PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

online, 20. - 21. März 2021

Theorie Teil 1	**:**	**1 Aufgabe**
Dauer	:	60 Minuten
Total	:	15 Punkte
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher Schreib- und Zeichenmaterial Ein beidseitig handgeschriebenes A4 Notizblatt

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#9c6c40df

Theoretische Probleme

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 15 Punkte

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern. Beschrifte die Blätter mit deinem Namen und der Aufgabennummer. Nummeriere zudem deine Lösungblätter.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiter zu lesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Naturkonstanten

Hyperfeinstruktur-Übergangsfrequenz des Cäsiums	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Boltzmann Konstante	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Magnetische Konstante	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Gaskonstante	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann Konstante	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse des Elektrons	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse des Neutrons	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse des Protons	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Aufgabe 1.1: Wirbelstrombremse *(15 Punkte)*

Beim Zugmodell ICE 3 kommt eine lineare Wirbelstrombremse zum Einsatz. Die Wirbelstrombremse besteht aus sechs Polschuhen, welche sich im Betrieb knapp über der Schiene befinden. Die Polschuhe erzeugen dabei ein Magnetfeld, welches senkrecht zur Schiene steht.

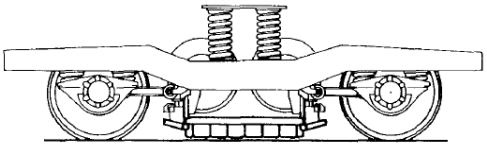


Abbildung 1.1.1: Skizze der Radaufhängung mit der Wirbelstrombremse in der Mitte unten.

Im folgenden werden wir die Funktionsweise der Wirbelstrombremse genauer betrachten und eine quantitative Abschätzung der Bremsleistung durchführen.

Teil A. Funktionsweise *(1.5 Punkte)*

i. (1.5 pt.) Erkläre qualitativ und in wenigen Sätzen die Funktionsweise der Wirbelstrombremse.

Teil B. Ströme in der Schiene *(8.5 Punkte)*

Um das Wirkungsprinzip der Wirbelstrombremse genauer zu untersuchen, nehmen wir an, dass die Schienen eine Höhe von 5 cm, eine Breite von 7 cm und einen spezifischen Widerstand von $5 \times 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$ haben. Die Wirbelstrombremse selbst hat eine Länge von 1 m und erzeugt ein homogenes Magnetfeld senkrecht zur Schiene.

i. (2 pt.) Skizziere qualitativ die in der Schiene hervorgerufenen Ströme. Zeichne auch die Richtung des Magnetfeldes, die Bewegungsrichtung des Zuges und die technische Stromrichtung ein. *Tipp: Überlege dir wie die Ströme aussehen, wenn die Schiene breiter als die Wirbelstrombremse ist. Vernachlässige somit allfällige Effekte am Rand der Schiene.*

Bei einer Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ hat eine Wirbelstrombremse von einem Meter Länge eine Bremskraft von 8000 N.

ii. (1 pt.) Wie gross ist die Bremsleistung der Wirbelstrombremse bei dieser Geschwindigkeit?

iii. (4 pt.) Schätze die Stromstärke in der Schiene ab.

iv. (1.5 pt.) Wie verhält sich die Bremskraft in Abhängigkeit der Geschwindigkeit? Wieso ist die Wirbelstrombremse nicht geeignet, um das Rad ganz anzuhalten?

Teil C. Bremsweg *(5 Punkte)*

In diesem Abschnitt betrachten wir den Bremsweg eines Eisenbahnwaggons mit einer Masse von 77 Tonnen. Der Waggon hat zwei Radaufhängungen, eine hinten und eine vorne. Bei beiden Radaufhängungen ist jeweils eine Wirbelstrombremse von einem Meter Länge links und rechts montiert. Die Schienen haben die gleichen Eigenschaften wie in Teil B.

i. (3 pt.) Stelle die Bewegungsgleichung für den Waggon auf und berechne, wie lange es dauert, den Zug von $150\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ auf $50\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ abzubremsen. Wir vernachlässigen den Luftwiderstand und betrachten alleine die Bremswirkung der Wirbelstrombremse.

ii. (2 pt.) Finde den Bremsweg, um von $150\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ auf $50\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ abzubremsen.

Theoretische Probleme: Lösungen

Aufgabe 1.1: Wirbelstrombremse *15 pt.*

Beim Zugmodell ICE 3 kommt eine lineare Wirbelstrombremse zum Einsatz. Die Wirbelstrombremse besteht aus sechs Polschuhen, welche sich im Betrieb knapp über der Schiene befinden. Die Polschuhe erzeugen dabei ein Magnetfeld, welches senkrecht zur Schiene steht.

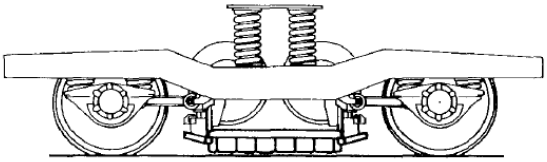


Abbildung 1.1.1: Skizze der Radaufhängung mit der Wirbelstrombremse in der Mitte unten.

Im folgenden werden wir die Funktionsweise der Wirbelstrombremse genauer betrachten und eine quantitative Abschätzung der Bremsleistung durchführen.

Teil A. Funktionsweise *1.5 pt.*

i. Erkläre qualitativ und in wenigen Sätzen die Funktionsweise der Wirbelstrombremse. **1.5 pt**

The magnets in the brake induce an electromotive force in the rail and therefore a current. 0.5 pt.

The induced currents produce a magnetic field themselves which acts on the charge carriers in the brake. 0.5 pt.

According to Lenz's rule, this force acts against its cause (the velocity difference between rail and train) and decelerates the train. 0.5 pt.

Teil B. Ströme in der Schiene *8.5 pt.*

Um das Wirkungsprinzip der Wirbelstrombremse genauer zu untersuchen, nehmen wir an, dass die Schienen eine Höhe von $5\,\mathrm{cm}$, eine Breite von $7\,\mathrm{cm}$ und einen spezifischen Widerstand von $5 \times 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$ haben. Die Wirbelstrombremse selbst hat eine Länge von $1\,\mathrm{m}$ und erzeugt ein homogenes Magnetfeld senkrecht zur Schiene.

i. Skizziere qualitativ die in der Schiene hervorgerufenen Ströme. Zeichne auch die Richtung des Magnetfeldes, die Bewegungsrichtung des Zuges und die technische Stromrichtung ein. ***Tipp: Überlege dir wie die Ströme aussehen, wenn die Schiene breiter als die Wirbelstrombremse ist. Vernachlässige somit allfällige Effekte am Rand der Schiene.*** **2 pt.**

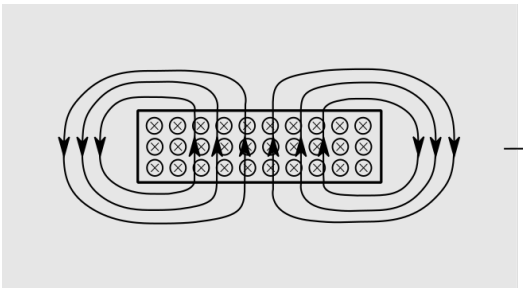


Abbildung 1.1.2: Sketch of the eddy currents in the reference frame of the train, so the rail/metal plate is moving.

SOLUTIONS

The sketch looks nice. 0.5 pt.

The direction of the magnetic field is drawn. 0.25 pt

The direction of the train movement is drawn. 0.25 pt

The current flows along the diameter in the direction of the wheel center. After the pole shoe the current flows back on both sides outside of the pole shoe. 0.5 pt.

The direction of the current can be determined by the right hand rule. Note: The result depends on how the direction of the magnetic field and the direction of the train movement is drawn. 0.5 pt.

Bei einer Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ hat eine Wirbelstrombremse von einem Meter Länge eine Bremskraft von $8000\,\mathrm{N}$.

ii. Wie gross ist die Bremsleistung der Wirbelstrombremse bei dieser Geschwindigkeit? 1 pt.

The braking power is

$$P = Fv.$$

0.5 pt.

A numerical application gives

$$P = 0.13\,\mathrm{MW}.$$

0.5 pt.

iii. Schätze die Stromstärke in der Schiene ab. 4 pt.

According to energy conversation this dissipated heat is equal to the braking power. 0.5 pt.

The dissipated heat of the circuit is

$$P = RI^2.$$

To calculate the current I we need a an estimation of the resistance R. 0.5 pt.

For simplicity we assume that the current flows uniformely from one side to the other side in the rail on a length equal to pole shoe. 0.5 pt.

The resistance of a piece of metal with length s and cross-section A is

$$R = \rho\frac{s}{A},$$

where ρ is the resistivity. 0.5 pt.

So the resistance of this part of the rail is

$$R = \rho\frac{l}{bh}.$$

0.5 pt.

Since the current also flows back we get a total resistance

$$R_{\mathrm{tot}} = 2\rho\frac{l}{bh}.$$

0.5 pt.

SOLUTIONS

We get

$$I = \sqrt{\frac{Pbh}{2\rho l}}.$$

0.5 pt.

The numerical value is 21 kA. 0.5 pt.

iv. Wie verhält sich die Bremskraft in Abhängigkeit der Geschwindigkeit? Wieso ist die Wirbelstrombremse nicht geeignet, um das Rad ganz anzuhalten? **1.5 pt**

The Lorentz force and therefore the induced current are proportional to velocity of the train. This means that the strength of the magnetic field produced by the eddy current and therefore the braking force is proportional to the velocity. 1 pt.

Since the force is proportional to velocity, there is almost no braking force for low velocities. 0.5 pt.

Teil C. Bremsweg *5 pt.*

In diesem Abschnitt betrachten wir den Bremsweg eines Eisenbahnwaggons mit einer Masse von 77 Tonnen. Der Waggon hat zwei Radaufhängungen, eine hinten und eine vorne. Bei beiden Radaufhängungen ist jeweils eine Wirbelstrombremse von einem Meter Länge links und rechts montiert. Die Schienen haben die gleichen Eigenschaften wie in Teil B.

i. Stelle die Bewegungsgleichung für den Waggon auf und berechne, wie lange es dauert, den Zug von $150\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ auf $50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ abzubremsen. Wir vernachlässigen den Luftwiderstand und betrachten alleine die Bremswirkung der Wirbelstrombremse. **3 pt.**

The equations of motion are

$$\sum_i F_i = Ma = M\dot{v}.$$

0.5 pt.

In our case the force F is proportional to v and we get the differential equation

$$-Av = m\dot{v}.$$

0.5 pt.

The solution of this equation is

$$v(t) = Ce^{-\frac{A}{m}t},$$

with integration constant C. 0.5 pt.

The initial condition $v(0) = v_i$ gives

$$v(t) = v_i e^{-\frac{A}{m}t}.$$

0.5 pt.

Now we can solve for t_f when it reaches the final velocity v_f.

$$t_f = \log\left(\frac{v_i}{v_f}\right)\frac{m}{A}$$

0.5 pt.

SOLUTIONS

From the braking force at $60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ we can determine the constant $A = 1920\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. This gives $t_f = 44\,\mathrm{s}$. 0.5 pt.

ii. Finde den Bremsweg, um von $150\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ auf $50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ abzubremsen. **2 pt.**

The solution from above is $v(t) = v_i e^{-\frac{A}{m}t}$ and we make an integration

$$s(t) = -\frac{v_i m}{A} e^{-\frac{A}{m}t} + s_0.$$

1 pt.

Therefore the distance for the braking is

$$\Delta s = -\frac{v_i m}{A} e^{-\frac{A}{m}t_f} + \frac{v_i m}{A} = \frac{(v_i - v_f)\, m}{A}.$$

0.5 pt.

We get a numerical value of

$$\Delta s = 1114\,\mathrm{m}.$$

0.5 pt.

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

online, 20. - 21. März 2021

Theorie Teil 2	:	**1 Aufgabe**
Dauer	:	60 Minuten
Total	:	16 Punkte
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher Schreib- und Zeichenmaterial Ein beidseitig handgeschriebenes A4 Notizblatt

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Theoretische Probleme

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 16 Punkte

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern. Beschrifte die Blätter mit deinem Namen und der Aufgabennummer. Nummeriere zudem deine Lösungblätter.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiter zu lesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Naturkonstanten

Hyperfeinstruktur-Übergangsfrequenz des Cäsiums	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Boltzmann Konstante	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Magnetische Konstante	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Gaskonstante	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann Konstante	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse des Elektrons	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse des Neutrons	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse des Protons	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Aufgabe 2.1: Polytrope Zustandsänderung *(16 Punkte)*

Teil A. Endotherm vs exotherm *(7 Punkte)*

Betrachten wir die folgende polytrope Zustandsänderung

$$TV^{k-1} = \text{const.}$$

von n Mol eines idealen Gases.

i. (1 pt.) Wie nennt man die polytropen Zustandsänderungen mit Index $k = 0, 1, \gamma, \infty$? ($\gamma = C_p/C_V$ ist der Adiabatenexponent.)

ii. (2 pt.) Skizziere die p–V Kurven für die polytropen Zustandsänderungen mit $k = 0, 1, \gamma, \infty$ in einem gemeinsamen Diagramm, wobei sich die Kurven beim Punkt $A\,(V_0, p_0)$ schneiden.

iii. (2 pt.) Die Skizze in Teil ii. sollte die p–V Ebene in acht Gebiete teilen, da die Funktionen nur einen Schnittpunkt haben. Betrachte nun eine polytrope Zustandsänderung von A in jedes der acht Gebiete. Sei gegeben, dass die absorbierte Wärme $\mathrm{d}Q$ des Gases während einer infinitessimalen polytropen Zustandsänderung mit

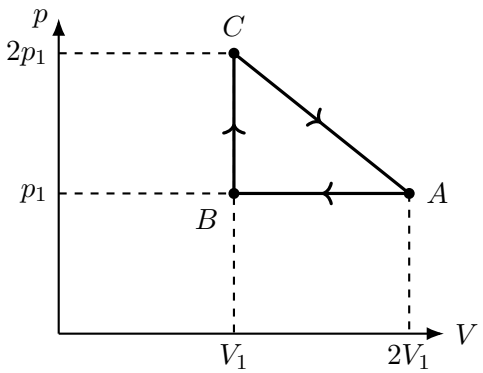
$$\mathrm{d}Q = nC_V \frac{k-\gamma}{k-1}\mathrm{d}T$$

gegeben ist, diskutiere für jeden einzelnen Fall ob der Prozess endotherm oder exotherm ist, d.h. ob $\mathrm{d}Q$ positiv oder negativ ist.

iv. (2 pt.) Zeige draus - oder anderweitig, dass für jede polytrope Zustandsänderung eines idealen Gases jeder tangentielle Punkt zwischen dem Prozess und der adiabatischen Kurve ein Wendepunkt zwischen einem exothermen und einem endothermen Prozess ist.

Teil B. Dreieckiger Kreisprozess p–V *(9 Punkte)*

1 mol eines einatomigen idealen Gases untergeht einen Zyklus wie in der Abbildung dargstellt. AB, BC und CA sind alles Geraden. Alle wichtigen Grössen sind in der Abbildung gegeben.



i. (1 pt.) Finde den Ausdruck $p(V)$ für den Expansionsprozess CA.

ii. (3.5 pt.) In Wirklichkeit ist die Aussage von Punkt A.iv. nicht nur für polytrope Zustandsänderungen wahr, sondern für jede Zustandsänderung. Darüberhinaus ist auch das Gegenteil wahr: jeder Wendepunkt zwischen einem exothermen und einem endothermen Prozess ist auch ein Punkt der an einer Adiabatenkurve liegt. Mit Hilfe dieser Information, bestimme den Wendepunkt zwischen dem endothermen und exothermen Process für CA.

iii. (4.5 pt.) Bestimme die Effizienz η des Zyklus.

Theoretische Probleme: Lösungen

Aufgabe 2.1: Polytrope Zustandsänderung *16 pt.*

Teil A. Endotherm vs exotherm *7 pt.*

Betrachten wir die folgende polytrope Zustandsänderung

$$TV^{k-1} = \textbf{const.}$$

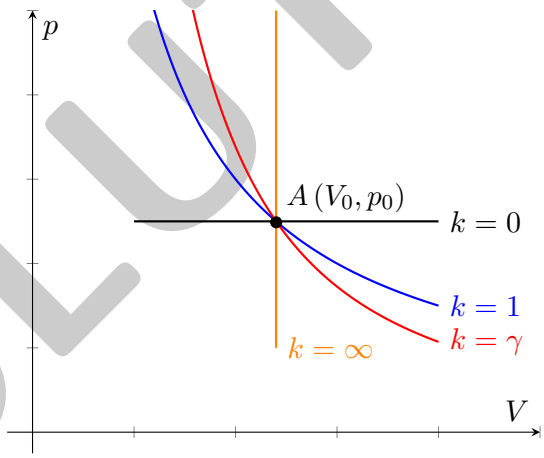
von n Mol eines idealen Gases.

i. Wie nennt man die polytropen Zustandsänderungen mit Index $k = 0, 1, \gamma, \infty$? ($\gamma = C_p/C_V$ ist der Adiabatenexponent.) **1 pt.**

$$TV^{k-1} = C \implies pV^k = C$$

Therefore, $k = 0$ corresponds to the isobaric process. $k = 1$ corresponds to the isothermal process. $k = \gamma$ corresponds to the adiabatic process. $k = \infty$ corresponds to the isochoric process. 0.25 points for each correct answer. 1 pt.

ii. Skizziere die p–V Kurven für die polytropen Zustandsänderungen mit $k = 0, 1, \gamma, \infty$ in einem gemeinsamen Diagramm, wobei sich die Kurven beim Punkt $A\,(V_0, p_0)$ schneiden. **2 pt.**



$k = 0$ horizontal 0.5 pt.

$k = \infty$ vertical 0.5 pt.

$k = 1$ convex 0.5 pt.

$k = \gamma$ convex, steeper (for p on the y-axis) than $k = 1$ 0.5 pt.

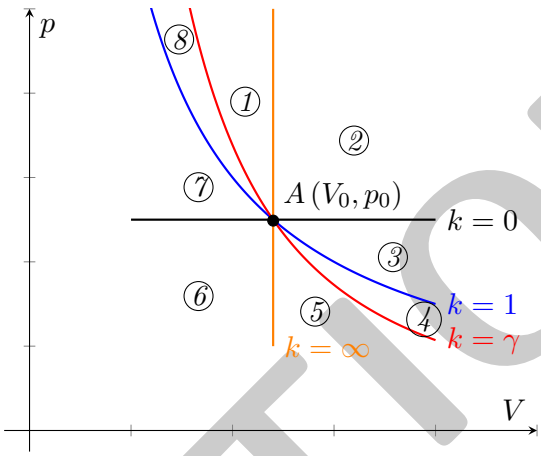
Swapping the diagram (p on the x-axis, V on y) is allowed.
-1 point if the labeling is incorrect.
-1 point if the four processes do not cross at (and only at) A.
(no negative points in total)

SOLUTIONS

iii. Die Skizze in Teil ii. sollte die p–V Ebene in acht Gebiete teilen, da die Funktionen nur einen Schnittpunkt haben. Betrachte nun eine polytrope Zustandsänderung von A in jedes der acht Gebiete. Sei gegeben, dass die absorbierte Wärme $\mathrm{d}Q$ des Gases während einer infinitessimalen polytropen Zustandsänderung mit

$$\mathrm{d}Q = nC_V \frac{k-\gamma}{k-1}\mathrm{d}T$$

gegeben ist, diskutiere für jeden einzelnen Fall ob der Prozess endotherm oder exotherm ist, d.h. ob $\mathrm{d}Q$ positiv oder negativ ist. **2 pt.**



- *The process from A to ⑧:*
  $k = 1$ is the isothermal curve. From A to ⑧ means $\mathrm{d}T > 0$, as the end point of the process is above the isothermal curve. In this region, $1 < k < \gamma$, together with $\mathrm{d}T > 0$, we have $\mathrm{d}Q < 0$ from the given expression of $\mathrm{d}Q$. This process is exothermic.

- *The process from A to ①:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $\gamma < k < \infty$ and $\mathrm{d}T > 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.

- *The process from A to ②:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $k < 0$ and $\mathrm{d}T > 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.

- *The process from A to ③:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $0 < k < 1$ and $\mathrm{d}T > 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.

- *The process from A to ④:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $1 < k < \gamma$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q > 0$. This process is endothermic.

- *The process from A to ⑤:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $\gamma < k < \infty$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q < 0$. This process is exothermic.

- *The process from A to ⑥:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $k < 0$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q < 0$. This process is exothermic.

- *The process from A to ⑦:*
  By a similar reasoning as for ⑧, $0 < k < 1$ and $\mathrm{d}T < 0$ gives $\mathrm{d}Q < 0$. This process is exothermic.

SOLUTIONS

0.25 points for each correct answer.
-1 point if the different regions are not clearly identifiable.
-1.5 points if no justification is given (shortening the justification of later cases by similarity with previous ones is allowed).
(no negative points in total) 2 pt.

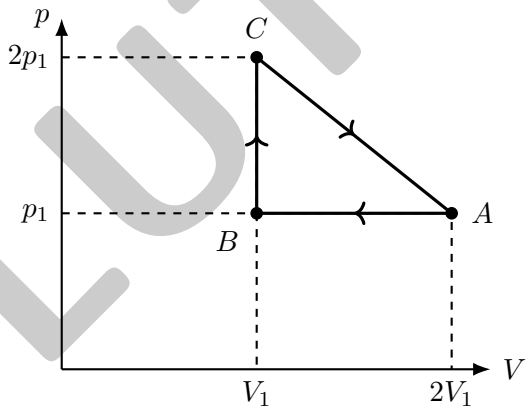
iv. Zeige draus - oder anderweitig, dass für jede polytrope Zustandsänderung eines idealen Gases jeder tangentielle Punkt zwischen dem Prozess und der adiabatischen Kurve ein Wendepunkt zwischen einem exothermen und einem endothermen Prozess ist. **2 pt.**

In iii., we have shown that from A to ①, ②, ③, ④ are endothermic and from A to ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ are exothermic. Thus, we can deduce that from ①, ②, ③, ④ to A is exothermic and from ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ to A is endothermic. 1 pt.

Regions ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ and ①, ②, ③, ④ are divided by the adiabatic curve, i.e., $k = \gamma$. Any process that is on the left side of the adiabatic curve and is tangent to the adiabatic curve at A is endothermic for points above A and exothermic for points below A. Therefore, A is the turning point between the endothermic and exothermic process. The same reasoning applies to the case when the process is on the right side of the adiabatic curve. 1 pt.

Teil B. Dreieckiger Kreisprozess p–V *9 pt.*

1 mol **eines einatomigen idealen Gases untergeht einen Zyklus wie in der Abbildung dargstellt. AB, BC und CA sind alles Geraden. Alle wichtigen Grössen sind in der Abbildung gegeben.**



i. Finde den Ausdruck $p(V)$ für den Expansionsprozess CA. **1 pt.**

Plugging $(V_1, 2p_1)$ and $(2V_1, p_1)$ into $p = mV + C$, we get

$$p = -\frac{p_1}{V_1}V + 3p_1.$$

1 pt.

ii. In Wirklichkeit ist die Aussage von Punkt A.iv. nicht nur für polytrope Zustandsänderungen wahr, sondern für jede Zustandsänderung. Darüberhinaus ist auch das Gegenteil wahr: jeder Wendepunkt zwischen einem exothermen und einem endothermen Prozess ist auch ein Punkt der an einer Adiabatenkurve liegt. Mit Hilfe dieser Information, bestimme den Wendepunkt zwischen dem endothermen und exothermen Process für CA. **3.5 pt**

SOLUTIONS

The turning point between the endothermic and exothermic process is the tangent point between CA and the adiabatic curve.

The slope of the CA curve is

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{CA} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(-\frac{p_1}{V_1}V + 3p_1\right) = -\frac{p_1}{V_1}.$$

1 pt.

The slope of the adiabatic curve is

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{\gamma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(CV^{-\gamma}\right) = -\gamma C V^{-\gamma-1}.$$

1 pt.

Suppose the tangent point is (V_0, p_0), we have $C = p_0 V_0^{\gamma}$, and the slope of the adiabatic curve at the tangent point is

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{\gamma}(V_0) &= -\gamma \cdot p_0 V_0^{\gamma} \cdot V_0^{-\gamma-1} \\ &= -\gamma \cdot \left(-\frac{p_1}{V_1}V_0 + 3p_1\right) \cdot V_0^{-1} \\ &= -\gamma \cdot \left(\frac{3p_1}{V_0} - \frac{p_1}{V_1}\right).\end{aligned}$$

0.5 pt.

Equating the slope of the CA curve and that of the adiabatic curve

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{CA} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{\gamma},$$

0.5 pt.

we can obtain (V_0, p_0), i.e., the turning point.

$$-\frac{p_1}{V_1} = -\gamma \cdot \left(\frac{3p_1}{V_0} - \frac{p_1}{V_1}\right) \implies V_0 = \frac{15}{8}V_1$$

$$p_0 = p(V_0) = -\frac{p_1}{V_1}V_0 + 3p_1 = \frac{9}{8}p_1$$

Thus, the turning point between the endothermic and exothermic process on the CA curve is $\left(\frac{15}{8}V_1, \frac{9}{8}p_1\right)$. 0.5 pt.

iii. Bestimme die Effizienz η des Zyklus. **4.5 pt**

$$\eta = \frac{W}{Q}$$

where W is the work done by the gas and Q is the total heat intaken by the gas.

0.5 pt.

The work W done by the gas is just area of the triangle ABC

$$W = \frac{1}{2}p_1 V_1.$$

SOLUTIONS

0.25 pt

The total heat Q intaken by the gas has two contributions, one from the BC process and the other from the CA process.

0.25 pt

Calculating Q_{BC} is trivial because it is an isochoric process

$$Q_{BC} = nC_V\left(T_C - T_B\right) = \frac{3}{2}R \cdot \frac{p_1 V_1}{R} = \frac{3}{2}p_1 V_1$$

where we have used the fact that $n = 1$ in this problem and $C_V = \frac{3}{2}R$ for a monoatomic ideal gas.

0.5 pt.

To calculate Q_{CA}, one first needs to realize that the endothermic process is from $(V_1, 2p_1)$ to $\left(\frac{15}{8}V_1, \frac{9}{8}p_1\right)$. During this process, the work done by the gas is the area of a trapezoid

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \left(2p_1 + \frac{9}{8}p_1\right)\left(\frac{15}{8}V_1 - V_1\right) = \frac{175}{128}p_1 V_1.$$

0.5 pt.

Meanwhile, the increase in internal energy of the gas is

$$\Delta U = nC_V \Delta T = \frac{3}{2}R \cdot \frac{\frac{15}{8}V_1 \cdot \frac{9}{8}p_1 - V_1 \cdot 2p_1}{R} = \frac{21}{128}p_1 V_1.$$

0.5 pt.

From the first law of thermodynamics,

$$Q_{CA} = W' + \Delta U = \frac{49}{32}p_1 V_1.$$

0.5 pt.

Thus, the total heat intaken by the gas is

$$Q = Q_{CA} + Q_{BC} = \left(\frac{49}{32} + \frac{3}{2}\right)p_1 V_1 = \frac{97}{32}p_1 V_1.$$

0.5 pt.

The efficiency of the cycle is

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{\frac{1}{2}p_1 V_1}{\frac{97}{32}p_1 V_1} = \frac{16}{97}.$$

1 pt.

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

online, 20. - 21. März 2021

Theorie Teil 3	**:**	**1 Aufgabe**
Dauer	:	60 Minuten
Total	:	16 Punkte
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher Schreib- und Zeichenmaterial Ein beidseitig handgeschriebenes A4 Notizblatt

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Theoretische Probleme

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 16 Punkte

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern. Beschrifte die Blätter mit deinem Namen und der Aufgabennummer. Nummeriere zudem deine Lösungblätter.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiter zu lesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Naturkonstanten

Hyperfeinstruktur-Übergangsfrequenz des Cäsiums	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Boltzmann Konstante	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Magnetische Konstante	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Gaskonstante	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann Konstante	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse des Elektrons	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse des Neutrons	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse des Protons	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Aufgabe 3.1: U-Rohr *(16 Punkte)*

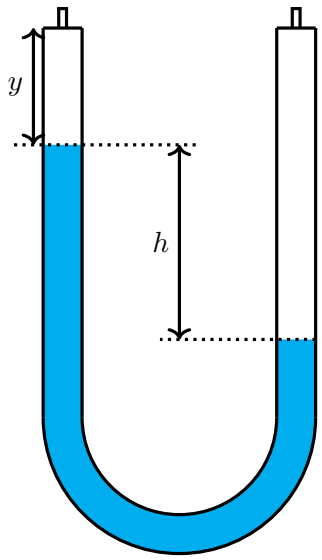


Abbildung 3.1.1: Mit Wasser (blau) und Luft (weiss) gefülltes U-Rohr.

Du besuchst Emmy in ihrem Labor und siehst dort ein U-förmiges Rohr (Abb. 3.1.1) auf dem Tisch stehen. Im Rohr befindet sich Wasser mit Volumen V und Luft. Das Rohr hat Querschnittsfläche A und ist an beiden Enden mit Ventilen verschlossen. Durch die Ventile kann Luft herein- und herausgepumpt werden.

i. (16 pt.) Emmy hat das Rohr so gefüllt, dass die zwei Wassersäulen in Ruhe eine Höhendifferenz h aufweisen. Der Abstand zwischen der höheren Säule und dem Ventil ist y. Du willst dir das Rohr genauer ansehen und stösst dabei gegen den Tisch. Die Wassersäulen im Rohr beginnen zu schwingen. Welches ist die **kleinstmögliche** Frequenz dieser Schwingung?
Annahmen: Die Auslenkung der Wassersäule aus der Gleichgewichtslage ist klein. Die Temperatur bleibt konstant. Du kannst Reibung vernachlässigen. Vernachlässige ausserdem das Verdampfen von Wasser und das Lösen von Luftmolekülen im Wasser.

Theoretische Probleme: Lösungen

Aufgabe 3.1: U-Rohr *16 pt.*

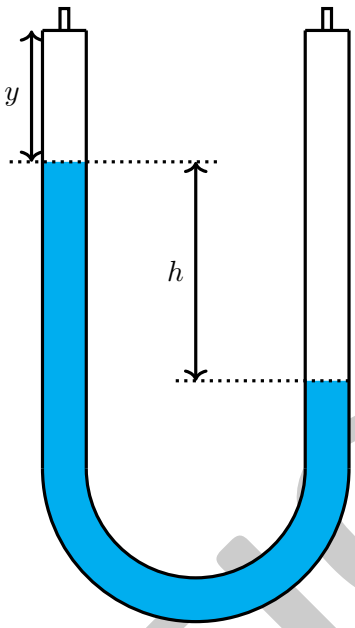


Abbildung 3.1.1: Mit Wasser (blau) und Luft (weiss) gefülltes U-Rohr.

Du besuchst Emmy in ihrem Labor und siehst dort ein U-förmiges Rohr (Abb. 3.1.1) auf dem Tisch stehen. Im Rohr befindet sich Wasser mit Volumen V und Luft. Das Rohr hat Querschnittsfläche A und ist an beiden Enden mit Ventilen verschlossen. Durch die Ventile kann Luft herein- und herausgepumpt werden.

i. Emmy hat das Rohr so gefüllt, dass die zwei Wassersäulen in Ruhe eine Höhendifferenz h aufweisen. Der Abstand zwischen der höheren Säule und dem Ventil ist y. Du willst dir das Rohr genauer ansehen und stösst dabei gegen den Tisch. Die Wassersäulen im Rohr beginnen zu schwingen. Welches ist die kleinstmögliche Frequenz dieser Schwingung?
Annahmen: Die Auslenkung der Wassersäule aus der Gleichgewichtslage ist klein. Die Temperatur bleibt konstant. Du kannst Reibung vernachlässigen. Vernachlässige ausserdem das Verdampfen von Wasser und das Lösen von Luftmolekülen im Wasser. **16 pt.**

In this problem, there are three important forces acting on the water. There's the gravitational force, which causes hydrostatic pressure. The other forces are due to the air pressure in the two air columns. We will first consider the equilibrium case and then move to oscillations.
The air can be approximately treated as ideal gas. By the ideal gas law, the pressure in the air columns is

$$p_l = \frac{n_l RT}{V_l}, \quad p_r = \frac{n_r RT}{V_r},$$

where the subscripts l, r refer to the left and right air column, respectively and T is the temperature, V_i is the volume of the air column, n_i is the amount of substance and R is the ideal gas constant.
In equilibrium, the pressure difference of the air compensates the hydrostatic pressure difference, i.e. $\Delta p_{hyd} = p_r - p_l$. The hydrostatic pressure difference is given by $\Delta p_{hyd} = \rho g h$, where ρ is the density of water and g is the gravitational acceleration. Hence, the equilibrium condition is

$$\rho g h = \frac{n_r RT}{V_r} - \frac{n_l RT}{V_l} = \frac{RT}{A}\left(\frac{n_r}{y+h} - \frac{n_l}{y}\right). \tag{3.1.2}$$

SOLUTIONS

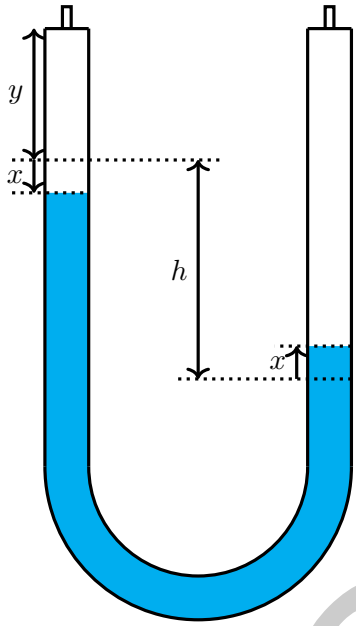


Abbildung 3.1.3: U-tube filled with water (blue) and air (white).

Now suppose the water is deflected by a small amount x, as shown in Figure 3.1.3. The total force acting on the water column is given by

$$F_{tot} = \rho g\,(h-2x)\,A + \frac{n_l RT}{y+x} - \frac{n_r RT}{y+h-x}.$$

Since x is small, we linearize the force around $x=0$ and obtain

$$F_{tot} \approx \rho g\,(h-2x)\,A + \frac{n_l RT}{y} - \frac{n_r RT}{y+h} - \frac{n_l RT}{y^2}x - \frac{n_r RT}{(y+h)^2}x = -\left(2\rho g + \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y+h)^2}\right)x,$$

where we used (3.1.2) *for the second equality. By Newton's law, $F_{tot} = \rho V \ddot{x}$. Therefore we obtain the equation of motion of a harmonic oscillator*

$$\ddot{x} = -\frac{2\rho g A + \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y+h)^2}}{\rho V}x.$$

The frequency is

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho g A + \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y+h)^2}}{\rho V}}.$$

To find the minimal frequency we need to minimize

$$\frac{n_l RT}{y^2} + \frac{n_r RT}{(y+h)^2}$$

over $n_l, n_r \geq 0$. The n_l and n_r are not independent since they have to satisfy (3.1.2)*. Solving* (3.1.2) *for n_r and plugging this into the above expression we obtain the function*

$$G(n_l) = \frac{n_l RT}{y^2} + \frac{\rho g h A}{y+h} + \frac{n_l RT}{y\,(y+h)}$$

SOLUTIONS

The minimum of G is attained for $n_l = 0$ with value $G(0) = \frac{\rho g h A}{y+h}$. Therefore, the minimal possible frequency is

$$f_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gA\,(2y+3h)}{V\,(y+h)}}.$$

Write down ideal gas equation $pV = nRT$ (or $pV = NkT$)) or use $pV = \text{const.}$. Here, $pV = nRT$ is used but the other variants are equally valid. 1 pt.

Write down hydrostatic pressure $p_h = \rho g h$ 1 pt.

Write down the equilibrium condition:

$$\rho g h = p_\mathrm{r} - p_\mathrm{l} = \frac{RT}{A}\left(\frac{n_\mathrm{r}}{y+h} - \frac{n_\mathrm{l}}{y}\right)$$

2 pt.

Correct expression for the force of the air on the left side (as a function of the deflection):

$$F_\mathrm{l}(x) = n\frac{RT}{y+x}$$

0.5 pt.

Correct expression for the force of the air on the right side (as a function of the deflection):

$$F_\mathrm{r}(x) = -n\frac{RT}{y+h-x}$$

0.5 pt.

Correct expression for the restoring force of the water:

$$F_\mathrm{h}(x) = \rho g\,(h-2x)\,A$$

0.5 pt.

Name the three forces (or F_tot correct).

$$F_\mathrm{tot} = F_\mathrm{l} + F_\mathrm{r} + F_\mathrm{h}$$

1 pt.

Correct linearization:

$$F_\mathrm{l} \approx n_\mathrm{l} RT\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)$$
$$F_\mathrm{r} \approx -n_\mathrm{l} RT\left(\frac{1}{y+h} - \frac{x}{(y+h)^2}\right)$$
$$F_\mathrm{tot} \approx -\left(2\rho g A + n_\mathrm{l}\frac{RT}{y^2} + n_\mathrm{r}\frac{RT}{(y+h)^2}\right)x$$

- 0.5 points for the idea of linearization

SOLUTIONS

- 1 point for the first correct linearization (either F_l or F_r)
- 0.5 points for the second correct linearization

2 pt.

Correct mass $M = \rho V$ 1 pt.

Correct equation of motion: $F_\mathrm{tot} = M\ddot{x}$ 0.5 pt.

Correct frequency:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho g A + n_\mathrm{l}\frac{RT}{y^2} + n_\mathrm{r}\frac{RT}{(y+h)^2}}{\rho V}}$$

0 points for incorrect units! 0.5 points for $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ 2 pt.

Minimization over n_l and n_r (and only over those). 1 pt.

$n_\mathrm{l} = 0$ at the minimum and n_r defined by the constraint (i.e. by h fix) 1 pt.

Correct minimal frequency:

$$f_\mathrm{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gA\,(2y+3h)}{V\,(y+h)}}$$

-0.5 points for minor errors (e.g. factor of 2)
-2 points for incorrect units! 2 pt.

SOLUTIONS

PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Physik-Olympiade

Finalrunde

online, 20. - 21. März 2021

Theorie Teil 4	:	**6 Kurzaufgaben**
Dauer	:	60 Minuten
Total	:	24 Punkte (6×4)
Erlaubte Hilfsmittel	:	Taschenrechner ohne Formelspeicher Schreib- und Zeichenmaterial Ein beidseitig handgeschriebenes A4 Notizblatt

Viel Erfolg!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Dectris AG
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Kurzaufgaben

Zeit: 60 Minuten
Maximalpunktzahl: 24 Punkte

Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um das Korrigieren zu erleichtern. Beschrifte die Blätter mit deinem Namen und der Aufgabennummer. Nummeriere zudem deine Lösungblätter.

Allgemeiner Hinweis: Die Aufgaben bestehen aus zum Teil unabhängigen Teilaufgaben, falls Du stecken bleibst lohnt es sich weiter zu lesen und bei einer einfacheren Teilaufgabe wieder einzusteigen.

Naturkonstanten

Hyperfeinstruktur-Übergangsfrequenz des Cäsiums	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$=$	$9\,192\,631\,770$	s^{-1}
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$299\,792\,458$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.626\,070\,15\times10^{-34}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Elementarladung	e	$=$	$1.602\,176\,634\times10^{-19}$	$\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Boltzmann Konstante	k_{B}	$=$	$1.380\,649\times10^{-23}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	N_{A}	$=$	$6.022\,140\,76\times10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	$=$	683	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^3$
Magnetische Konstante	μ_0	$=$	$4\pi\times10^{-7}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Elektrische Konstante	ε_0	$\approx$	$8.854\,187\,82\times10^{-12}$	$\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Gaskonstante	R	$\approx$	$8.314\,462\,618$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann Konstante	σ	$\approx$	$5.670\,374\,419\times10^{-8}$	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^{-4}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Gravitationskonstante	G	$=$	$6.674\,30(15)\times10^{-11}$	$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse des Elektrons	m_{e}	$=$	$9.109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$	kg
Masse des Neutrons	m_{n}	$=$	$1.674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$	kg
Masse des Protons	m_{p}	$=$	$1.672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$	kg
Normfallbeschleunigung	g_{n}	$=$	$9.806\,65$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Aufgabe 4.1: Bungeejumping *(4 Punkte)*

Eine Person der Masse 80 kg geht auf der 220 m hohen Verzascastaumauer Bungeespringen. Das Seil hat eine Federkonstante von $100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ und wir nehmen zur Vereinfachung an, dass es masselos ist.
i. (2.25 pt.) Wie lange muss das Seil sein, damit die Person am tiefsten Punkt 20 m über Boden ist?
ii. (0.75 pt.) Wie lange befindet sich die Person im freien Fall?
iii. (1 pt.) Welche maximale Kraft wirkt auf die Person?

Aufgabe 4.2: Gummiband *(4 Punkte)*

i. (4 pt.) Ein Gummiband der Breite 0.1 m und Länge 1 m umschliesst ein Stahlrohr des gleichen Umfangs, sodass das Band anfänglich nicht gespannt ist. Nun erhitzen wir das Rohr von 20 °C auf 50 °C. Was ist der Druck, welcher am Ende des Heizprozesses vom Gummiband auf das Rohr ausgeübt wird? Der thermale Längenausdehnungskoeffizient des Rohres ist $\alpha = 1.2\times10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ und die Federkonstante des Gummibands ist $k = 1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Du darfst annehmen, dass sich das Gummiband nicht aufgrund der Temperatur ausdehnt und dass sich die Breite nicht ändert.

Aufgabe 4.3: Vakuumröhre *(4 Punkte)*

i. (2 pt.) Ein Ball mit Radius $R = 2\,\mathrm{cm}$ und Masse $m = 10\,\mathrm{g}$ befindet sich am Ende eines Rohres mit dem selben Radius R und Länge $l = 1\,\mathrm{m}$. Die Enden des Rohres sind luftdicht verschlossen und mit einer Pumpe wird innerhalb des Rohres ein perfektes Vakuum erzeugt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Rohr auf der Seite des Balles geöffnet, die Kappe auf der gegenüberliegenden Seite wird von der Kugel widerstandslos zur Seite geschoben. Mit welcher Geschwindigkeit verlässt der Ball das Rohr?
ii. (2 pt.) Beim zweiten Versuch wurde unsorgfältig gearbeitet, sodass das Verhältnis vom Innendrucks zum Aussendruck $q > 0$ beträgt und die Kappe auf der gegenüberliegenden Seite zu fest verschlossen wurde. Skizziere die zurückgelegte Strecke des Balls als Funktion der Zeit für zwei Werte $0 < q_1 < q_2 < 1$.

Aufgabe 4.4: Wega *(4 Punkte)*

Die untenstehende Tabelle enthält Eigenschaften der Sonne und von Wega, einem Hauptstern des Nordhimmels.

	Entfernung	Spektralklasse	Scheinbare Helligkeit	Radius
Sonne	$1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$	G (502 nm)	-26.832	$6.963\times10^{8}\,\mathrm{m}$
Wega	$2.392\times10^{17}\,\mathrm{m}$	A (302 nm)	0.03	?

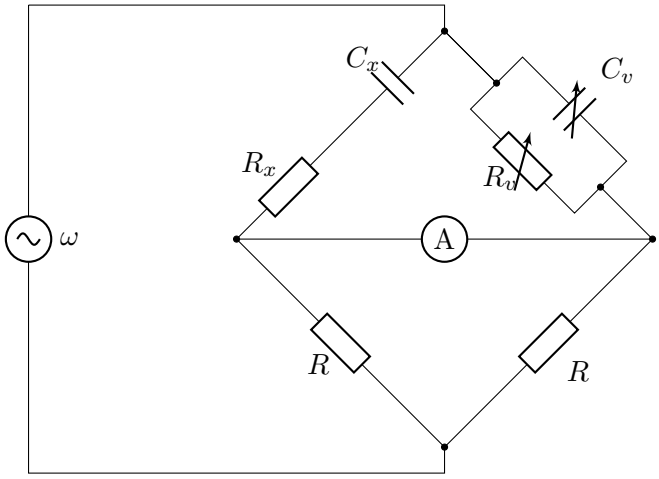
Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Sterne mit einer einzigen Wellenlänge strahlen, welche der maximalen Strahlung eines Schwarzen Körpers mit derselben Temperatur entspricht, und dass die Sterne ideale Strahler sind ($\varepsilon = 1$).
Zur Erinnerung, die scheinbare Helligkeit eines Sternes ist

$$m = -2.5\log_{10}\left(\frac{L}{4\pi d^2}\right),$$

wobei L die intrinsische Leuchtkraft (Strahlungsleistung) des Sterns ist und d die Beobachtungsdistanz.
i. (4 pt.) Berechne Wegas Radius. *Anmerkung: Die angegebene Formel - obwohl in der Literatur oft so angegeben - ist mathematisch nicht ganz korrekt. Genauer wäre die Formel* $m_1 - m_2 = -2.5\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$ *für zwei Objekte 1 und 2 mit* $E_i = \frac{L_i}{4\pi d_i^2}$. *Dies wurde während der Korrektur berücksichtigt.*

Aufgabe 4.5: Wien-Brücke *(4 Punkte)*

Diese Abbildung zeigt eine Schaltung, Wien-Brücke genannt, die an eine Wechselstromquelle mit der Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ angeschlossen ist.
Die Wien-Brücke erlaubt die Berechnung der Eigenschaften eines unbekannten kapazitiven Elements, hier dargestellt durch den Widerstand R_x und die Kapazität C_x.
Dazu gleicht man die Brücke aus, das heisst, dass man R_v und C_v so lange variiert, bis das Amperemeter über der Brücke null anzeigt.

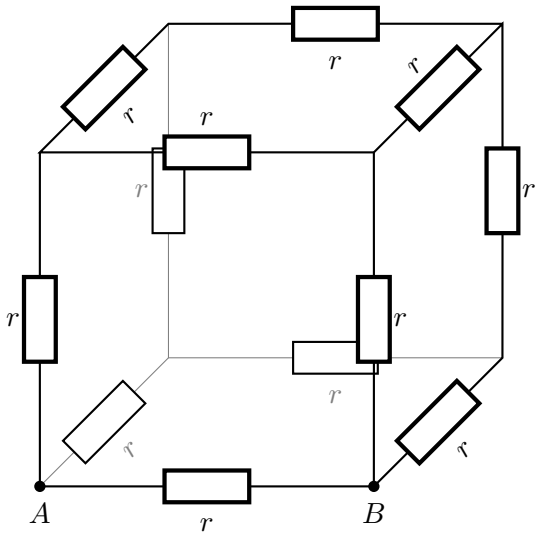


i. (4 pt.) Bestimme den unbekannten Widerstand R_x und die unbekannte Kapazität C_x als Funktion von R, ω und den abgeglichenen Werten von R_v und C_v.

Aufgabe 4.6: Würfelförmiger Widerstand *(4 Punkte)*

i. (4 pt.)

Es sei ein Widerstandswürfel gegeben, wie in der Skizze abgebildet. Jede Kante des Würfels besteht aus einem Widerstand r. Wie gross ist der effektive Widerstand R_{AB} zwischen den Ecken A und B des Würfels?
Tipp: Symmetrien können hilfreich sein.



Kurzaufgaben: Lösungen

Aufgabe 4.1: Bungeejumping *4 pt.*

Eine Person der Masse $80\,\mathrm{kg}$ geht auf der $220\,\mathrm{m}$ hohen Verzascastaumauer Bungeespringen. Das Seil hat eine Federkonstante von $100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ und wir nehmen zur Vereinfachung an, dass es masselos ist.

i. Wie lange muss das Seil sein, damit die Person am tiefsten Punkt $20\,\mathrm{m}$ über Boden ist? **2.25 p**

At the lowest point the velocity is zero and therefore we can use energy conservation. 0.5 pt.

The potential energy of the person is equal to the energy stored in the rope

$$mgl = \frac{1}{2}k\left(l - h_0\right)^2$$

where l is the length at the lowest point and the h_0 the rest length. 0.5 pt.

Solving for h_0 gives

$$h_0 = l \pm \sqrt{\frac{2gml}{k}}$$

0.5 pt.

Only the solution with the minus sign is of significance, because $h_0 < l$.

$$h_0 = l - \sqrt{\frac{2gml}{k}}$$

0.25 pt

The numerical value for h_0 is $144\,\mathrm{m}$. 0.5 pt.

ii. Wie lange befindet sich die Person im freien Fall? **0.75 p**

The person is in free fall for a distance h_0. This means the time in free fall is

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

0.5 pt.

The numerical value for t is $5.4\,\mathrm{s}$. 0.25 pt

iii. Welche maximale Kraft wirkt auf die Person? **1 pt.**

The maximal force is reached when the person is at the lowest point. 0.25 pt

Therefore we get

$$F_{\max} = k\left(l - h_0\right) - mg = \sqrt{2gmlk} - mg$$

0.5 pt.

We get a numerical value of $4820\,\mathrm{N}$. 0.25 pt

SOLUTIONS

Aufgabe 4.2: Gummiband *4 pt.*

i. Ein Gummiband der Breite $0.1\,\mathrm{m}$ und Länge $1\,\mathrm{m}$ umschliesst ein Stahlrohr des gleichen Umfangs, sodass das Band anfänglich nicht gespannt ist. Nun erhitzen wir das Rohr von $20\,^\circ\mathrm{C}$ auf $50\,^\circ\mathrm{C}$. Was ist der Druck, welcher am Ende des Heizprozesses vom Gummiband auf das Rohr ausgeübt wird? Der thermale Längenausdehnungskoeffizient des Rohres ist $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ und die Federkonstante des Gummibands ist $k = 1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Du darfst annehmen, dass sich das Gummiband nicht aufgrund der Temperatur ausdehnt und dass sich die Breite nicht ändert. **4 pt.**

We calculate the change in elastic energy

$$\mathrm{d}E = k\,(s - s_0)\,\mathrm{d}s$$

where k is the spring constant and $s - s_0$ is the difference between the circumference and the initial length of the rubber band. $\mathrm{d}s$ is the infinitesimal change in the length of the rubber band. 0.5 pt.

We note that the energy can be calculated in another way

$$\mathrm{d}E = pA\mathrm{d}r = \frac{1}{2\pi}pA\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}pbs\mathrm{d}s$$

here p is the pressure exerted on the pipe by the rubber band, b the width of the rubber band. 1.5 pt.

Setting the equations equal we get

$$k\,(s - s_0) = \frac{1}{2\pi}pbs$$

0.5 pt.

We can then calculate the thermal expansion:

$$s - s_0 = s_0\alpha\Delta T$$

0.5 pt.

This gives us the final equation

$$p = 2\pi\frac{k}{b}\frac{\alpha\Delta T}{1 + \alpha\Delta T}$$

0.5 pt.

The numerical result is $22.61\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. 0.5 pt.

In case of the correct numerical result the last two points are rewarded even if the equations are not stated explicitely.
To get the 0.5 pt. for the final equation students may also state

$$p = 2\pi\frac{k}{b}\frac{s - s_0}{s}.$$

Alternative path for the first two points:
Consider a virtual separation of the band in two halves. The forces on each half are:

- *two times the tension $k\,(s - s_0)$ (at the interfaces with the other half) (1 pt.);*
- *the integral of the infinitesimal forces from the pipe on the half, which by symmetry equals $\int_0^\pi pbr\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2pbr = \frac{1}{\pi}pbs$ (1 pt.).*

SOLUTIONS

Aufgabe 4.3: Vakuumröhre *4 pt.*

i. Ein Ball mit Radius $R = 2\,\mathrm{cm}$ und Masse $m = 10\,\mathrm{g}$ befindet sich am Ende eines Rohres mit dem selben Radius R und Länge $l = 1\,\mathrm{m}$. Die Enden des Rohres sind luftdicht verschlossen und mit einer Pumpe wird innerhalb des Rohres ein perfektes Vakuum erzeugt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Rohr auf der Seite des Balles geöffnet, die Kappe auf der gegenüberliegenden Seite wird von der Kugel widerstandslos zur Seite geschoben. Mit welcher Geschwindigkeit verlässt der Ball das Rohr? **2 pt.**

The force on the ball is

$$F = \Delta p A = \Delta p \pi R^2$$

0.5 pt.

where Δp is equal to atmospheric pressure of 1 bar. 0.25 pt

We can calculate the acceleration

$$a = \frac{F}{m}$$

0.25 pt

The time needed for the ball to reach the end of the tube is

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$$

0.25 pt

This means the velocity of the ball is

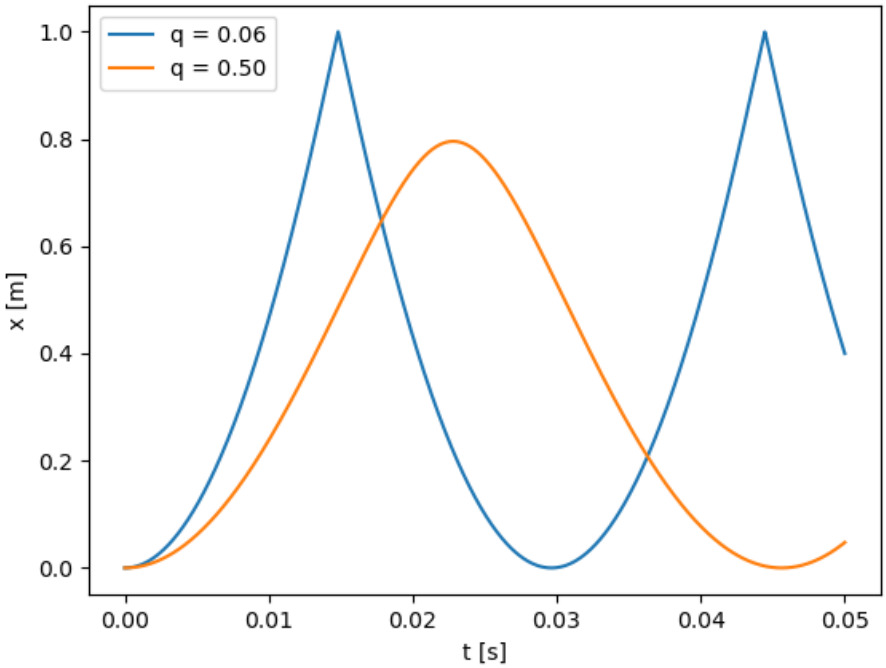
$$v = at = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{2al} = \sqrt{\frac{2\Delta p \pi R^2 l}{m}}$$

0.25 pt

We get a numerical value of $v = 160\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ or $v = 575\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. 0.5 pt.

ii. Beim zweiten Versuch wurde unsorgfältig gearbeitet, sodass das Verhältnis vom Innendrucks zum Aussendruck $q > 0$ beträgt und die Kappe auf der gegenüberliegenden Seite zu fest verschlossen wurde. Skizziere die zurückgelegte Strecke des Balls als Funktion der Zeit für zwei Werte $0 < q_1 < q_2 < 1$. **2 pt.**

SOLUTIONS



Since one end is closed the air in the pipe gets compressed and the pressure increases. At some point the pressure inside the tube will be higher than atmospheric pressure and the ball starts deaccelerating. The ball will turn around and the air in the pipe starts decompressing. In the end this leads to an oscillation of the ball in the pipe.

Axes correctly labeled and the plot is big enough. 0.5 pt.

Both curves describe an oscillation. 0.75 pt

The amplitude of the curve with a lower pressure ratio is higher. 0.75 pt

SOLUTIONS

Aufgabe 4.4: Wega *4 pt.*

Die untenstehende Tabelle enthält Eigenschaften der Sonne und von Wega, einem Hauptstern des Nordhimmels.

	Entfernung	Spektralklasse	Scheinbare Helligkeit	Radius
Sonne	$1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$	**G** (502 nm)	-26.832	$6.963 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
Wega	$2.392 \times 10^{17}\,\mathrm{m}$	**A** (302 nm)	0.03	**?**

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Sterne mit einer einzigen Wellenlänge strahlen, welche der maximalen Strahlung eines Schwarzen Körpers mit derselben Temperatur entspricht, und dass die Sterne ideale Strahler sind ($\varepsilon = 1$).
Zur Erinnerung, die scheinbare Helligkeit eines Sternes ist

$$m = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L}{4\pi d^2}\right),$$

wobei L die intrinsische Leuchtkraft (Strahlungsleistung) des Sterns ist und d die Beobachtungsdistanz.

i. Berechne Wegas Radius. ***Anmerkung: Die angegebene Formel - obwohl in der Literatur oft so angegeben - ist mathematisch nicht ganz korrekt. Genauer wäre die Formel $m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$ für zwei Objekte 1 und 2 mit $E_i = \frac{L_i}{4\pi d_i^2}$. Dies wurde während der Korrektur berücksichtigt.*** **4 pt.**

Stefan-Boltzmann law with perfect emissivity gives

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4.$$

1 pt.

Wien's displacement law gives

$$\lambda_{\text{peak}} = \frac{b}{T},$$

where b is Wien's displacement constant. 1 pt.

Combining it all, we find

$$\frac{R_\mathrm{V}^2}{R_\odot^2} = \frac{L_\mathrm{V} T_\odot^4}{L_\odot T_\mathrm{V}^4} = \frac{L_\mathrm{V} \lambda_{\text{peak, V}}^4}{L_\odot \lambda_{\text{peak},\odot}^4} = \frac{10^{\frac{m_\mathrm{V}}{-2.5}} d_\mathrm{V}^2 \lambda_{\text{peak, V}}^4}{10^{\frac{m_\odot}{-2.5}} d_\odot^2 \lambda_{\text{peak, }\odot}^4}.$$

1 pt.

And therefore

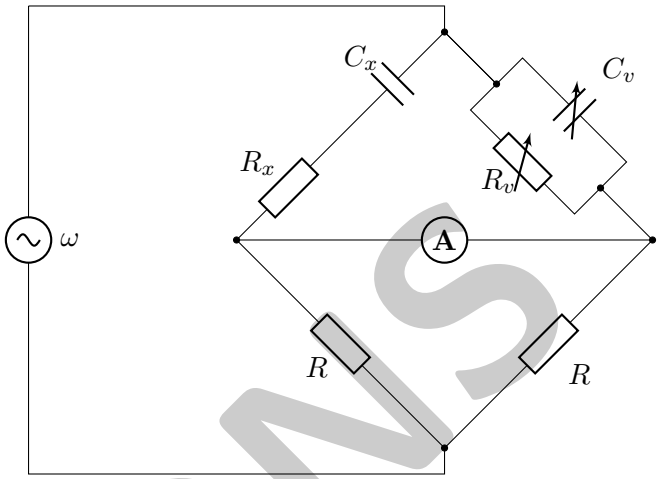
$$R_\mathrm{V} = R_\odot \sqrt{\frac{10^{\frac{m_\mathrm{V}}{-2.5}} d_\mathrm{V}^2 \lambda_{\text{peak, V}}^4}{10^{\frac{m_\odot}{-2.5}} d_\odot^2 \lambda_{\text{peak, }\odot}^4}} = R_\odot \frac{10^{\frac{m_\mathrm{V}}{-5}} d_\mathrm{V} \lambda_{\text{peak, V}}^2}{10^{\frac{m_\odot}{-5}} d_\odot \lambda_{\text{peak, }\odot}^2} = R_\odot 10^{\frac{m_\odot - m_\mathrm{V}}{5}} \frac{d_\mathrm{V}}{d_\odot} \left(\frac{\lambda_{\text{peak, V}}}{\lambda_{\text{peak, }\odot}}\right)^2$$
$$\approx 1.709 \times 10^9\,\mathrm{m}.$$

1 pt.

SOLUTIONS

Aufgabe 4.5: Wien-Brücke *4 pt.*

Diese Abbildung zeigt eine Schaltung, Wien-Brücke genannt, die an eine Wechselstromquelle mit der Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ angeschlossen ist. Die Wien-Brücke erlaubt die Berechnung der Eigenschaften eines unbekannten kapazitiven Elements, hier dargestellt durch den Widerstand R_x und die Kapazität C_x.
Dazu gleicht man die Brücke aus, das heisst, dass man R_v und C_v so lange variiert, bis das Amperemeter über der Brücke null anzeigt.



i. Bestimme den unbekannten Widerstand R_x und die unbekannte Kapazität C_x als Funktion von R, ω und den abgeglichenen Werten von R_v und C_v. **4 pt.**

At bridge equilibrium, Ohm's law and Kirchhoff's voltage law applied on the lower triangle of the bridge give us

$$I_1 R = I_2 R,$$

where I_1 is the current in the left branch of the bridge and I_2 in the right branch. So

$$I_1 = I_2.$$

1 pt.

Note that this is due to the choice of equal resistances in the lower triangle. Unequal resistances R_1, R_2 would give a global $\frac{R_1}{R_2}$ factor to R_x and $\frac{R_2}{R_1}$ to C_x.

Similarly for the upper part, using the impedance relation for capacities $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$:

$$I_1 \left(R_x + \frac{1}{i\omega C_x} \right) = I_2 \frac{1}{\frac{1}{R_v} + i\omega C_v}$$

where I_1 and I_2 can be cancelled. 1 pt.

This equation can be put to standard complex form:

$$R_x - \frac{1}{\omega C_x} i = \frac{\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2} - \frac{\omega C_v}{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2} i.$$

0.5 pt.

The real part gives R_x:

$$R_x = \frac{\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2}.$$

0.75 pt

And the complex part gives C_x:

$$C_x = \frac{\frac{1}{R_v^2} + \omega^2 C_v^2}{\omega^2 C_v}.$$

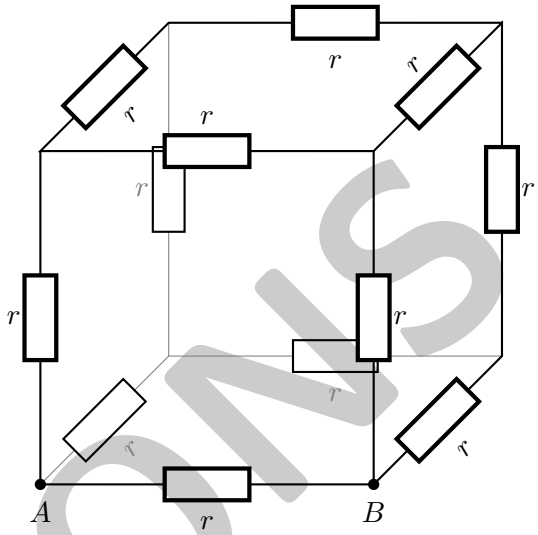
0.75 pt

SOLUTIONS

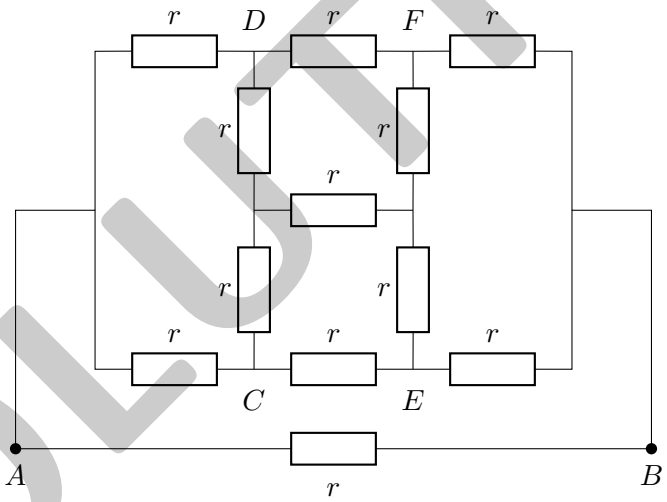
Aufgabe 4.6: Würfelförmiger Widerstand *4 pt.*

i.

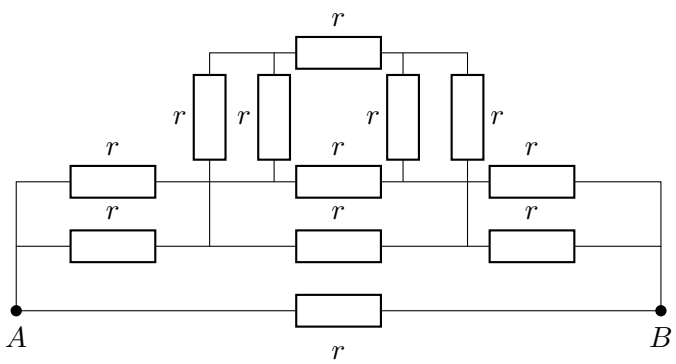
Es sei ein Widerstandswürfel gegeben, wie in der Skizze abgebildet. Jede Kante des Würfels besteht aus einem Widerstand r. Wie gross ist der effektive Widerstand R_{AB} zwischen den Ecken A und B des Würfels?
Tipp: Symmetrien können hilfreich sein.



Flattened circuit: **4 pt.**

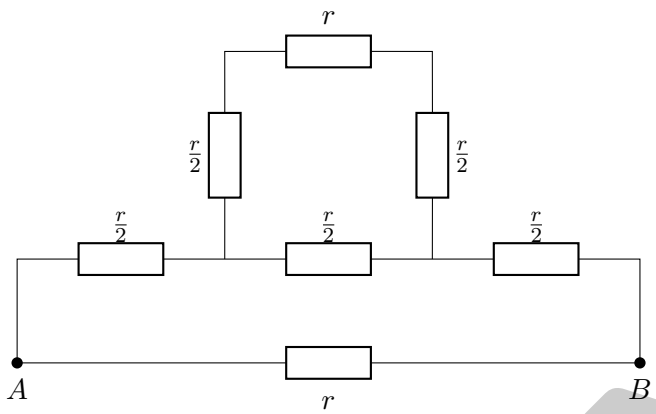


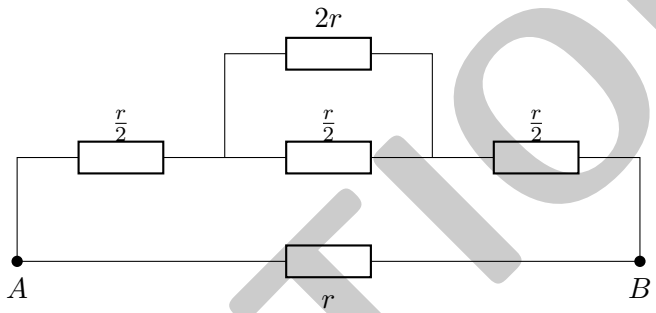
By symmetry, the circuit remains equivalent if we link C to D and E to F - no current would flow through these links. Thus it is equivalent to:

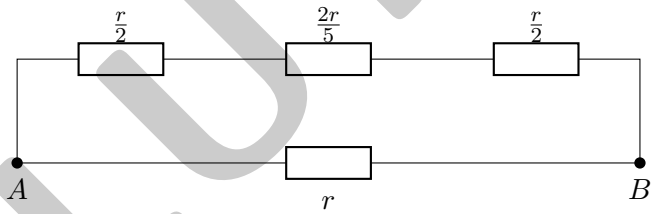


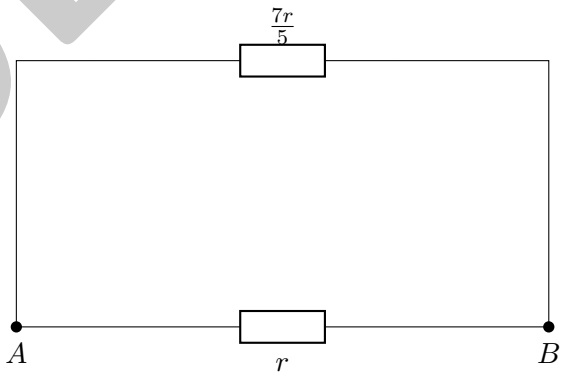
SOLUTIONS

This can then be simplified step-by-step: 1 pt.

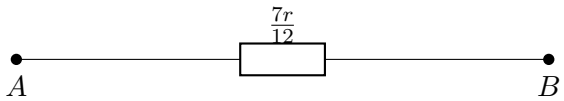








And finally: 2 pt.



SOLUTIONS

Thus the equivalent resistance is $\frac{7}{12}r$. 1 pt.

Alternative solution paths:

- *Full Kirchhoff-based calculation*
- *Kennelly's theorem (Y - Δ)*

SOLUTIONS