?

iv. (2.5 pt.) Du möchtest einen Elefanten vor einer Mondsichel fotografieren. Dazu öffnest du die Blende auf $N = 10$. Der Sensor mit den Abmessungen 36 mm mal 24 mm besteht aus quadratischen Zellen mit einer Seitenlänge von 10 µm. Bis auf welche minimale Distanz x'_{min} kannst du die Kamera and den Elefanten heranbringen, damit sowohl der Elefant als auch der Mond scharf abgebildet werden, d. h. ihre Zerstreuungskreise kleiner oder gleich gross wie die Zellen des Sensors sind?

Teil C. Kleine Öffnung *(2.5 Punkte)*

i. (2.5 pt.) Das Motiv ist überwiegend himmelblau mit der Wellenlänge 473 nm. Wenn du N zu stark erhöhst, wird das Bild auch bei genug langen Belichtungszeiten schlecht aussehen. Wie hoch ist der maximale Wert von N, den du auf deiner Kamera im Fall von $s = f$ einstellen kannst, ohne dass dieses Problem auftritt?

Teil D. Dicke Linse *(2 Punkte)*

i. (2 pt.) In Wirklichkeit sind die Linsen nicht unendlich dünn. Bestimme ein Problem, das sich aus dieser Tatsache ergibt, und eine Möglichkeit, es zu lösen.

Aufgabe 1.2: Gleitende Leiter *(16 Punkte)*

Teil A. Freistehende Leiter *(4 Punkte)*

Eine Leiter mit Masse M und Länge L steht frei in der Mitte eines Raumes (siehe Abbildung 1.2.1). Zur Zeit $t = 0$ beginnt sie ohne Reibung zu gleiten.

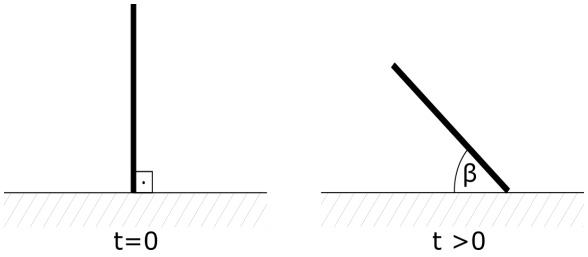


Abbildung 1.2.1: Freistehende Leiter

i. (4 pt.) Bestimme die Beschleunigung des Massenmittelpunktes der Leiter, kurz bevor diese am Boden aufprallt ($\beta = 0$).

Teil B. Leiter an der Wand *(12 Punkte)*

Die gleiche Leiter steht vertikal neber einer Wand (siehe Abbildung 1.2.2). Zur Zeit $t = 0$ beginnt sie ohne Reibung zu gleiten. Wenn die Leiter einen gewissen Winkel α_0 erreicht, löst sie sich von der Wand.

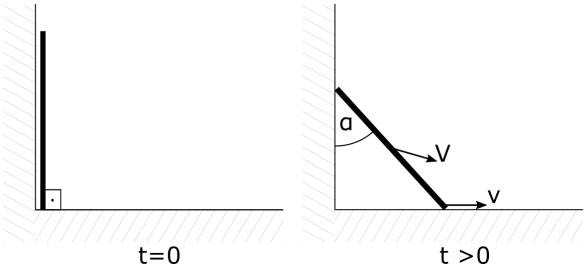


Abbildung 1.2.2: Leiter an der Wand

i. (2 pt.) Welche Bahn beschreibt der Massenmittelpunkt der Leiter bevor sie sich von der Wand löst ($\alpha < \alpha_0$)?

ii. (5.5 pt.) Bestimme die Geschwindigkeit v des unteren Endes der Leiter und die Geschwindigkeit V des Massenmittelpunktes der Leiter, wenn diese einen Winkel $\alpha < \alpha_0$ zur Vertikalen hat.

iii. (3.5 pt.) Bestimme den Winkel α_0.

iv. (1 pt.) Ist die Beschleunigung des Massenmittelpunktes der Leiter, kurz bevor diese am Boden aufschlägt, gleich wie beim Teil A.i.?

Aufgabe 1.3: Betatron *(16 Punkte)*

Hochenergetische Elektronen werden für Kollisionsexperimente und zur Erzeugung von Röntgenstrahlung benötigt. Diese hochenergetischen Elektronen können erzeugt werden, indem sie in einer Vakuumröhre über mehrere Umläufe auf einem kreisförmigen Orbit von Radius R_2 beschleunigt werden.

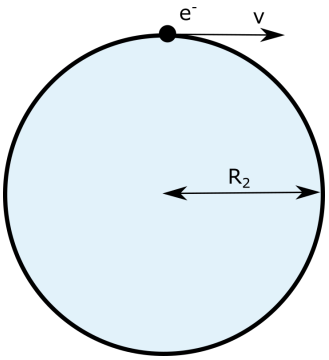


Abbildung 1.3.1: Schematische Aufsicht auf den Betatron mit kreisförmigen Orbit der Elektronen.

Eine Möglichkeit die Energie auf die Elektronen zu übertragen ist mit Hilfe eines zeitlich varienden Magnetfeldes in einem sogennanten Betatron Beschleuniger. Wie in Abbildung 1.3.2 schematisch gezeichnet, verlaufen in einem Betatron parallel zur Vakuumröhre stromführende Spulenwindungen, welche mit Hilfe des Eisenjochs ein Magnetfeld in der Vakuumröhre und in der Lücke im Eisenjoch erzeugen. Die Lücke im Eisenjoch kann in zwei Bereiche eingeteilt werden. Einen inneren Bereich bis zu einem Radius R_1 mit einer Lücke von Distanz d_1 und einem Magnetfeld $B_1(t)$ und einem äusseren Bereich mit Lücke d_2 und Magnetfeld $B_2(t)$. Wir nehmen für diese Aufgabe etwas vereinfachend an, dass die Magnetfelder $B_1(t)$ und $B_2(t)$ senkrecht auf der Ebene mit dem Elektronenorbit stehen.

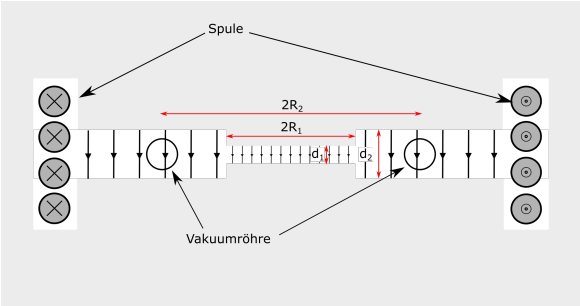


Abbildung 1.3.2: Schematischer Querschnitt durch einen Betatron. Die Elektronen befinden sich in der Vakuumröhre, welche von einem Eisenjoch (grau) umgeben ist.

Teil A. Stabiler Orbit *(7 Punkte)*

Zuerst wollen wir herausfinden, wie die Magnetfeldstärken $B_1(t)$ und $B_2(t)$ in Relation stehen müssen, damit wir die Elektronen stabil beschleunigen können.
Hinweis: Du kannst die Rechnungen in Teil A nichtrelativistisch durchführen.

i. (2 pt.) Welche Geschwindigkeit müssen die Elektronen haben, damit sie auf einer stabilen Kreisbahn von Radius R_2 sind?

ii. (1 pt.) Gib den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durch die Fläche eingeschlossen vom Elektronenorbit (blaue Fläche in Abbildung 1.3.1) in Abhängigkeit von R_1, R_2, $B_1(t)$ und $B_2(t)$ an.

iii. (1.5 pt.) Welche tangentiale Beschleunigung erfahren die Elektronen im Betatron? Gib das Resultat in Abhängigkeit von R_1, R_2, $\frac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}B_2(t)}{\mathrm{d}t}$ an.

iv. (2.5 pt.) Angenommen wir haben das Magnetfeld $B_2(t)$ gegeben. Was muss das Magnetfeld $B_1(t)$ sein, damit die Elektronen auf dem Kreisorbit von Radius R_2 bleiben?

Teil B. Energietransfer *(4 Punkte)*

Wir speisen die Spulen nun mit einem Wechselstrom der Frequenz $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Das Magnetfeld hat dann die Form

$$B_i(t) = B_{0,i}\sin(2\pi f t)$$

mit $B_{0,i} > 0$ für $i = 1, 2$. Wir nehmen an, dass die Elektronen zum Zeitpunkt $t = 0$ sich in Ruhe im Betatron befinden.

i. (2 pt.) Zu welchen Zeitpunkt müssen die Elektronen extrahiert werden, damit sie maximale Energie haben?

ii. (2 pt.) Was ist die Energie der Elektronen in diesem Fall? Wir nehmen an $R = 1.2\,\mathrm{m}$ und $B_{0,2} = 0.8\,\mathrm{T}$.
Hinweis: Um das korrekte Resultat zu bekommen, muss diese Rechnung relativistisch durchgeführt werden.

Teil C. Magnetfeld und Strom *(5 Punkte)*

In diesem Teil wollen wir herausfinden, welche Stromstärke nötig ist, um das gewünschte Magnetfeld zu erzeugen. Dazu nehmen wir folgende numerische Werte an: $R_1 = 1\,\mathrm{m}$, $d_2 = 2\,\mathrm{cm}$ und die Spule hat $n = 40$ Windungen.

i. (3.5 pt.) Was für eine Stromstärke benötigen wir, damit wir ein Magnetfeld von $B_2 = 0.8\,\mathrm{T}$ in der Vakuumröhre erzeugen können? Nimm an, dass die magnetische Permeabilität von Eisen $\mu \gg 1$.

ii. (1.5 pt.) Wie gross muss die Distanz d_1 sein, damit die Bedingung in A.iv. erfüllt ist?

Theoretische Probleme: Lösungen

Aufgabe 1.1: Tiefenschärfe *16 pt.*

Du hast soeben eine Kamera erhalten. Sie besteht aus einer dünnen Linse mit der Brennweite $f = 100\,\mathrm{mm}$, die mit einer Blende mit variablem Durchmesser d versehen ist, sowie einem Sensor, der sich in einem variablen Abstand s befindet. Der Durchmesser der Blende wird häufig durch die *Blendenzahl* $N = \frac{f}{d}$ charakterisiert.

Teil A. Einführung in die Fotografie *3.5 pt.*

i. In welchem Abstand $x(f, s)$ (von der Linse aus gemessen) muss die Kamera vom zu fotografierenden Objekt platziert werden, um ein scharfes Bild zu erhalten? **1 pt.**

Using the thin lens formula:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f},$$

0.5 pt.

we can derive:

$$x(f, s) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{fs}{s - f}.$$

0.5 pt.

ii. Wie gross ist die transversale Vergrösserung des Bildes auf dem Sensor in Abhängigkeit von s und x, mit welchem Vorzeichen und warum? **1.5 pt**

The linear (or transverse) magnification is given by the ratio of the (signed) image size to the object size,

$$\gamma_t = \frac{h_i}{h_o}.$$

By similar triangles,

$$\gamma_\mathrm{t} = -\frac{s}{x}.$$

1 pt.

The sign is negative, because the image is inverted. 0.5 pt.

The case $|\gamma_t| \approx 1$ *is called* close-up *or* proxiphotography *and the case* $|\gamma_t| > 1$ macrophotography.

iii. Wenn du ein Foto von einem sehr weit entfernten Objekt (z. B. dem Mond) machen möchtest, wie wählst du s? **1 pt.**

For very far objects ($x \to \infty$), the thin lens formula leads to $s = f$.

1 pt.

Alternatively, one can say that parallel rays (parallel to the optical axis) going through the lens cross at the focal point of the lens, or that the focal point conjugates with the infinity.

Teil B. Unschärfe und Schärfe *8 pt.*

SOLUTION

Wenn du die in A.i. hergeleitete Beziehung nicht befolgst und das Objekt in $x' \neq x(f,s)$ platzierst, erhältst du ein unscharfes Bild. Konkret heisst das: Wenn das zu fotografierende Objekt ein Punkt ist, wird sein Bild auf dem Sensor eine Scheibe mit dem Durchmesser c sein, die als *Zerstreuungskreis* bezeichnet wird.

i. Leite einen Ausdruck für $c(f,N,s,x')$ her. *Hinweis: Betrachte die Fälle $x' < x$ und $x' > x$ anfangs getrennt.* **3 pt.**

The image of x' is given by $s' = \frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{x'}} = \frac{fx'}{x'-f}$ from the thin lens equation. 0.5 pt.

Assume first that $x' < x$, so $s' > s$. By similar triangles,

$$\frac{c_{x'<x}}{s'-s} = \frac{d}{s'}.$$

0.5 pt.

If instead $x' > x$, so $s' < s$ and

$$\frac{c_{x'>x}}{s-s'} = \frac{d}{s'},$$

so both formulae are equal, up to the sign (we want c to be positive, as it is a radius). 0.5 pt.

We can combine both equations into one:

$$c = \left| d\frac{s'-s}{s'} \right|.$$

0.5 pt.

So

$$c = \frac{f}{N}\left|1 - s\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x'}\right)\right|.$$

1 pt.

Award half of the points if only one of the cases is considered or if the absolute value is missing in the final expression.

ii. Wie kannst du die Gesamtschärfe des Bildes erhöhen, ohne das Objekt, die Kamera oder den Sensor zu bewegen? **0.5 pt**

The goal is to reduce c with f, s and x' kept constant. The only possibility is to augment N, that is to reduce the aperture d. 0.5 pt.

Note that, at equal exposure time and sensitivity, this will result in a darker image.

iii. Du hältst ein Bild für scharf, wenn der Durchmesser seines Zerstreuungskreises einen bestimmten Wert h nicht überschreitet. Welcher Wertebereich von x' erfüllt diese Bedingung für gegebene Werte f, N, s, h? **2 pt.**

We want to find all x' that fulfill $c \leq h$.

$$\begin{aligned}
-h \leq \frac{f}{N}\left(1 - s\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x'}\right)\right) &\leq h \\
-\frac{Nh}{f} \leq 1 - s\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x'}\right) &\leq \frac{Nh}{f} \\
\frac{1}{s} - \frac{Nh}{fs} \leq \frac{1}{f} - \frac{1}{x'} &\leq \frac{1}{s} + \frac{Nh}{fs} \\
\frac{1}{f} - \frac{1}{s} - \frac{Nh}{fs} \leq \frac{1}{x'} &\leq \frac{1}{f} - \frac{1}{s} + \frac{Nh}{fs}
\end{aligned}$$

SOLUTION

1 pt.

The lower bound of the range is

$$\frac{fs}{s-f+Nh} = \frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{s}+\frac{Nh}{fs}} \leq x'$$

if $s - f \geq -Nh$, else

$$0 \leq x'.$$

0.5 pt.

The upper bound of the range is

$$x' \leq \frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{s}-\frac{Nh}{fs}} = \frac{fs}{s-f-Nh}$$

if $s - f \geq Nh$, else

$$x' \leq \infty.$$

0.5 pt.

iv. Du möchtest einen Elefanten vor einer Mondsichel fotografieren. Dazu öffnest du die Blende auf $N = 10$. Der Sensor mit den Abmessungen $36\,\mathrm{mm}$ mal $24\,\mathrm{mm}$ besteht aus quadratischen Zellen mit einer Seitenlänge von $10\,\mu\mathrm{m}$. Bis auf welche minimale Distanz x'_{min} kannst du die Kamera and den Elefanten heranbringen, damit sowohl der Elefant als auch der Mond scharf abgebildet werden, d. h. ihre Zerstreuungskreise kleiner oder gleich gross wie die Zellen des Sensors sind? **2.5 pt**

We want to impose $h = 10\,\mu\mathrm{m}$ and $x'_{\mathrm{max}} \to \infty$ (that is, $\frac{1}{x'_{\mathrm{max}}} = 0$). This means that we focus at the smallest possible x such that the Moon (at infinity) is still sharp with the maximum allowed circle of confusion. 0.5 pt.

This leads to the condition $s - f - Nh = 0$, so $s = f + Nh$. 0.5 pt.

Plugging this into the other part of the (in)equation, we find

$$x'_{\mathrm{min}} = \frac{f^2 + fNh}{f + Nh - f + Nh} = \frac{f^2}{2Nh} + \frac{f}{2}.$$

1 pt.

Numerically ($f \gg Nh$ so we can neglect the $\frac{f}{2}$ part):

$$x'_{\mathrm{min}} \approx \frac{f^2}{2Nh} = 50\,\mathrm{m}.$$

0.5 pt.

This is not asked for, but remarkably, the distance x that we actually have to focus at is $x = 2x'_{min}$.

Teil C. Kleine Öffnung *2.5 pt.*

i. Das Motiv ist überwiegend himmelblau mit der Wellenlänge $473\,\mathrm{nm}$. Wenn du N zu stark erhöhst, wird das Bild auch bei genug langen Belichtungszeiten schlecht aussehen. Wie hoch ist der maximale Wert von N, den du auf deiner Kamera im Fall von $s = f$ einstellen kannst, ohne dass dieses Problem auftritt? **2.5 pt**

SOLUTION

The degrading is caused by diffraction at the edge of the aperture. The problem will arise if the diffraction limit gets larger than the pixel size. 0.5 pt.

Therefore we have (small angle approximation):

$$\theta_{\max} s = \theta_{\max} f = h$$

0.5 pt.

and (Rayleigh criterion)

$$\theta_{\max} = \frac{1.22\lambda}{d_{\min}} = \frac{1.22\lambda N_{\max}}{f}.$$

0.5 pt.

So

$$N_{\max} = \frac{h}{f}\frac{f}{1.22\lambda} = \frac{h}{1.22\lambda}.$$

0.5 pt.

Numerically:

$$N_{\max} \approx 17.3.$$

0.5 pt.

Teil D. Dicke Linse *2 pt.*

i. In Wirklichkeit sind die Linsen nicht unendlich dünn. Bestimme ein Problem, das sich aus dieser Tatsache ergibt, und eine Möglichkeit, es zu lösen. 2 pt.

Thick lenses cause chromatic aberration, because the focal length depends on the refractive index, which in turn depends on the wavelength. So different colors are focused at different distances and the image cannot be made sharp for all of them. 1 pt.

One way to solve (or at least, mitigate) this issue is to use several lenses. A system of two lenses is called *achromatic*, three *apochromatic*, etc. The more lenses the better with respect to chromatic aberration (but then other issues arise, such as the weight of the system, the mechanical complexity, the imperfections in lens grinding, etc.). 1 pt.

Other issues include spherical aberrations (most lenses are ground spherical for ease of manufacturing), coma (light coming at an angle w.r.t. the optical axis do not focus at a point, even for a perfectly ground lens), field curvature (flat surfaces are imaged to a curved virtual surface), etc.
Some of these issues can be mitigated or solved by using systems of several lenses or (more rarely) by adapting the sensor shape.
Points are awarded if the identified issue resp. solution makes sense.

SOLUTION

Aufgabe 1.2: Gleitende Leiter *16 pt.*

Teil A. Freistehende Leiter *4 pt.*

Eine Leiter mit Masse M und Länge L steht frei in der Mitte eines Raumes (siehe Abbildung 1.2.1). Zur Zeit $t = 0$ beginnt sie ohne Reibung zu gleiten.

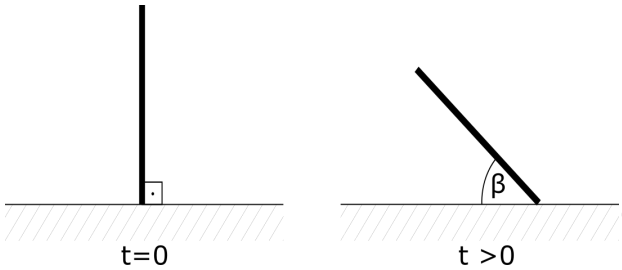


Abbildung 1.2.1: Freistehende Leiter

i. Bestimme die Beschleunigung des Massenmittelpunktes der Leiter, kurz bevor diese am Boden aufprallt ($\beta = 0$). **4 pt.**

Just before the ladder touches the floor, Newton's law says

$$Ma = Mg - N_{\text{floor}},$$

1 pt.

the torque equation says

$$I\epsilon = N_{\text{floor}}\frac{L}{2},$$

where ϵ is the angular acceleration. 1 pt.

We can model the ladder as a thin rod and get the moment of inertia $I = \frac{1}{12}ML^2$. 1 pt.

At the moment the ladder touches the floor we have the relation

$$a = \epsilon\frac{L}{2} \Longrightarrow N_{\text{floor}} = \frac{1}{3}aM.$$

0.5 pt.

Solving the equations for a gives

$$a = \frac{3}{4}g.$$

0.5 pt.

Teil B. Leiter an der Wand *12 pt.*

Die gleiche Leiter steht vertikal neber einer Wand (siehe Abbildung 1.2.2). Zur Zeit $t = 0$ beginnt sie ohne Reibung zu gleiten. Wenn die Leiter einen gewissen Winkel α_0 erreicht, löst sie sich von der Wand.

SOLUTION

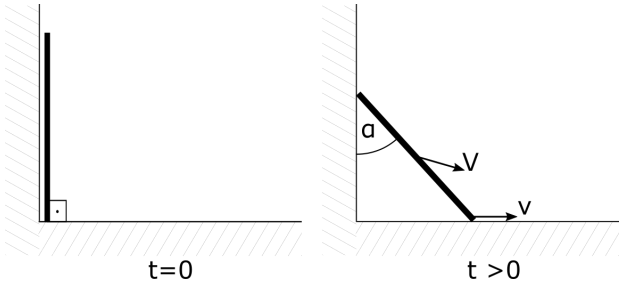


Abbildung 1.2.2: Leiter an der Wand

i. Welche Bahn beschreibt der Massenmittelpunkt der Leiter bevor sie sich von der Wand löst ($\alpha < \alpha_0$)? **2 pt.**

The coordinates of the center of the ladder are

$$(x, y) = \left(\frac{L}{2}\sin(\alpha), \frac{L}{2}\cos(\alpha)\right).$$

1 pt.

Hence, the center of mass moves on the circle with radius $\frac{L}{2}$ centered at the corner where the wall meets the floor. 1 pt.

If this solution is obtained without parametrisation of the coordinates or other mathematical reasoning only 1 out of 2 points are awarded for this question.

ii. Bestimme die Geschwindigkeit v des unteren Endes der Leiter und die Geschwindigkeit V des Massenmittelpunktes der Leiter, wenn diese einen Winkel $\alpha < \alpha_0$ zur Vertikalen hat. **5.5 pt**

The velocity components of the center of mass are

$$v_x = \frac{L}{2}\cos(\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2}\cos(\alpha)\,\omega$$

0.5 pt.

and

$$v_y = \frac{L}{2}\sin(\alpha)\,\omega.$$

0.5 pt.

We can can conclude

$$\omega = \frac{2}{L}V.$$

1 pt.

This relation can also seen directly by geometric considerations. Indeed, note that the angular velocity of the ladder is the same as the angular velocity of the center of mass motion around the corner. This is because the triangle formed by the corner, the center of mass and the bottom of the ladder is isoceles. Give all the points above if argued like this.

SOLUTION

The potential energy of the ladder at an angle α is

$$E_{\text{pot}} = Mg\frac{L}{2}\cos(\alpha)\,.$$

0.5 pt.

Energy conservation reads

$$Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos(\alpha) + \frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

where $I = \frac{ML^2}{12}$ is the moment of inertia with respect to the center of mass. 1 pt.

Give the points for I from part A if it is not already mentioned there.

Solving for V yields

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3gL\,(1-\cos(\alpha))}.$$

0.5 pt.

The bottom of the ladder is at the position $x_{\text{bot}} = \sin(\alpha)\,L = 2x$. 0.5 pt.

Yielding

$$v = 2v_x = 2V\cos(\alpha) = \sqrt{3gL\,(1-\cos(\alpha))}\cos(\alpha)\,.$$

1 pt.

iii. Bestimme den Winkel α_0. **3.5 pt**

Newton's law implies that

$$Ma_x = N_{\text{wall}}$$

where a_x is the horizontal acceleration of the center of mass of the ladder, and N_{wall} is the normal reaction at the wall. 0.5 pt.

The top of the ladder detaches from the wall when $N_{\text{wall}} = 0$, and hence $a_x = 0$. 1 pt.

We compute

$$\begin{aligned} a_x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{3gL}}{2}\left(\frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\sqrt{1-\cos(\alpha)}} - \sqrt{1-\cos(\alpha)}\sin(\alpha)\right)\omega \\ &= \frac{\sqrt{3gL}\omega\sin(\alpha)}{4\sqrt{1-\cos(\alpha)}}\left(\cos(\alpha) - 2\,(1-\cos(\alpha))\right)\,. \end{aligned}$$

1 pt.

Hence, a_x vanishes when $\cos(\alpha_0) = \frac{2}{3}$ or $\alpha_0 = 48°$. 1 pt.

iv. Ist die Beschleunigung des Massenmittelpunktes der Leiter, kurz bevor diese am Boden aufschlägt, gleich wie beim Teil A.i.? **1 pt.**

In the inertial coordinate system in which the horizontal velocity of the center of mass is zero, the arguments of part A appply verbatim. Hence, the acceleration will be the same. 1 pt.

SOLUTION

Aufgabe 1.3: Betatron *16 pt.*

Hochenergetische Elektronen werden für Kollisionsexperimente und zur Erzeugung von Röntgenstrahlung benötigt. Diese hochenergetischen Elektronen können erzeugt werden, indem sie in einer Vakuumröhre über mehrere Umläufe auf einem kreisförmigen Orbit von Radius R_2 beschleunigt werden.

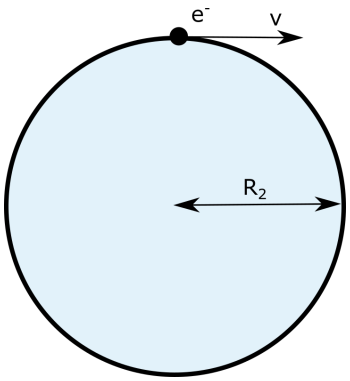


Abbildung 1.3.1: Schematische Aufsicht auf den Betatron mit kreisförmigen Orbit der Elektronen.

Eine Möglichkeit die Energie auf die Elektronen zu übertragen ist mit Hilfe eines zeitlich varienden Magnetfeldes in einem sogennanten Betatron Beschleuniger. Wie in Abbildung 1.3.2 schematisch gezeichnet, verlaufen in einem Betatron parallel zur Vakuumröhre stromführende Spulenwindungen, welche mit Hilfe des Eisenjochs ein Magnetfeld in der Vakuumröhre und in der Lücke im Eisenjoch erzeugen. Die Lücke im Eisenjoch kann in zwei Bereiche eingeteilt werden. Einen inneren Bereich bis zu einem Radius R_1 mit einer Lücke von Distanz d_1 und einem Magnetfeld $B_1(t)$ und einem äusseren Bereich mit Lücke d_2 und Magnetfeld $B_2(t)$. Wir nehmen für diese Aufgabe etwas vereinfachend an, dass die Magnetfelder $B_1(t)$ und $B_2(t)$ senkrecht auf der Ebene mit dem Elektronenorbit stehen.

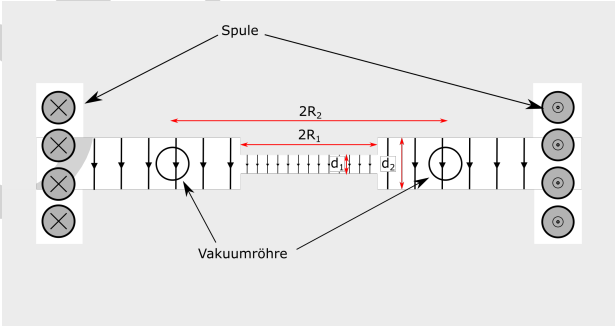


Abbildung 1.3.2: Schematischer Querschnitt durch einen Betatron. Die Elektronen befinden sich in der Vakuumröhre, welche von einem Eisenjoch (grau) umgeben ist.

Teil A. Stabiler Orbit *7 pt.*

Zuerst wollen wir herausfinden, wie die Magnetfeldstärken $B_1(t)$ und $B_2(t)$ in Relation stehen müssen, damit wir die Elektronen stabil beschleunigen können.
Hinweis: Du kannst die Rechnungen in Teil A nicht-relativistisch durchführen.

SOLUTION

i. Welche Geschwindigkeit müssen die Elektronen haben, damit sie auf einer stabilen Kreisbahn von Radius R_2 sind? **2 pt.**

To have a stable orbit the Lorentz force needs to be equal to the centripetal force. 0.5 pt.

For the centripetal force we have

$$\left|\vec{F}_\mathrm{c}\right| = \frac{mv^2}{R}.$$

0.5 pt.

The Lorentz force is

$$\vec{F}_\mathrm{L} = e\vec{v} \times \vec{B}_2(t)$$

and therefore $\left|\vec{F}_\mathrm{L}\right| = evB_2(t)$, because the magnetic field is perpendicular to the velocity. 0.5 pt.

We get the final result

$$v = \frac{e}{m} B_2(t)\, R.$$

0.5 pt.

ii. Gib den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durch die Fläche eingeschlossen vom Elektronenorbit (blaue Fläche in Abbildung 1.3.1) in Abhängigkeit von R_1, R_2, $B_1(t)$ und $B_2(t)$ an. **1 pt**

We have two contributions, one from the inner part of the betatron

$$\Phi_1(t) = \pi B_1(t)\, R_1^2$$

0.5 pt.

and one from the annular shaped area

$$\Phi_2(t) = \pi B_2(t) \left(R_2^2 - R_1^2\right).$$

0.5 pt.

Yielding a total magnetic flux of

$$\Phi(t) = \pi B_1(t)\, R_1^2 + \pi B_2(t) \left(R_2^2 - R_1^2\right).$$

iii. Welche tangentiale Beschleunigung erfahren die Elektronen im Betatron? Gib das Resultat in Abhängigkeit von R_1, R_2, $\frac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}B_2(t)}{\mathrm{d}t}$ an. **1.5 pt**

We get a voltage along the electron orbit from the time varying magnetic induction within the betatron. 0.5 pt.

The change of the magnetic induction relates to the voltage by

$$U = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \pi \frac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t} R_1^2 + \pi \frac{\mathrm{d}B_2(t)}{\mathrm{d}t} \left(R_2^2 - R_1^2\right).$$

0.5 pt.

From this we get the acceleration

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{2\pi R_2 m} = \frac{e}{2m} \left(\frac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t} \frac{R_1^2}{R_2} + \frac{\mathrm{d}B_2(t)}{\mathrm{d}t} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2} \right).$$

SOLUTION

0.5 pt.

iv. Angenommen wir haben das Magnetfeld $B_2(t)$ gegeben. Was muss das Magnetfeld $B_1(t)$ sein, damit die Elektronen auf dem Kreisorbit von Radius R_2 bleiben? **2.5 pt**

Since the velocity is increasing during acceleration, the magnetic field also needs to increase to keep the electron on a circular orbit. We can quantify this with the two expressions derived from above,

$$\frac{e}{m}\frac{\mathrm{d}B_2(t)}{\mathrm{d}t}R_2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = \frac{e}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}B_1(t)}{\mathrm{d}t}\frac{R_1^2}{R_2} + \frac{\mathrm{d}B_2(t)}{\mathrm{d}t}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2}\right).$$

1 pt.

Since the magnetic field is produced by the same coil there had to be a time t_s (before switching the currents on) where $B_1(t_\mathrm{s}) = B_2(t_\mathrm{s}) = 0$. By integration we get

$$B_2(t)\,R_2 = \frac{1}{2}B_1(t)\,\frac{R_1^2}{R_2} + B_2(t)\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2}.$$

1 pt.

We can solve for $B_1(t)$,

$$B_1(t) = \frac{2R_2}{R_1^2}\left(R_2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2}\right)B_2(t) = \left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)B_2(t)\,.$$

0.5 pt.

Teil B. Energietransfer *4 pt.*

Wir speisen die Spulen nun mit einem Wechselstrom der Frequenz $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Das Magnetfeld hat dann die Form

$$B_i(t) = B_{0,i}\sin(2\pi f t)$$

mit $B_{0,i} > 0$ für $i = 1, 2$. Wir nehmen an, dass die Elektronen zum Zeitpunkt $t = 0$ sich in Ruhe im Betatron befinden.

i. Zu welchen Zeitpunkt müssen die Elektronen extrahiert werden, damit sie maximale Energie haben? **2 pt.**

The sign of the induced voltage changes when $\frac{\mathrm{d}B_i(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. 1 pt.

This happens at phase of $\frac{\pi}{2} = 2\pi f t_\mathrm{ex}$ 0.5 pt.

and we get $t_\mathrm{ex} = \frac{1}{4f} = 5\,\mathrm{ms}$. 0.5 pt.

ii. Was ist die Energie der Elektronen in diesem Fall? Wir nehmen an $R = 1.2\,\mathrm{m}$ und $B_{0,2} = 0.8\,\mathrm{T}$. *Hinweis: Um das korrekte Resultat zu bekommen, muss diese Rechnung relativistisch durchgeführt werden.* **2 pt.**

We get the maximal momenta

$$p = \gamma m v = eB_\mathrm{max}R = eB_0(R)\,R.$$

1 pt.

SOLUTION

From this we get the final energy

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

We get a result of $E = 288\,\mathrm{MeV}$. 1 pt.

Teil C. Magnetfeld und Strom *5 pt.*

In diesem Teil wollen wir herausfinden, welche Stromstärke nötig ist, um das gewünschte Magnetfeld zu erzeugen. Dazu nehmen wir folgende numerische Werte an: $R_1 = 1\,\mathrm{m}$, $d_2 = 2\,\mathrm{cm}$ und die Spule hat $n = 40$ Windungen.

i. Was für eine Stromstärke benötigen wir, damit wir ein Magnetfeld von $B_2 = 0.8\,\mathrm{T}$ in der Vakuumröhre erzeugen können? Nimm an, dass die magnetische Permeabilität von Eisen $\mu \gg 1$. **3.5 pt**

We use Ampère's law along a line through the iron yoke and along a straight line at radius R through the gap.

$$nI = \oint H \mathrm{d}s = d_2 \frac{B(R)}{\mu_0} + \int_{\text{yoke}} H \mathrm{d}s$$

2 pt.

In the iron yoke itself we have $H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \approx 0$ yielding

$$\frac{B(R)\, d_2}{\mu_0} = nI.$$

1 pt.

We get $I = \frac{B(R) d_2}{\mu_0 n} = 318\,\mathrm{A}$. 0.5 pt.

ii. Wie gross muss die Distanz d_1 sein, damit die Bedingung in A.iv. erfüllt ist? **1.5 pt**

From the previous results we get

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

0.5 pt.

We can solve for d_1:

$$d_1 = \frac{R_1^2 d_2}{R^2 + R_1^2}.$$

0.5 pt.

The numerical value is $d_1 = 8\,\mathrm{mm}$. 0.5 pt.

SOLUTION

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

Aarau, 19. - 20. März 2022

Theorie Teil 2	**:**	**6 Kurzaufgaben**
Dauer	:	60 Minuten
Total	:	24 Punkte (6×4)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher
		Schreib- und Zeichenmaterial

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Bärbel und Paul Geissbühler Stiftung
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Naturkonstanten

Cäsium-Hyperfeinfrequenz	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9.192 631 770	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.997 924 58	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	6.626 070 15	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 634	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante	k_{B}	1.380 649	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	6.022 140 76	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Magnetische Konstante	μ_0	1.256 637 062 12(19)	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	8.854 187 812 8(13)	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Gaskonstante	R	8.314 462 618…		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	5.670 374 419…	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	6.674 30(15)	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Elektronenmasse	m_{e}	9.109 383 701 5(28)	$\times 10^{-31}$	kg
Neutronenmasse	m_{n}	1.674 927 498 04(95)	$\times 10^{-27}$	kg
Protonenmasse	m_{p}	1.672 621 923 69(51)	$\times 10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	9.806 65		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Kurzaufgaben

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 24 Punkte (6×4)

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern.

Aufgabe 2.1: Kollisionen mit Kugeln *(4 Punkte)*

Emmy möchte Objekte in den Weltraum schiessen, ohne Treibstoff zu verbrauchen. Für erste Versuche ihrer Idee nimmt sie einen Turm aus Kugeln und lässt ihn aus einer Höhe $h = 5\,\mathrm{m}$ fallen.
Sie variiert die Massen der Kugeln. Nimm an, dass alle Zusammenstösse elastisch sind. Bei Bedarf kannst du annehmen, dass die obere Masse mit einer Verzögerung von $\epsilon \ll 1\,\mathrm{s}$ nach unten fällt. Wie gross ist der maximal mögliche Höhengewinn der oberen Kugel in Bezug auf die Ausgangsposition,

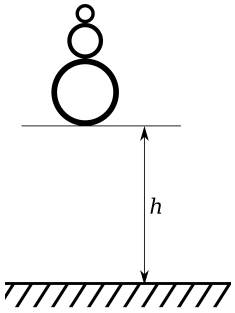


Abbildung 2.1.1: Ein Turm aus drei Kugeln.

i. (2 pt.) wenn Emmy 2 Kugeln braucht?
ii. (1 pt.) wenn Emmy 3 Kugeln benützt?
iii. (1 pt.) Beschreibe die Annahmen, die du gemacht hast. Aufgrund welcher physikalischen Limitierungen kann die maximale Höhe nicht erreicht werden? Emmy erwägt, mehr Kugeln zu verwenden und h zu erhöhen, um noch höher zu kommen. Warum ist dies (k)eine gute Methode, um einen Satelliten ins All zu schiessen?

Aufgabe 2.2: Wasserhöhe in einem Schwimmbecken *(4 Punkte)*

Archimedes installiert ein neues System, um sein Becken bis zu einer maximalen Höhe von $h_{\max} = 1\,\mathrm{m}$ zu füllen. Ihm war es wichtig, dass er es genau bis zu einer bestimmten Höhe füllen kann. Also installierte er einen ungerichteten Radiowellen-Sender, der eine Frequenz f in einer Höhe von $H = 2\,\mathrm{m}$ über dem Boden am vorderen Rand des Beckens abstrahlt. Am hinteren Ende des Beckens ist ein Empfänger $H = 2\,\mathrm{m}$ über dem Boden installiert. Der Abstand zwischen Sender und Empfänger beträgt $L = 30\,\mathrm{m}$. Der Empfänger misst die Interferenz des direkten Signals und des vom Wasser reflektierten Signals. Aus dem Interferenzmuster kann man die Phasenverschiebung (bis auf ein Vielfaches von 2π) zwischen den beiden Signalen messen. Die Phasenverschiebung wird verwendet, um die Höhe des Wassers im Becken zu bestimmen.

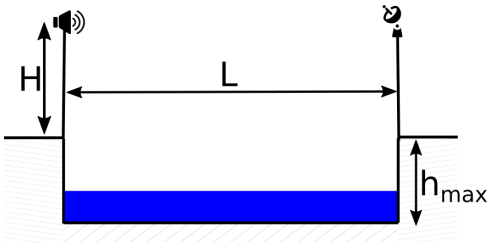


Abbildung 2.2.1: Schema von Archimedes Aufbau.

i. (2.5 pt.) Was ist die höchste Frequenz $f_{\max}$, die er verwenden kann, wenn er die Höhe des Wassers eindeutig bestimmen will?
ii. (1.5 pt.) Archimedes entscheidet sich für eine Frequenz $0.4\,\mathrm{GHz} < f_{\max}$. Bei welchem Füllstand interferieren die beiden Signale destruktiv, so dass wir kein Signal haben?

Aufgabe 2.3: Barometer *(4 Punkte)*

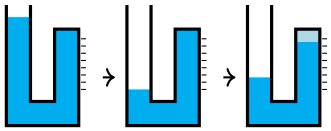
Ein U-förmiges Rohr, welches links offen und rechts geschlossen ist, ist mit Wasser gefüllt. Ein Teil des Wassers wird dann entfernt, was auf beidern Seiten zu einer Absenkung des Wasserspiegels führt, allerdings nicht in gleichem Ausmass.
Die rechte Seite des Rohres ist geeicht, so dass der Wasserpegel den Atmosphärendruck anzeigt. Allerdings wurde während der Eichung vergessen den Wasserdampfdruck zu berücksichtigen, welcher das Vakuum auf der rechten Seite des Rohrs mit Wasserdampf füllt.
Der gesättigte Wasserdampfdruck P_s kann mit der Antoine-Gleichung berechnet werden (wobei T die Temperatur in Kelvin ist).

$$\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_o}\right) = A - \frac{B}{T+C}.$$

Wir nehmen an, dass das Experiment bei $T = 20\,°\mathrm{C}$ ausgeführt wird. In diesem Fall nehmen die Konstanten folgende Werte an:

$$\begin{aligned} P_o &= 1000\,\mathrm{hPa} \\ A &= 5.402\,21 \\ B &= 1838.675\,\mathrm{K} \\ C &= -31.737\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

In diesem Experiment werden Kapillarkräfte sowie der Austausch von Gas/Flüssigkeit auf der linken Seite der Röhre vernachlässigt.
Man liest auf der Skala $P_a' = 990\,\mathrm{hPa}$.



i. (2 pt.) Wie gross ist der echte Atmosphärendruck P_a?
ii. (2 pt.) Wenn man annimmt, dass sich Wasserdruck als ideales Gas verhält, wieviele Wassermoleküle befinden sich dann pro cm^3 Wasserdampf? Was können wir daraus für die obigen Berechnung von P_a schliessen?

Aufgabe 2.4: Röhre *(4 Punkte)*

Wir betrachten eine Röhre, deren anfänglicher Durchmesser $2R_0$ auf die Hälfte reduziert wird und danach langsam wieder auf die Ursprüngliche Grösse aufweitet (siehe Abbildung 2.4.1).
Durch die Röhre fliesse Wasser, welches von den Wänden der Röhre gebremst wird, sodass wir annehmen, dass die Fliessgeschwindigkeit in der Nähe der Wand langsamer fliesst als in der Mitte. Das Geschwindigkeitsprofil als Funktion vom Abstand r zur Mitte sei $v(r) = k(R)\left(R^2 - r^2\right)$ wobei R der Radius der Röhre ist (Achtung, ändert sich!).

Die Geschwindigkeit in der Mitte der Röhre vor und nach der Verengung sei v_0.

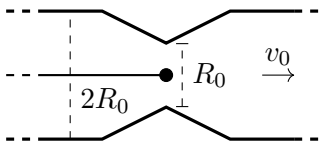


Abbildung 2.4.1: Wasser fliesst durch eine Röhre mit Verengung, Kugel wird an schmalster Stelle festgehalten.

i. (0.5 pt.) Wie gross ist $k(R_0)$ für die Röhre vor der Verengung?
ii. (1 pt.) Berechne $k\left(\frac{R_0}{2}\right)$ bei der engsten Stelle in Abhängigkeit von v_0 und R_0.
An der engsten Stelle der Röhre wird nun eine sehr kleine Kugel mit Radius r_0 ($r_0 \ll R_0$) gelegt und mit Hilfe einer vernachlässigbar dünnen Schnur entlang der Strömung festgehalten (radiale Bewegung möglich).
iii. (1 pt.) Angenommen die Flüssigkeit bewege sich sehr langsam, wie gross ist der Widerstand der Kugel im Wasser? Hinweis: die Viskosität von Wasser ist etwa $\eta = 9 \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa \cdot s}$.
iv. (1 pt.) Für grosse Fliessgeschwindigkeiten ist der Widerstand durch turbulente Strömung gegeben. Wie gross ist dann der Widerstand? Hinweis: der Strömungswiderstandskoeffizient einer Kugel ist etwa $c_W = 0.4$.
v. (0.5 pt.) Angenommen die Fliessgeschwindigkeit sei klein und die Dichte der Kugel gleich der Dichte von Wasser. Wird die Kugel eher in der Mitte oder eher am Rand der Röhre sein? Begründe.

Aufgabe 2.5: Atombombe *(4 Punkte)*

Die erste Explosion einer Atombombe war der Trinity-Test in New Mexico im Jahr 1945. Einige Jahre später wurde eine Reihe von Bildern der Explosion zusammen mit einer Grössenskala und Zeitangaben veröffentlicht und in einer populären Zeitschrift publiziert. Anhand dieser Fotos konnte ein britischer Physiker namens G. I. Taylor die von der Explosion freigesetzte Energie abschätzen (die zu diesem Zeitpunkt noch geheim war). Lasst uns diese Berechnung wiederholen.

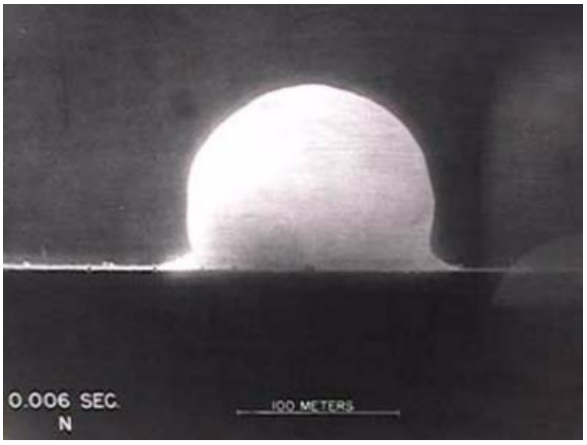


Abbildung 2.5.1: Bild des Trinity-Tests.

i. (2 pt.) Taylor argumentierte, dass die Energie der Atombombe nur vom Feuerballradius R, der Dichte der Luft ρ und der Zeit t nach der Detonation abhängt. Finde die Gleichung für E in Abhängigkeit von den erwähnten Variablen

$$E = Kf(\rho, R, t)$$

wobei K einheitslose eine Konstante ist.

ii. (1 pt.) Bei genauer Analyse findet man einen Wert von $K = 0.851$ für die Konstante. Finde die Energie in Kilotonnen TNT ($1\,\mathrm{kt}$ TNT $= 4.184 \times 10^{12}\,\mathrm{J}$) der in der Abbildung dargestellten Atombombe. Die Dichte von Luft ist $1.225\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

iii. (1 pt.) Wie hoch ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feuerballs in dem Augenblick, in dem das Bild aufgenommen wurde?

Aufgabe 2.6: Chügelipistole *(4 Punkte)*

i. (1 pt.) Ein zylindrischer Kolben mit Volumen $20\,\mathrm{mL}$ sei bei Atmosphärendruck mit einem idealen Gas mit drei Freiheitsgraden gefüllt. Vor dem Schuss komprimieren wir den Kolben isotherm. Was ist die innere Energie des Gases nach der Kompression?

ii. (3 pt.) Wir schiessen nun eine Kugel von $1\,\mathrm{g}$ ab, welche durch die plötzliche Expansion des Kolbens auf $150\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ beschleunigt wird. Berechne das komprimierte Volumen V_0 vor der Schussabgabe. *Tipp: Welche Art von Prozess beschreibt die schnelle Expansion des Kolbens am besten?*

Kurzaufgaben: Lösungen

Aufgabe 2.1: Kollisionen mit Kugeln *4 pt.*

Emmy möchte Objekte in den Weltraum schiessen, ohne Treibstoff zu verbrauchen. Für erste Versuche ihrer Idee nimmt sie einen Turm aus Kugeln und lässt ihn aus einer Höhe $h = 5\,\mathrm{m}$ fallen.
Sie variiert die Massen der Kugeln. Nimm an, dass alle Zusammenstösse elastisch sind. Bei Bedarf kannst du annehmen, dass die obere Masse mit einer Verzögerung von $\epsilon \ll 1\,\mathrm{s}$ nach unten fällt. Wie gross ist der maximal mögliche Höhengewinn der oberen Kugel in Bezug auf die Ausgangsposition,

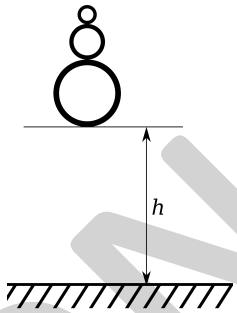


Abbildung 2.1.1: Ein Turm aus drei Kugeln.

SOLUTION

i. wenn Emmy 2 Kugeln braucht? **2 pt.**

For a demonstration of the effect see: https://iruntheinternet.com/07674. The full calculation of the height as a function of the masses is not needed, but is correct as well.

The maximum is achieved if $\frac{m_{\text{top}}}{m_{\text{bottom}}} \to 0$, that is, if the mass of the top sphere is much smaller than the mass of the bottom sphere. 0.75 pt

The spheres hit each other in sequence, that is the bottom one first collides with the ground, then moves upwards and hits the top sphere. 0.25 pt

The speed of the bottom sphere just before it hits the ground is $v_0 = \sqrt{2gh}$, so is the speed of the top sphere just before it hits the bottom sphere. The maximal height a sphere reaches when launched with an initial velocity v (in a homogeneus gravitational field) is $h_{\text{max}} = \frac{v^2}{2g}$. 0.25 pt

The bottom sphere bounces off the ground and has upwards velocity v_0. Then it collides with the top sphere which has downwards velocity v_0. In the reference frame of the bottom sphere (which is also the center of mass reference frame, if $m_{\text{top}} \ll m_{\text{bottom}}$), the top sphere approaches with velocity $2v_0$, and after the collision it leaves with velocity $2v_0$. In the reference frame of the Earth, it therefore has an upwards velocity of $3v_0$. With this velocity it reaches the height $9h$ measured from the lowest point of its trajectory, i.e. $8h$ from the starting position. Both $9h = 45\,\mathrm{m}$ and $8h = 40\,\mathrm{m}$ give full points. 0.75 pt

ii. wenn Emmy 3 Kugeln benützt? **1 pt.**

The full calculation is again not needed, and would be much more tedious than for 2 spheres, but using the limit from part i. twice simplifies the calculation a lot.

The maximum is achieved if $\frac{m_{\text{top}}}{m_{\text{middle}}} \to 0$ and $\frac{m_{\text{middle}}}{m_{\text{bottom}}} \to 0$, in other words, if $m_{\text{top}} \ll m_{\text{middle}} \ll m_{\text{bottom}}$. 0.25 pt

From the previous problem, we know that the middle sphere will have upwards velocity $3v_0$ after colliding with the bottom sphere. Therefore, after the collision, the top sphere will have upwards velocity $3v_0 + v_0$

in the reference frame of the middle sphere and $2 \cdot 3v_0 + v_0 = 7v_0$ in the reference frame of the Earth. The maximum height gain is therefore $49h - h = 48h$. Again both $49h = 245\,\mathrm{m}$ and $48h = 240\,\mathrm{m}$ are correct. 0.75 pt

iii. Beschreibe die Annahmen, die du gemacht hast. Aufgrund welcher physikalischen Limitierungen kann die maximale Höhe nicht erreicht werden? Emmy erwägt, mehr Kugeln zu verwenden und h zu erhöhen, um noch höher zu kommen. Warum ist dies (k)eine gute Methode, um einen Satelliten ins All zu schiessen? 1 pt.

Give 0.25 points for each valid physical limitation up to a maximum of 1 point. Examples are:

- The collisions will not be perfectly elastic.
- The involved speeds get extremely high (if we want to launch something into space), which makes e.g. the assumption of elastic collisions break down.
- We neglected the air resistance (especially as the top mass should be small).
- The top mass cannot be arbitrarily small, we still want to launch something into space.
- The masses needed grows a lot with the number of spheres, so does the energy needed to lift all spheres to h.
- The accelerations on the top sphere get extremely large, which is bad if we want to launch a satellite.
- Very sensitive to deflections, would need to find a way of keeping the balls perfectly aligned. See hamster (https://iruntheinternet.com/07674).
- For large heights, the gravitational field can no longer be assumed homogeneous.
- This method only launches mass upwards, a satellite also needs quite a lot of tangential velocity to orbit the Earth (otherwise it would just fall down again).

1 pt.

SOLUTION

Aufgabe 2.2: Wasserhöhe in einem Schwimmbecken *4 pt.*

Archimedes installiert ein neues System, um sein Becken bis zu einer maximalen Höhe von $h_{\mathrm{max}} = 1\,\mathrm{m}$ zu füllen. Ihm war es wichtig, dass er es genau bis zu einer bestimmten Höhe füllen kann. Also installierte er einen ungerichteten Radiowellen-Sender, der eine Frequenz f in einer Höhe von $H = 2\,\mathrm{m}$ über dem Boden am vorderen Rand des Beckens abstrahlt. Am hinteren Ende des Beckens ist ein Empfänger $H = 2\,\mathrm{m}$ über dem Boden installiert. Der Abstand zwischen Sender und Empfänger beträgt $L = 30\,\mathrm{m}$. Der Empfänger misst die Interferenz des direkten Signals und des vom Wasser reflektierten Signals. Aus dem Interferenzmuster kann man die Phasenverschiebung (bis auf ein Vielfaches von 2π) zwischen den beiden Signalen messen. Die Phasenverschiebung wird verwendet, um die Höhe des Wassers im Becken zu bestimmen.

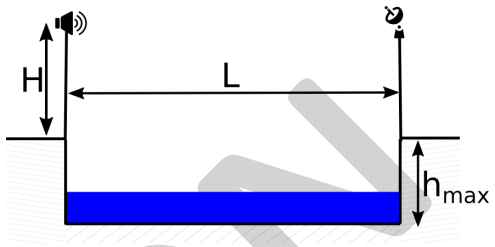


Abbildung 2.2.1: Schema von Archimedes Aufbau.

i. Was ist die höchste Frequenz f_{max}, die er verwenden kann, wenn er die Höhe des Wassers eindeutig bestimmen will? **2.5 pt**

The path length for the filled and empty pool are

$$\Delta S_{\mathrm{f}} = 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - L,$$

0.5 pt.

$$\Delta S_{\mathrm{e}} = 2\sqrt{(H + h_{\mathrm{max}})^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - L.$$

0.5 pt.

The difference between these two cannot be higher than the wavelength λ, 0.5 pt.

which gives

$$f_{\mathrm{max}} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\Delta S_{\mathrm{e}} - \Delta S_{\mathrm{f}}}.$$

0.5 pt.

The numerical value is 0.91 GHz. 0.5 pt.

ii. Archimedes entscheidet sich für eine Frequenz $0.4\,\mathrm{GHz} < f_{\mathrm{max}}$. Bei welchem Füllstand interferieren die beiden Signale destruktiv, so dass wir kein Signal haben? **1.5 pt**

This means the path length difference needs to be

$$\lambda\left(n + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{(H + h_{\mathrm{max}} - h_{\mathrm{s}})^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - L.$$

SOLUTION

0.5 pt.

Solving for h_s gives

$$h_\mathrm{s} = H + h_\mathrm{max} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(L + \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

0.5 pt.

We have to find the n for which $0 < h_\mathrm{s} < h_\mathrm{max}$, which gives $h_\mathrm{s} = 0.62\,\mathrm{m}$. 0.5 pt.

SOLUTION

Aufgabe 2.3: Barometer *4 pt.*

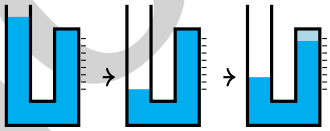
Ein U-förmiges Rohr, welches links offen und rechts geschlossen ist, ist mit Wasser gefüllt. Ein Teil des Wassers wird dann entfernt, was auf beidern Seiten zu einer Absenkung des Wasserspiegels führt, allerdings nicht in gleichem Ausmass.
Die rechte Seite des Rohres ist geeicht, so dass der Wasserpegel den Atmosphärendruck anzeigt. Allerdings wurde während der Eichung vergessen den Wasserdampfdruck zu berücksichtigen, welcher das Vakuum auf der rechten Seite des Rohrs mit Wasserdampf füllt.
Der gesättigte Wasserdampfdruck P_s kann mit der Antoine-Gleichung berechnet werden (wobei T die Temperatur in Kelvin ist).

$$\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_o}\right) = A - \frac{B}{T+C}.$$

Wir nehmen an, dass das Experiment bei $T = 20\,°\mathrm{C}$ ausgeführt wird. In diesem Fall nehmen die Konstanten folgende Werte an:

$$P_o = 1000\,\mathrm{hPa}$$
$$A = 5.402\,21$$
$$B = 1838.675\,\mathrm{K}$$
$$C = -31.737\,\mathrm{K}$$

In diesem Experiment werden Kapillarkräfte sowie der Austausch von Gas/Flüssigkeit auf der linken Seite der Röhre vernachlässigt. Man liest auf der Skala $P_a' = 990\,\mathrm{hPa}$.



i. Wie gross ist der echte Atmosphärendruck P_a? **2 pt.**

Antoine's law transforms to

$$P_s = P_o 10^{A - \frac{B}{T+C}}.$$

0.5 pt.

The pressure from the vapor on the right leads to a lowering of the water level compared to the situation where the part above the water would be totally empty (the vapor pressure on the right counteracts the atmospheric pressure on the left).
This means that the actual pressure is higher, by P_s, than the measured P_a':

$$P_a = P_a' + P_s.$$

1 pt.

Numerically:

$$P_s = 1000\,\mathrm{hPa} \cdot 10^{5.40221 - \frac{1838.675}{20+273.15-31.737}} \approx 23.37\,\mathrm{hPa}$$
$$P_a \approx 1013.37\,\mathrm{hPa}$$

0.5 pt.

ii. Wenn man annimmt, dass sich Wasserdruck als ideales Gas verhält, wieviele Wassermoleküle befinden sich dann pro cm^3 Wasserdampf? Was können wir daraus für die obigen Berechnung von P_a schliessen? **2 pt.**

SOLUTION

From the ideal gas law, we have

$$N = \frac{PV}{k_\mathrm{B}T}.$$

1 pt.

With $V = 1\,\mathrm{cm}^3$ and P set to P_s from above, this gives

$$N \approx 5.773 \times 10^{17}.$$

0.5 pt.

In liquid water, the density of molecules is of the order $3 \times 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$. Thus the change of water level due to the loss of molecules (which go into vapor) is negligible (≈ 3 orders of magnitude for equal vapor and water volumes) compared to the change due to vapor pressure. 0.5 pt.

SOLUTION

Aufgabe 2.4: Röhre *4 pt.*

Wir betrachten eine Röhre, deren anfänglicher Durchmesser $2R_0$ auf die Hälfte reduziert wird und danach langsam wieder auf die Ursprüngliche Grösse aufweitet (siehe Abbildung 2.4.1).
Durch die Röhre fliesse Wasser, welches von den Wänden der Röhre gebremst wird, sodass wir annehmen, dass die Fliessgeschwindigkeit in der Nähe der Wand langsamer fliesst als in der Mitte. Das Geschwindigkeitsprofil als Funktion vom Abstand r zur Mitte sei $v(r) = k(R)\left(R^2 - r^2\right)$ wobei R der Radius der Röhre ist (Achtung, ändert sich!).
Die Geschwindigkeit in der Mitte der Röhre vor und nach der Verengung sei v_0.

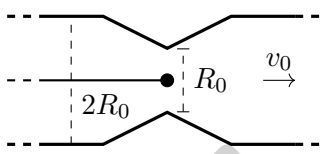


Abbildung 2.4.1: Wasser fliesst durch eine Röhre mit Verengung, Kugel wird an schmalster Stelle festgehalten.

i. Wie gross ist $k(R_0)$ für die Röhre vor der Verengung? **0.5 pt**

By definition of v_0, we get for $r = 0$: $v_0 = k(R_0)\,R_0^2$. 0.25 pt

And therefore $k(R_0) = \frac{v_0}{R_0^2}$. 0.25 pt

ii. Berechne $k\left(\frac{R_0}{2}\right)$ bei der engsten Stelle in Abhängigkeit von v_0 und R_0. **1 pt.**

We have to use the continuity equation. 0.25 pt

For a radius of the pipe R, the volume of water flowing through that cross section area per time is

$$\int_0^R v(r)\,2\pi r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R k(R)\left(R^2 r - r^3\right)\mathrm{d}r = 2\pi k(R)\left(\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4\right) = \frac{\pi}{2}k(R)\,R^4$$

0.5 pt.

This quantity must be the same at the wide and narrow sections of the pipe. Using $k(R_0) = \frac{v_0}{R_0^2}$ we get

$$\frac{\pi}{2}\frac{v_0}{R_0^2}R_0^4 = \frac{\pi}{2}k\left(\frac{R_0}{2}\right)\frac{R_0^4}{2^4}$$
$$k\left(\frac{R_0}{2}\right) = 16\frac{v_0}{R_0^2}$$

0.25 pt

Note: From an intuitive point of view this result was expected because we get an R^2 dependence due to the continuity equation and an additional R^2 dependence because the maximal velocity (for a given $k(R)$) is proportional to R^2. If someone guesses this result, full points. There is even an easier approach by comparing only the velocity in the center of the pipe and the cross section are of the pipe: $v_0 R_0^2 \pi R_0^2 = k\left(\frac{R_0}{2}\right)\frac{R_0^2}{4}\pi\frac{R_0^2}{4}$ leading to the same result. Also here full points.

SOLUTION

An der engsten Stelle der Röhre wird nun eine sehr kleine Kugel mit Radius r_0 ($r_0 \ll R_0$) gelegt und mit Hilfe einer vernachlässigbar dünnen Schnur entlang der Strömung festgehalten (radiale Bewegung möglich).

iii. Angenommen die Flüssigkeit bewege sich sehr langsam, wie gross ist der Widerstand der Kugel im Wasser? Hinweis: die Viskosität von Wasser ist etwa $\eta = 9 \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa \cdot s}$. **1 pt.**

We have laminar flow so $F_r = 6\pi\eta R v$. 1 pt.

If the pre factor 6π is wrong, but the other dependences correct, give 0.5pt.

iv. Für grosse Fliessgeschwindigkeiten ist der Widerstand durch turbulente Strömung gegeben. Wie gross ist dann der Widerstand? Hinweis: der Strömungswiderstandskoeffizient einer Kugel ist etwa $c_W = 0.4$. **1 pt.**

For turbulent flow, we have $F_r = c_W A \rho \frac{v^2}{2} = c_W \pi r_0^2 \rho \frac{v^2}{2}$. 1 pt.

If the pre factor $\frac{c_W}{2}$ is wrong, but the other dependences correct, give 0.5pt. Furthermore if the area $A = \pi r_0^2$ is not specified, punishment of 0.25pt.

v. Angenommen die Fliessgeschwindigkeit sei klein und die Dichte der Kugel gleich der Dichte von Wasser. Wird die Kugel eher in der Mitte oder eher am Rand der Röhre sein? Begründe. **0.5 pt**

As the velocity of the water is bigger in the middle of the pipe, there will be a smaller pressure due to Bernoulli. 0.25 pt

Hence the ball will be pushed towards the middle (give these points also if no explanation is given). 0.25 pt

SOLUTION

Aufgabe 2.5: Atombombe *4 pt.*

Die erste Explosion einer Atombombe war der Trinity-Test in New Mexico im Jahr 1945. Einige Jahre später wurde eine Reihe von Bildern der Explosion zusammen mit einer Grössenskala und Zeitangaben veröffentlicht und in einer populären Zeitschrift publiziert. Anhand dieser Fotos konnte ein britischer Physiker namens G. I. Taylor die von der Explosion freigesetzte Energie abschätzen (die zu diesem Zeitpunkt noch geheim war). Lasst uns diese Berechnung wiederholen.

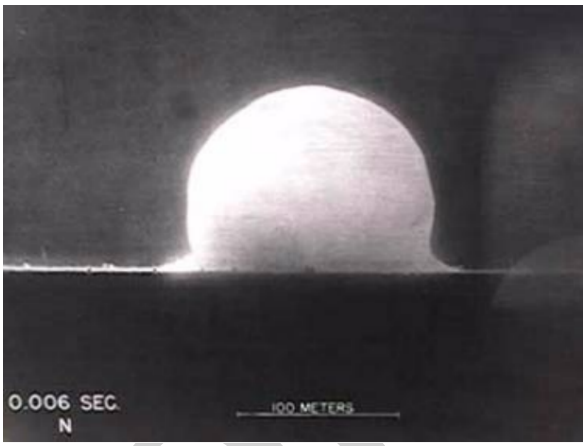


Abbildung 2.5.1: Bild des Trinity-Tests.

SOLUTION

i. Taylor argumentierte, dass die Energie der Atombombe nur vom Feuerballradius R, der Dichte der Luft ρ und der Zeit t nach der Detonation abhängt. Finde die Gleichung für E in Abhängigkeit von den erwähnten Variablen

$$E = Kf(\rho, R, t)$$

wobei K einheitslose eine Konstante ist. **2 pt.**

We can use dimension analysis and make the ansatz

$$E = KR^x \rho^y t^z.$$

1 pt.

For the units kg, m and s we get the equations

$$y = 1,$$

$$x - 3y = 2,$$

$$z = -2.$$

(0.25 points for each equation) 0.75 pt

We finally find $x = 5$ leading to the equation

$$E = KR^5 \rho t^{-2}.$$

0.25 pt

ii. Bei genauer Analyse findet man einen Wert von $K = 0.851$ für die Konstante. Finde die Energie in Kilotonnen TNT ($1\,\mathrm{kt}$ TNT $= 4.184 \times 10^{12}\,\mathrm{J}$) der in der Abbildung dargestellten Atombombe. Die Dichte von Luft ist $1.225\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. **1 pt.**

By constructing the center of the fire ball with two secants, the radius is estimated to be 78 m. All solutions within [68 m, 88 m] should give full points. 0.5 pt.

The energy then is 20 kt of TNT. Give points if the solution lies within [10 kt of TNT, 37 kt of TNT]. 0.5 pt.

iii. Wie hoch ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feuerballs in dem Augenblick, in dem das Bild aufgenommen wurde? 1 pt.

From our formula we get

$$R = \left(\frac{E}{K\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$$

and therefore

$$v = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5}\left(\frac{E}{K\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} = \frac{2R}{5t}.$$

0.5 pt.

The numerical value gives $v = 5200\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Give full points for the solution if it is consistent with the result from question ii. 0.5 pt.

SOLUTION

Aufgabe 2.6: Chügelipistole *4 pt.*

i. Ein zylindrischer Kolben mit Volumen $20\,\mathrm{mL}$ sei bei Atmosphärendruck mit einem idealen Gas mit drei Freiheitsgraden gefüllt. Vor dem Schuss komprimieren wir den Kolben isotherm. Was ist die innere Energie des Gases nach der Kompression? **1 pt.**

Since the process is isothermic the internal energy E is the same as before compression

$$E = \frac{3}{2} p_\mathrm{i} V_\mathrm{i}$$

where V_i is the initial volume of $20\,\mathrm{mL}$ and p_i is atmospheric pressure. 0.5 pt.

We get $E = 3\,\mathrm{J}$. 0.5 pt.

ii. Wir schiessen nun eine Kugel von $1\,\mathrm{g}$ ab, welche durch die plötzliche Expansion des Kolbens auf $150\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ beschleunigt wird. Berechne das komprimierte Volumen V_0 vor der Schussabgabe. *Tipp: Welche Art von Prozess beschreibt die schnelle Expansion des Kolbens am besten?* **3 pt.**

Let J be the change in internal energy during the expansion

$$J = \frac{3}{2}\left(p_0 V_0 - pV\right) = E - \frac{3}{2} pV$$

where p_0, V_0 are the pressure and the volume before the shot and p, V the pressure and volume after the shot. 0.5 pt.

Solving for V gives

$$V = \frac{2}{3}\frac{E - J}{p}.$$

0.5 pt.

Since the expansion is happening very fast we can approximate it by an adiabatic process.

$$p_0 V_0^{\frac{5}{3}} = pV^{\frac{5}{3}}$$

0.5 pt.

We can solve for V_0

$$V_0 = \frac{2}{3p}\frac{(E - J)^{\frac{5}{2}}}{E^{\frac{3}{2}}}.$$

0.5 pt.

In an adiabtic process no heat is transfered therefore

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{b}^2 = E_\mathrm{kin,b} = J.$$

0.5 pt.

The numerical value of V_0 is $8.5\,\mathrm{mL}$. Again the final pressure p has to be equal to the atmospheric pressure. 0.5 pt.

SOLUTION